

短纤维复合材料的本征应变边界积分方程计算模型*

马 杭¹, 夏利伟¹, 秦庆华²

(1. 上海大学 理学院 力学系, 上海 200444;

2. 澳大利亚国立大学 工程系, 澳大利亚 ACT 0200)

(郭兴明推荐)

摘要: 提出了短纤维复合材料的本征应变边界积分方程计算模型, 并采用新发展的边界点法进行了求解. 模型依据 Eshelby 等效夹杂物的概念并借助 Eshelby 张量, 采用迭代方法来计算基体中各种性能短纤维的本征应变, 其中所需的 Eshelby 张量不难通过解析或数值方法获得. 由于未知量只出现在边界上, 与已有的有限元和边界元模型相比, 提出的计算模型可极大地减小异质体问题的求解规模, 提高计算效率. 通过数值算例计算了代表性体积单元上各种短纤维复合材料的整体弹性性能, 验证了计算模型和求解方法的正确性和有效性.

关键词: 短纤维; 等效夹杂物; 本征应变; Eshelby 张量; 代表性体积单元; 边界积分方程; 边界点法

中图分类号: O241 **文献标识码:** A

引 言

在一大类物理与工程问题中确定嵌入夹杂物的弹性状态具有重要的意义. 自从 Eshelby 的先驱性工作^[1], 几十年来夹杂物和非均质问题成为固体力学的研究焦点之一. 按 Eshelby 和 Mura 的术语^[2], 夹杂物指固体中发生了本征应变或相变的一个子域; 异质体则是指性能与周围材料不同的子域, 并受到外加应力的作用. 而在许多文献中, ‘夹杂物’ 却具有 Eshelby 意义上 ‘异质体’ 的涵义, 本文中的术语采用 Eshelby 的涵义. 遵循 Eshelby 等效夹杂物和本征应变解的概念, 已完成了相当广泛的研究工作^[3-12]. 对应于非协调热应变、相变产生的应变、塑性应变或等效夹杂物中的虚拟应变、整体或有效弹性性能、量子点以及残余应力问题中的固有应变^[13] 问题等, 本征应变解可以表达广泛的物理力学问题.

解析方法可以提供异质体内外应力应变分布的图像以及进一步研究的基础, 然而解析方法通常适于无限大域中具有简单几何形状诸如椭球、圆柱和球体问题的求解, 因而有限元、体积分和边界元等数值方法成为分析复杂几何形状和材料问题的工具. 有限元可提供复合材料包括异质体在内的全场解^[7], 由于基体和所有的异质体都需要离散, 有限元的求解规模很大. 在体积积分法^[8-9] 中, 异质体域用体积积分表达, 在一定程度上简化了离散后方程组系数矩阵的结

* 收稿日期: 2007-07-25; 修订日期: 2008-04-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10772106)

作者简介: 马杭(1951—), 男, 山东青州人, 教授(联系人, E-mail: hangna@staff.shu.edu.cn).

构,但由于界面仍需要离散以便求得界面未知量,仅适用于含有少量异质体的小规模问题. 边界元往往与体积法结合^[10],出于相似的原因(求解界面未知量),通常只适于求解少量异质体规则排列的小规模问题^[11]. 对于大规模问题^[12],须引入多极展开^[14]的特殊技术,大大增加了算法的复杂性. 建立短纤维增强材料的数值模型似乎更为困难^[15].

遵循 Eshelby 等效夹杂物的概念,本文提出了短纤维复合材料的本征应变边界积分方程计算模型,并采用边界点法^[16]进行求解. 对于各种性能的短纤维,借助 Eshelby 张量采用迭代法计算其本征应变,而所需的 Eshelby 张量则采用数值方法事先算好. 在本文计算模型中,由于未知量只出现在边界上,极大地减小了异质体问题的求解规模,提高了计算效率,并通过数值算例验证了计算模型和求解方法的正确性和有效性.

1 边界积分方程

在计算模型中,假设纤维(异质体)和基体均为各向同性材料,二者在界面上理想结合,界面上位移连续、面力平衡. 问题域 Ω 表示基体,其外边界为 Γ ,纤维域 Ω_1 的边界即界面为 Γ_1 ,满足 $\Gamma_1 = \Omega_1 \cap \Omega$. 位移场由基本的边界积分方程描述如下:

$$C(p) u_i(p) = \int_{\Gamma} \mathcal{T}_j(q) u_{ij}^*(p, q) d\Gamma(q) - \int_{\Gamma} u_j(q) \mathcal{T}_{ij}^*(p, q) d\Gamma(q) + \sum I_b \quad (1)$$

式中 u_{ij}^* 为 Kelvin 解,即源点 p 在 i 向单位力作用下场点 q 在 j 向的位移, \mathcal{T}_{ij}^* 为对应的面力核;系数 C 为决定于源点的位置以及边界^[17]或界面的几何形状. 上式中最后一项为边界积分方程表达的纤维作用之和,即:

$$I_1 = \int_{\Gamma_1} \mathcal{T}_j(q) u_{ij}^*(p, q) d\Gamma(q) - \int_{\Gamma_1} u_j(q) \mathcal{T}_{ij}^*(p, q) d\Gamma(q), \quad (2)$$

注意每个积分 I_1 在局部描述了一个外域问题. 对应于式(2)的每个积分,尚需下列补充方程,问题的求解才能完整:

$$C(p) u_i^I(p) = \int_{\Gamma_1} \mathcal{T}_j^I(q) u_{ij}^I(p, q) d\Gamma(q) - \int_{\Gamma_1} u_j^I(q) \mathcal{T}_{ij}^I(p, q) d\Gamma(q), \quad (3)$$

其中上标 I 表示关于纤维的量. 与式(2)不同,每个补充方程(3)在局部描述的是内域问题. 在常规的边界元法中,基本方程(1)与补充方程(3)是要联立求解的. 然而,由于未知量同时出现在边界为 Γ 和界面 Γ_1 上,问题的规模将很大. 方程(1)与(3)是本文研究的起点. 根据界面理想结合的假设,即位移连续、面力平衡,下列界面关系成立:

$$u_j = u_j^I, \quad \mathcal{T}_j = -\mathcal{T}_j^I, \quad \mathcal{T}_{ij}^* = -\mathcal{T}_{ij}^{I*}. \quad (4)$$

令式(2)和(3)中 $p \in \Omega$,即点 p 不属于任何一个异质体域,注意到式(3)描述的是内域问题,有 $C = 0$. 由界面关系(4)和补充方程(3),可将外域问题(2)等价地转换成内域问题如下:

$$I_1 = - \int_{\Gamma_1} \mathcal{T}_j^I(q) u_{ij}^*(p, q) d\Gamma(q) + \int_{\Gamma_1} \mathcal{T}_j^I(q) u_{ij}^I(p, q) d\Gamma(q). \quad (5)$$

注意式(5)右边第 1 个积分描述了 Ω_1 域基体材料的状态,而第 2 个积分描述了 Ω_1 域纤维材料的状态,二者均为内域问题. 可以证明,对于均质域 Ω 及其边界 Γ ,下列积分恒等式成立,即

$$C u_i + \int_{\Gamma} u_j \mathcal{T}_{ij}^* d\Gamma(q) = \int_{\Gamma} \mathcal{T}_j u_{ij}^* d\Gamma = \int_{\Omega} \mathcal{E}_{jk} \sigma_{ijk}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{jk}^* \mathcal{E}_{ijk} d\Omega, \quad (6)$$

其中 σ_{jk}^* 和 \mathcal{E}_{ijk}^* 分别为对应于 Kelvin 解的应力和应变核. 式(6)可以看作弹性力学中互易定理的积分形式. 利用式(6),可将式(5)写成

$$I_1 = - \int_{\Omega_1} \mathcal{E}_{jk}^I(q) \sigma_{ij}^*(p, q) d\Omega(q) + \int_{\Omega_1} \mathcal{E}_{jk}^I(q) \sigma_{ij}^I(p, q) d\Omega(q), \quad (7)$$

其中 ε_{jk}^c 为 Ω_1 域中基体材料(不含纤维)在界面的面力作用下产生的虚拟应变, 或等效应变, ε_{jk}^l 为同样条件下纤维产生的应变. 引入本征应变 $\varepsilon_{jk}^0 = \varepsilon_{jk}^l - \varepsilon_{jk}^c$, 注意到核的关系 $\sigma_{\bar{y}k}^* = \sigma_{ijk}^l$ 存在, 式(7)积分 I_1 可以写成

$$I_1 = \int_{\Omega_1} \varepsilon_{jk}^0(q) \sigma_{\bar{y}k}^*(p, q) d\Omega(q). \quad (8)$$

这样, 原始的基本积分式(1)成为

$$C(p) u_i(p) = \int_{\Gamma} \bar{y}_j(q) u_{\bar{y}}^*(p, q) d\Gamma(q) - \int_{\Gamma} u_j(q) \tau_{\bar{y}}^*(p, q) d\Gamma(q) + \sum \int_{\Omega_1} \varepsilon_{jk}^0(q) \sigma_{ijk}^*(p, q) d\Omega(q). \quad (9)$$

可以看出联立的式(1)和(3)转化为含有(纤维)域积分之和的单一积分方程(9), 本文称之为本征应变边界积分方程, 其中每个域积分描述了一个由基体材料构成的等效夹杂物, 其上分布着本征应变, 这正是 Eshelby 提出^[1]并由 Mura^[2]以及其他众多学者发展的思想. 本征应变定义为无应力条件下等效夹杂物的应变, 它在界面上和基体中产生与异质体相同的力学状态.

若 $\varepsilon_{jk}^0 = 0$, 则方程(9)描述了均质问题的弹性力学状态, 因而方程(9)求解的关键步骤是如何确定每个纤维中的本征应变, 将在第2节讨论. 应力方程在问题求解时也是必不可少的:

$$C(p) \sigma_{\bar{y}}(p) = \int_{\Gamma} \bar{\tau}_k(q) u_{\bar{y}k}^*(p, q) d\Gamma(q) - \int_{\Gamma} u_k(q) \tau_{\bar{y}k}^*(p, q) d\Gamma(q) + \sum \int_{\Omega_1} \varepsilon_{kl}^0(q) \sigma_{ijk}^*(p, q) d\Omega(q) + \varepsilon_{kl}^0(p) O_{\bar{y}kl}^*, \quad (10)$$

其中

$$O_{\bar{y}kl}^*(p, q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Delta \Gamma_{\varepsilon}} x_l \tau_{\bar{y}k}^*(p, q) d\Gamma(q). \quad (11)$$

当两点 q 与 p 重合时, 域 Ω_{ε} (其边界为 Γ_{ε}) 是 Ω_1 中的无限小域^[18-19], 而 $x_l = x_l(q) - x_l(p)$, 式(10)的推导可参见有关边界元的著作^[17]. 当处理含有裂纹的异质体问题时, 还需要面力边界积分方程, 可利用 Cauchy 关系 $\bar{\tau}_i = \sigma_{ij} n_j$ 和应力方程(10)得到

$$C \bar{\tau}_i(p) = n_j(p) \int_{\Gamma} \bar{\tau}_k(q) u_{\bar{y}k}^*(p, q) d\Gamma(q) - n_j(p) \int_{\Gamma} u_k(q) \tau_{\bar{y}k}^*(p, q) d\Gamma(q) + n_j(p) \sum \int_{\Omega_1} \varepsilon_{kl}^0(q) \sigma_{ijk}^*(p, q) d\Omega(q) + n_j(p) \varepsilon_{kl}^0(p) O_{\bar{y}kl}^* \quad (p \in \Gamma), \quad (12)$$

其中 n_j 为点 p 处边界的单位外法线. 面力方程(12)属于超奇性边界积分方程, 式(9)、(10)和(12)中的域积分可由边界型积分来计算^[18-19]. 应指出的是, 异质体问题求解的规模主要由界面上的未知量构成, 而在本征应变边界积分方程的计算模型中, 界面条件已自然满足, 未知量仅出现在外边界上, 界面上并不出现未知量, 因而求解规模相当地小. 与有限元和传统的边界元相比, 这是本文模型的突出优点.

2 求解步骤

本节介绍本征应变边界积分方程的求解步骤及其相关问题. 纤维的本征应变决定于外加应力(或应变)、几何形状及材料参数, 根据文献[1], 无应力时夹杂物中的约束应变 ε_{ij}^c 与本征应变 ε_{kl}^0 通过张量 S_{ijkl} 联系起来, 即所谓 Eshelby 张量

$$\varepsilon_{ij}^c = S_{ijkl} \varepsilon_{kl}^0. \quad (13)$$

Eshelby 张量仅依赖于几何参数, 通常为积分形式. 对于简单几何形状, 其分量可在文献中查

到^[5]. 应指出的是, 式(13)适用于无限大体中单个夹杂物问题, 且本征应变在夹杂域内均匀分布. 对于有限域问题, 本征应变均匀分布的适用条件是夹杂物的体积足够小且保持一定的距离. 根据 Hooke 定律, 用等效夹杂物替换外加应变 ε_j 作用下的异质体而不改变该处的应力状态, 必须满足下列关系, 即

$$\mu \left\{ (\varepsilon_j^c + \varepsilon_j) + \frac{\nu_1}{1-2\nu_1} \delta_{ij} (\varepsilon_{kk}^c + \varepsilon_{kk}) \right\} = \mu \left\{ (\varepsilon_j^c + \varepsilon_j - \varepsilon_{ij}^0) + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} (\varepsilon_{kk}^c + \varepsilon_{kk} - \varepsilon_j^0) \right\}, \quad (14)$$

其中 μ 和 ν 分别为剪切模量和 Poisson 比, 下标 1 表示纤维. 定义模量比 $\beta = \mu_1/\mu$ 并假定 $\nu_1 = \nu$, 结合式(13)和(14)消去 ε_j^c , 便可得到由外加应变 ε_j 来计算本征应变 ε_{ij}^0 的关系式

$$\varepsilon_{ij}^0 = \frac{1-\beta}{1-2(1-\beta)S_{jij}} \varepsilon_j \quad (i \neq j), \quad (15a)$$

$$\frac{\nu}{1-2\nu}(1-\beta)S_{kkmn}\varepsilon_{mn}^0 + (1-\beta)S_{jmn}\varepsilon_{mn}^0 + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}^0 + \varepsilon_j^0 = - (1-\beta) \left[\frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk} + \varepsilon_j \right] \quad (i = j). \quad (15b)$$

显然, 每个纤维所在之处的外加应力(或应变)将受到其他纤维特别是邻近纤维的扰动, 因此在计算过程中, 每处的外加应力(或应变)以及本征应变的数值必须通过迭代来修正. 结合边界条件, 离散后的方程(9)或(12)可以写成矩阵的形式

$$Ax = b + BE, \quad (16)$$

其中 A 为离散方程组的系数矩阵, B 为式(9)或(12)中与域积分有关的系数矩阵, b 为右向量, 该向量由外边界已知量及相应积分核来确定; x 为外边界未知向量, ε 为所有纤维的本征应变向量, 其数值必须通过迭代来修正. 需要指出的是, A 、 B 和 b 中的系数都是常量, 只需一次性计算. 计算开始时利用式(15)和弹性状态给每个纤维的本征应变赋初值, 然后简单地利用下列迭代格式计算未知向量 x :

$$x^{(k+1)} = A^{-1}(b + BE^{(k)}), \quad (17)$$

其中 k 为迭代计数. 定义最大迭代误差为

$$E_{\max} = \max \left\{ \varepsilon^{(k)} - \varepsilon^{(k-1)} \right\}, \quad (18)$$

即两次迭代之间本征应变分量的最大差值. 本文采用的收敛判据为

$$E\varepsilon_{\max} \leq 10^{-3}, \quad (19)$$

其中 E 为基体的弹性模量. 如果不满足判据(19), 则用更新的 x 和式(10)来计算各个纤维之处的外加应力和应变来更新本征应变. 应强调的是, 式(10)中对应于当前纤维的那个域积分应被排除在计算之外, 因为该处的应力状态反映了在给定的边界条件下求解域中所有其他异质体(即纤维)对该处的干扰. 如果满足了判据(19), 则进行下一步, 例如感兴趣的应力、整体性能等. 本文模型求解的主要步骤总结如下:

(a) 计算式(16) A 、 B 和 b 中的常量系数.

(b) 利用式(15)和弹性状态下每个纤维所在之处的向量 ε 赋以初值, 计算时不考虑该处纤维自身的影响.

(c) 用迭代式(17)和当前本征应变向量计算未知向量 x .

(d) 检查收敛判据(19).

(e) 若判据(19)不满足, 进行下列计算并返回步骤(c), 否则进入步骤(f):

(i) 用式(10)计算各个异质体之处当前的外加应力, 计算时要排除该异质体的影响;

- (ii) 用 Hooke 定律计算各个异质体之处当前的外加应变;
- (iii) 用式(15)更新本征应变向量 ε .
- (f) 计算感兴趣的应力、整体性能等.

可以看出利用 Eshelby 张量来确定各个纤维的本征应变乃是计算步骤的关键. 虽然存在某些 Eshelby 张量的解析解, 然而利用数值方法, 总是可以方便地获得所需的 Eshelby 张量. 考虑无应力状态下无限域中的单个含有本征应变的等效夹杂物, 式(9)和(10)分别退化为下列形式, 即

$$u_i(p) = \int_{\Omega_1} \mathcal{E}_{jk}^0(q) \sigma_{ijk}^*(p, q) d\Omega(q), \quad (20)$$

$$\sigma_{ij}(p) = \int_{\Omega_1} \mathcal{E}_{kl}^0(q) \sigma_{ijkl}^*(p, q) d\Omega(q) + \mathcal{E}_{kl}^0(p) O_{ijk}^*. \quad (21)$$

假设等效夹杂物中的本征应变为均匀分布(对于简单几何形状该假设正确^[11]), 式(20)和(21)都可转化为边界型积分^[18-19]

$$u_i(p) = \mathcal{E}_{jk}^0 \int_{\Gamma_1} x_k \mathcal{T}_{ij}^*(p, q) d\Gamma(q), \quad (22)$$

$$\sigma_{ij}(p) = \mathcal{E}_{kl}^0 \int_{\Gamma_1} x_l \mathcal{T}_{ijk}^*(p, q) d\Gamma(q). \quad (23)$$

当源点 $p \in \Omega$ 和 $p \in \Omega_1$ 时, 式(20)和(21)分别描述了基体和异质体内的位移场和应力场. 然而当源点 p 跨越界面 Γ_1 时, 位移场连续而应力值存在一个跃变, 这是由于当 $p \in \Gamma_1$ 时, $x_k \mathcal{T}_{ij}^*$ 是正则核而 $x_l \mathcal{T}_{ijk}^*$ 是强奇性核. 回顾导出式(9)时本征应变的定义 $\mathcal{E}_{jk}^0 = \mathcal{E}_{jk}^d - \mathcal{E}_{jk}^c$ 并与 Eshelby 的概念做比较, 可清楚地知道 \mathcal{E}_{jk}^c 对应于无应力状态下无限域中 Eshelby 定义的等效夹杂物中的约束应变. 令 $p \in \Omega_b$, 式(23)成为正则积分, σ_{ij} 为等效夹杂物中的约束应力, 可通过数值方法计算到任意精度. 结合式(13)、(23)和 Hooke 定律 $\mathcal{E}_{ij}^c = C_{ijkl} \sigma_{kl}$, Eshelby 张量可以表达为

$$S_{ijkl} = C_{jmn} \int_{\Gamma_1} x_k \mathcal{T}_{mnl}^*(p, q) d\Gamma, \quad (24)$$

其中 C_{ijkl} 为基体的弹性柔度张量. 由此可知 Eshelby 张量仅决定于异质体的几何形状. 容易证明式(24)与 Eshelby 关于 S_{ijkl} 的表达式一致, 但式(24)更适于数值计算. 对于本征应变非均匀分布的情况, 将本征应变按完全多项式展开, 将域积分(20)和(21)转化为边界型积分并不存在困难^[18-19], 但本文不考虑该情况. 方程(9)、(10)和(12)中的域积分都可通过下列边界型积分来计算^[18-19]:

$$\int_{\Omega_1} \sigma_{ijk}^* d\Omega = \int_{\Gamma_1} x_k \mathcal{T}_{ij}^* d\Gamma, \quad (25)$$

$$\int_{\Omega_1} \sigma_{ijkl}^* d\Omega + O_{ijk}^* = \int_{\Gamma_1} x_l \mathcal{T}_{ijk}^* d\Gamma. \quad (26)$$

这样边界点法的所有技术均可应用到界面 Γ_1 上^[16], 即界面离散为节点, 每个节点拥有一个支域, 在多数情况下, 当场点和源点间的距离较大时, 式(25)和(26)的边界型闭路积分可采用‘单点计算’来进行^[16]. 这里有两个问题需要强调, 第1, 域积分计算只涉及纤维本征应变对外边界未知量的影响, 但不影响系数矩阵本身. 第2, 采用边界型闭路积分来计算域积分也只是在两点距离较小的少数情况下才是必要的, 换言之, 多数情况下的域积分也可简单地通过单点计算而获得合理的精度, 限于篇幅, 这里不再赘述.

3 算 例

算例中的离散方程用边界点法求解. 本文中所有圆柱形纤维都采用具有大长细比的椭球体异质体近似. 如图 1 (a) 所示, 由于是二维计算, 圆柱与椭球体的截面积保持一致. 采用图 1 (b) 所示的矩形域单向拉伸模型检验近似的有效性, 其中 $L/B = 0.1, L/R = 10$, 在 x_1 方向施加单位面力, 分别用 $N = 150$ 以及 $N_F = 120$ 个节点离散外边界和界面, 计算中采用了圆柱形

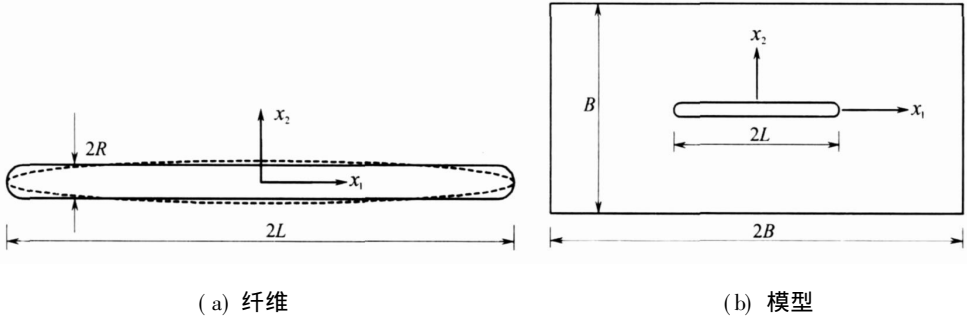


图 1 单个纤维问题示意图

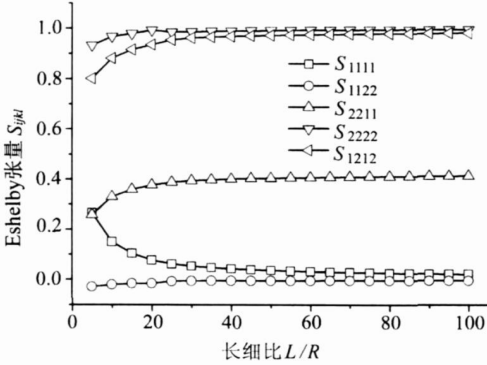


图 2 不同长细比短纤维的 Eshelby 张量

图 2 不同长细比短纤维的 Eshelby 张量. 首先用联立的方程(1)和(3)求解作为参照, 这种解法称为分域法, 因为求解域中含有两个或更多的具有不同材料性能的区域, 它们在界面上相互耦合. 同时采用本征应变积分方程(9)求解了椭圆形纤维域, 事先利用式(24)的数值计算将所需的 Eshelby 张量算好, 如图 2 所示.

(实线)和椭圆形(虚线)两种形状的纤维域(图 1 (a)). 首先用联立的方程(1)和(3)求解作为参照, 这种解法称为分域法, 因为求解域中含有两个或更多的具有不同材料性能的区域, 它们在界面上相互耦合. 同时采用本征应变积分方程(9)求解了椭圆形纤维域, 事先利用式(24)的数值计算将所需的 Eshelby 张量算好, 如图 2 所示.

计算时采用的模量比为 $\beta = \mu_f / \mu = 10$, 其中 μ_f, μ 分别为纤维和基体的剪切模量. 计算结果如图 3、4 所示, 可知两种形状的纤维产生的应力场十分相似, 特别是远场应力, 说明对于分布不太稠密的短纤维来说, 椭圆形纤维是对圆柱形纤维的良好近似. 计算还发现采用分域法和本文模型计算的结果几乎没有区别, 正如预期, 所以文中没有给出.

计算时采用的模量比为 $\beta = \mu_f / \mu = 10$, 其中 μ_f, μ 分别为纤维和基体的剪切模量. 计算结果如图 3、4 所示, 可知两种形状的纤维产生的应力场十分相似, 特别是远场应力, 说明对于分布不太稠密的短纤维来说, 椭圆形纤维是对圆柱形纤维的良好近似. 计算还发现采用分域法和本文模型计算的结果几乎没有区别, 正如预期, 所以文中没有给出.

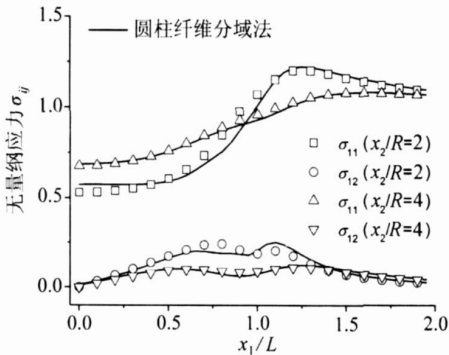


图 3 平行于纤维轴向 (x_1 方向) 的计算应力

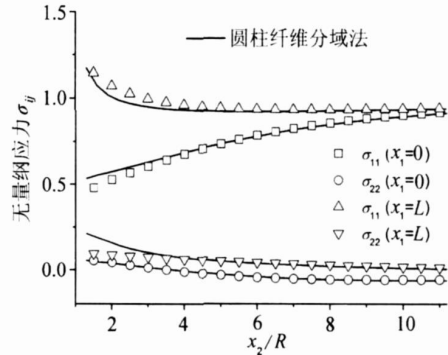


图 4 垂直于纤维轴向 (x_2 方向) 的计算应力

采用图 5 所示的代表性体积单元, 改变纤维的性能、长细比和数量, 计算了短纤维复合材料的整体弹性性能, 其中 N_1 为计算域中的纤维数目. 用 $N = 150$ 个节点离散外边界, 用 $N_F =$

300 个节点离散每个界面,目的是为了精细地描述大长细比(最大为 $L/R = 100$)的纤维. 需要说明的是,仅当场点和源点的距离较小、域积分需要采用边界型闭路积分来计算时,界面的离散才是必要的. 多数情况下,域积分采用单点计算,所以在计算模型中,界面的离散并非总是必要的.

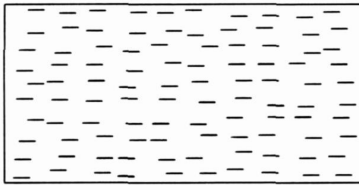
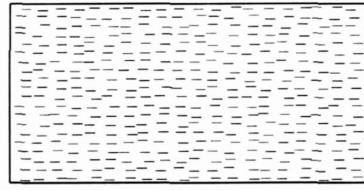
(a) $N_1 = 100$ (b) $N_1 = 400$

图 5 短纤维复合材料的代表性体积单元

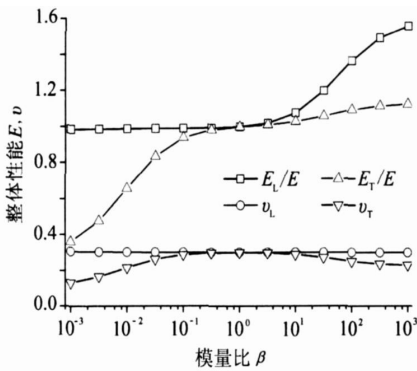
 $L/R = 100, 2L = 3.16, N_1 = 100$

图 6 代表性体积单元整体性能与模量比的关系

图 6 为代表性体积单元的整体性能与模量比 β 的关系,计算时纤维的长细比保持不变. 图中 E_L 和 E_T 和分别为纵向和横向模量,小的模量比对应于软纤维,例如钢板中沿轧制方向分布的条状 MnS 夹杂物,将严重消弱板厚方向的性能. 由图 6 可知,软纤维降低横向模量,而硬纤维增加纵向模量. 纵向 Poisson 比几乎不受模量比的影响,而横向 Poisson 比呈非单调变化. 图 7 为代表性体积单元的整体性能与纤维长细比 L/R 的关系,计算时纤维的面积 $4RL$ 保持不变. 由图 7 可知,软纤维对纵向模量几乎没有影响,而硬纤维对横向模量几乎没有影响,正如预期. 图 8 为代表性体积单元的整体性能与纤维含量的关系,表明了整体性能与不同纤维含量不同长细比的对应关系. 算例证明了计算模型的正确性和有效性.

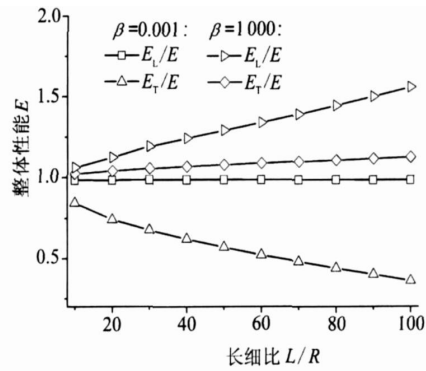
 $N_1 = 100, 4RL = 0.079$

图 7 代表性体积单元整体性能与纤维长细比的关系

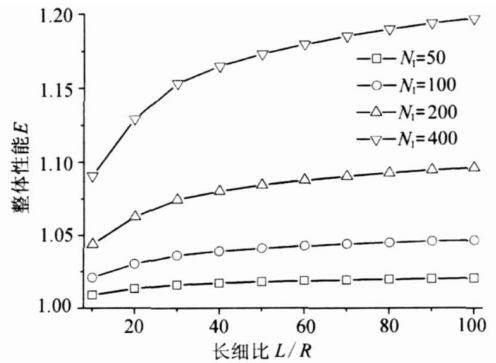
 $\beta = 10, 4RL = 0.047$

图 8 代表性体积单元整体性能与纤维含量的关系

由于界面未知量并不出现在系统方程中,与有限元和边界元模型相比,本文模型的求解规模很小. 例如,无论代表性体积单元中含有多少纤维,本文模型系数矩阵的大小始终为 $(2N)^2$

$= 9 \times 10^4$. 与此形成鲜明对照, 如果采用方程(1)和(3)联立的分域法, 则系数矩阵的大小变成 $(2N + N_i + 4N_F)^2 = 1.45 \times 10^{10}$, 是本征应变模型的 1.6×10^5 倍. 采用收敛判据(19), 通常只需少数几次迭代即可收敛, 在本文算例中不超过10次. 然而计算发现, 收敛速度将随着异质体体积(面积)分数的增加而降低, 因而算法的收敛行为有待进一步的研究.

4 结 论

本文提出了新的短纤维复合材料的本征应变边界积分方程计算模型和算法, 并采用边界点法进行了求解. 由于未知量只出现在边界上, 与有限元和边界元模型相比, 本文提出的计算模型极大地减小了异质体问题的求解规模, 提高了计算效率. 模型依据 Eshelby 等效夹杂物的概念并借助 Eshelby 张量, 采用迭代方法来计算基体中各种性能短纤维的本征应变, 通常只需少数几次迭代即可收敛, 所需的 Eshelby 张量可通过解析或数值方法获得. 通过数值算例计算了代表性体积单元上各种短纤维复合材料的整体弹性性能, 验证了本文计算模型和求解方法的正确性和有效性.

[参 考 文 献]

- [1] Eshelby J D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems [J]. Proceedings of the Royal Society of London, Ser A, 1957, **241**(1226): 376-396.
- [2] Mura T, Shodja HM, Hirose Y. Inclusion problems (part 2) [J]. Applied Mechanics Review, 1996, **49**(10): S118-S127.
- [3] Kiris A, Inan E. Eshelby tensors for a spherical inclusion in microelongated elastic fields [J]. International Journal of Engineering Science, 2005, **43**(1/2): 49-58.
- [4] Mercier S, Jacques N, Molinari A. Validation of an interaction law for the Eshelby inclusion problem in elasto-viscoplasticity [J]. International Journal of Solids and Structures, 2005, **42**(7): 1923-1941.
- [5] Federico S, Grillo A, Herzog W. A transversely isotropic composite with a statistical distribution of spheroidal inclusions: a geometrical approach to overall properties [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2004, **52**(10): 2309-2327.
- [6] Shen L X, Yi S. An effective inclusion model for effective moduli of heterogeneous materials with ellipsoidal inhomogeneities [J]. International Journal of Solids and Structures, 2001, **38**(32/33): 5789-5805.
- [7] Kakavas P A, Kontoni D N. Numerical investigation of the stress field of particulate reinforced polymeric composites subjected to tension [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, **65**(7): 1145-1164.
- [8] Lee J, Choi S, Mal A. Stress analysis of an unbounded elastic solid with orthotropic inclusions and voids using a new integral equation technique [J]. International Journal of Solids and Structures, 2001, **38**(16): 2789-2802.
- [9] Dong C Y, Cheung Y K, Lo S H. A regularized domain integral formulation for inclusion problems of various shapes by equivalent inclusion method [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2002, **191**(31): 3411-3421.
- [10] Dong C Y, Lee K Y. Effective elastic properties of doubly periodic array of inclusions of various shapes by the boundary element method [J]. International Journal of Solids and Structures, 2006, **43**(25/26): 7919-7938.
- [11] Nakasone Y, Nishiyama H, Nijiri T. Numerical equivalent inclusion method: a new computational method for analyzing stress fields in and around inclusions of various shapes [J]. Materials Science and Engineering, A, 2000, **285**(1/2): 229-238.

- [12] Liu Y J, Nishimura N, Tanahashi T, et al. A fast boundary element method for the analysis of fiber-reinforced composites based on a rigid-inclusion model[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 2005, 72(1): 115-128.
- [13] Ma H, Deng H L. Nondestructive determination of welding residual stresses by boundary element method[J]. Advances in Engineering Software, 1998, 29(2): 89-95.
- [14] Greengard L F, Rokhlin V. A fast algorithm for particle simulations[J]. Journal of Computational Physics, 1987, 73(2): 325-348.
- [15] Kompis V, Kompis M, Kaučič M. Method of continuous dipoles for modeling of materials reinforced by short micro-fibers[J]. Engineering Analysis With Boundary Elements, 2007, 31(5): 416-424.
- [16] MA Hang, QIN Qing-hua. Solving potential problems by a boundary-type meshless method—the boundary point method based on BIE[J]. Engineering Analysis With Boundary Elements, 2007, 31(9): 749-761.
- [17] Brebbia C A, Telles J C F, Wrobel L C. Boundary Element Techniques —Theory and Applications in Engineering [M]. Berlin: Springer, 1984.
- [18] Ma H, Kamiya N, Xu S Q. Complete polynomial expansion of domain variables at boundary for two-dimensional elastoplastic problems[J]. Engineering Analysis With Boundary Elements, 1998, 21(3): 271-275.
- [19] Ma H, Kamiya N. Boundary-type integral formulation of domain variables for three-dimensional initial strain problems[J]. JSCE Journal of Applied Mechanics, 1998, 1(1): 355-364.

Computational Model for Short-Fiber Composites With Eigen-Strain Formulation of Boundary Integral Equations

MA Hang¹, XIA Li-wei¹, QIN Qing-hua²

(1. Department of Mechanics, College of Sciences, Shanghai University,
Shanghai 200444, P. R. China;

2. Department of Engineering, Australian National University, ACT 0200, Australia)

Abstract: A computational model was proposed for short-fiber reinforced materials with the eigen-strain formulation of the boundary integral equations (BIE) and solved with the newly developed boundary point method (BPM). The model comes intimately from the concept of the equivalent inclusion of Eshelby with eigenstrains to be determined in an iterative way for each short-fiber embedded in the matrix with various properties via the Eshelby tensors, which can be readily obtained beforehand through either analytical or numerical means. As the unknowns appear only on the boundary of the solution domain, the solution scale of the inhomogeneity problem with the model is greatly reduced. This feature is considered to be significant because such a traditionally time-consuming problem with inhomogeneity can be solved most cost-effectively compared with the existing numerical models of the FEM or the BEM. The numerical examples are presented to compute the overall elastic properties for various short-fiber reinforced composites over a representative volume element (RVE), showing the validity and the effectiveness of the proposed computational model and the solution procedure.

Key words: short-fiber; equivalent inclusion; eigen-strain; Eshelby tensor; representative volume element; boundary integral equation; boundary point method