应用数学和力学, 第 29 卷 第 6 期
2008 年 6 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 29, No. 6, Jun. 15, 2008

文章编号: 1000-0887(2008) 06-0749-08

Brusselator 模型的扩散引起不稳定性和 Hopf 分支*

李 波[1,2], 王明新[1]

(1. 东南大学 数学系, 南京 210018;
2. 徐州师范大学 数学科学学院, 江苏 徐州 221116)

(陈立群推荐)

摘要: 研究了 Brusselator 常微分系统和相应的偏微分系统的 Hopf 分支, 并用规范形理论和中心流形定理讨论了当空间的维数为 1 时 Hopf 分支解的稳定性. 证明了: 当参数满足某些条件时, Brusselator 常微分系统的平衡解和周期解是渐近稳定的, 而相应的偏微分系统的空间齐次平衡解和空间齐次周期解是不稳定的; 如果适当选取参数, 那么 Brusselator 常微分系统不出现 Hopf 分支, 但偏微分系统出现 Hopf 分支, 这表明, 扩散可以导致 Hopf 分支.

关 键 词: Brusselator 模型; Hopf 分支; 稳定性; 扩散导致 Hopf 分支
中图分类号: O175.26 文献标识码: A

引 言

Brusselator 模型[1-3] 用来描述化学反应中的形态形成和模式形成. 通过适当的变换, Brusselator 常微分系统为

$$\begin{cases} u_t = \lambda(1-(b+1)u+bu^2v), & t>0, \\ v_t = \lambda a^2(u-u^2v), & t>0, \end{cases} \tag{1}$$

相应地偏微分系统为

$$\begin{cases} u_t - d_1\Delta u = \lambda(1-(b+1)u+bu^2v), & (t,x)\in(0,\infty)\times\Omega, \\ v_t - d_2\Delta v = \lambda a^2(u-u^2v), & (t,x)\in(0,\infty)\times\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\Omega\subset R^N$ 是有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, u 和 v 分别是两种反应物的浓度. d_1、d_2、λ、a 和 b 是正常数. 近来已有许多关于 Brusselator 系统的结果(见文献[1-7] 及里面的参考文献). 特别地, 在文献[7] 中, Peng 和 Wang 研究了偏微分系统(2) 当 $d_1=\theta$, $d_2=1$ 时的带有齐次 Neumann 边界条件的唯一正常数平衡解的渐近稳定性, 并讨论了相应椭圆系统的非常数正平衡解的存在性. 为讨论方便, 我们取 $\lambda=1$, 则系统(1) 和(2) 变为

$$\begin{cases} u_t = 1-(b+1)u+bu^2v, & t>0, \\ v_t = a^2(u-u^2v), & t>0 \end{cases} \tag{3}$$

* 收稿日期: 2007-12-21; 修订日期: 2008-04-21
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10771032); 江苏省自然科学基金资助项目(BK2006088)
作者简介: 李波(1971—), 女, 河北徐水人, 博士生(联系人. E-mail: libo5181923@163.com).

和

$$\begin{cases} u_t - d_1\Delta u = 1-(b+1)u + bu^2 v, & (t,x)\in(0,\infty)\times\Omega, \\ v_t - d_2\Delta v = a^2(u-u^2 v), & (t,x)\in(0,\infty)\times\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

Yi 等人[8]研究了Lengyel-Epstein 模型的平衡解的稳定性, Turing 不稳定和Hopf 分支解的存在性、方向及稳定性, 并且证明了如果扩散系数满足一定的条件, 空间齐次周期解成为不稳定的. 对 Brusselator 模型, 可以证明有类似的结论. 本文研究了常微分系统(3)和相应的偏微分系统(4)的Hopf 分支(存在性、方向和稳定性), 并且讨论了扩散导致Hopf 分支和扩散引起不稳定. 扩散导致 Hopf 分支是指在一些条件下, 常微分系统不出现Hopf 分支, 而偏微分系统出现Hopf 分支. Wang[9]在研究具有阶段结构和扩散的捕食模型中, 首次发现了这一现象.

显然系统(3)有唯一平衡解 $\boldsymbol{u}=(u^*, v^*)=(1,1)$.

系统(3)在 $\boldsymbol{u}$ 的 Jacobi 矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} b-1 & b \\ -a^2 & -a^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{A} = b-1-a^2,\quad \det\boldsymbol{A} = a^2>0,$$

其中 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$ 和 $\det\boldsymbol{A}$ 分别为矩阵$\boldsymbol{A}$ 的迹和行列式. 如果$0<b<1+a^2$, 即$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}<0$, 那么矩阵$\boldsymbol{A}$ 的两个特征值均有负实部, 因此系统(3) 的平衡解 $\boldsymbol{u}$ 是局部渐近稳定的.

同于文献[10]317 例1的分析过程, 我们有下面的结果:

定理1　假设 $b>0$, 如果 $b>1$ 令 $a_0=\sqrt{b-1}$.

(i) 当 $0<b\leqslant 1$ 或者 $b>1$ 且 $a>a_0$ 时, 系统(3) 的平衡解 $\boldsymbol{u}$ 是局部渐近稳定的; 当 $b>1$ 且 $a<a_0$ 时, 系统(3) 的平衡解 $\boldsymbol{u}$ 是不稳定的;

(ii) 当 $b>1$时, 点$(a_0, \boldsymbol{u})$ 是系统(3)的Hopf 分支点并且Hopf 分支的方向是亚临界的且分支解是轨道渐近稳定的.

1　扩散引起的不稳定性和扩散导致的Hopf 分支

在这一节里, 我们考虑带有齐次Neumann 边界条件的系统

$$\begin{cases} u_t - d_1\Delta u = 1-(b+1)u + bu^2 v, & (t,x)\in(0,\infty)\times\Omega, \\ v_t - d_2\Delta v = a^2(u-u^2 v), & (t,x)\in(0,\infty)\times\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & (t,x)\in(0,\infty)\times\partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

其中 $\Omega\subset R^n$ 是有光滑边界$\partial\Omega$的有界区域, ν是$\partial\Omega$的单位外法向量, 令$0=\mu_0<\mu_1<\mu_2<\mu_3<\cdots$是$-\Delta$在$\Omega$内带有齐次Neumann 边界条件的特征值, $E(\mu_i)$ 是$H^1(\Omega)$ 中相应 μ_i 的特征空间. 令$X=[H^1(\Omega)]^2$, $\left\{\phi_{ij}, j=1,\cdots,\dim E(\mu_i)\right\}$是 $E(\mu_i)$ 的一组正交基, 并且$X_{ij}=\left\{\boldsymbol{c}\phi_{ij} \mid \boldsymbol{c}\in R^2\right\}$. 则$X=\bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i$, 其中$X_i=\bigoplus_{j=1}^{\dim E(\mu_i)} X_{ij}$.

定理2　假定 $0<b\leqslant 1$ 或者 $b>1$ 且 $a>a_0$ 使得系统(3) 的平衡解 $\boldsymbol{u}$ 是局部渐近稳定的.

(A) 如果存在 $i\geqslant 1$, 使得

$$d_1 d_2\mu_i^2 + (a^2 d_1 + d_2 - d_2 b)\mu_i + a^2 < 0, \tag{6}$$

那么 $\boldsymbol{u}$ 是系统(5)的不稳定的平衡解.

(B) 如果

$$a^2d_1 + d_2 - bd_2 + 2a\sqrt{d_1d_2} > 0, \tag{7}$$

或者

$$d_1d_2\mu_1 + a^2d_1 + d_2 - bd_2 \geqslant 0 \tag{8}$$

成立,那么 $\boldsymbol{u}$ 是系统(5)的局部渐近稳定的平衡解.

注 1 显然对 $b > 1$, $a > a_0$ 和每一个固定的 μ_i, $i \geqslant 1$, 当 d_1 充分小且 d_2 充分大时, 条件(A)成立; 当 $0 < b < 1$ 时, 条件(B)成立.

定理 2 的证明 系统(5)在 $\boldsymbol{u}$ 的线性化为

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \boldsymbol{L}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \boldsymbol{D}\Delta\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \tag{9}$$

其中

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} b-1 & b \\ -a^2 & -a^2 \end{pmatrix}.$$

对每一个 $i \geqslant 1$, X_i 在算子 $\boldsymbol{L}$ 作用下是不变的, 并且 λ 是 $\boldsymbol{L}$ 在 X_i 上的一个特征值当且仅当它是矩阵

$$\boldsymbol{A}_i = -\mu_i\boldsymbol{D} + \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -d_1\mu_i + b - 1 & b \\ -a^2 & -\mu_i d_2 - a^2 \end{pmatrix}$$

的特征值. $\boldsymbol{A}_i$ 的特征多项式为

$$\phi_i(\lambda) = \lambda^2 - \lambda\mathrm{tr}\boldsymbol{A}_i + \det\boldsymbol{A}_i,$$

其中

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}_i = -d_1\mu_i - d_2\mu_i + b - 1 - a^2 < 0,$$

$$\det\boldsymbol{A}_i = d_1d_2\mu_i^2 + (a^2d_1 + d_2 - bd_2)\mu_i + a^2.$$

显然, 条件(A)蕴含着 $\phi_i(\lambda) = 0$ 至少有 1 个具有正实部的根. 因此 $\boldsymbol{u}$ 是系统(5)的不稳定的平衡解. 令

$$f(x) = d_1d_2x^2 + (a^2d_1 + d_2 - bd_2)x + a^2.$$

(i) 如果 $\Delta = (a^2d_1 + d_2 - bd_2)^2 - 4d_1d_2a^2 < 0$, 即 $|a^2d_1 + d_2 - bd_2| < 2a\sqrt{d_1d_2}$, 那么 $f(x) > 0$, $x \in \mathbf{R}$.

(ii) 如果 $\Delta \geqslant 0$, 那么 $f(x) = 0$ 的 2 个根 x_1、x_2 的乘积是正的. 当 $x_1, x_2 < 0$, 即 $a^2d_1 + d_2 - bd_2 \geqslant 2a\sqrt{d_1d_2}$ 时, $f(x) > 0$ 对所有的 $x \geqslant 0$ 都成立.

由(i)和(ii), 我们知道, 如果式(6)成立, 则对 $x \geqslant 0$, 有 $f(x) > 0$.

(iii) $f(x)$ 可以写成

$$f(x) = (d_1d_2x + a^2d_1 + d_2 - bd_2)x + a^2, \quad f(\mu_0) = f(0) = a^2 > 0.$$

当 $d_1d_2\mu_1 + a^2d_1 + d_2 - bd_2 \geqslant 0$ 时,

$$f(\mu_1) = (d_1d_2\mu_1 + a^2d_1 + d_2 - bd_2)\mu_1 + a^2 \geqslant a^2,$$

并且对所有的 $i \geqslant 2$, 我们有

$$f(\mu_i) = (d_1d_2\mu_i + a^2d_1 + d_2 - bd_2)\mu_i + a^2 \geqslant$$
$$(d_1d_2\mu_1 + a^2d_1 + d_2 - bd_2)\mu_i + a^2 \geqslant a^2.$$

从上面的分析我们知道, 如果条件(7)或者(8)成立, 我们有

$$\det\boldsymbol{A}_i = \mu_i^2d_1d_2 + (a^2d_1 + d_2 - bd_2)\mu_i + a^2 > 0.$$

因此对每一个 $i \geqslant 0$, $\phi_i(\lambda)=0$ 的2个根 $\lambda_{i,1}$、$\lambda_{i,2}$ 都有负实部. 下面, 我们证明存在一个不依赖于 i 的常数 $\delta>0$, 使得 $\mathrm{Re}\{\lambda_{i,1}\}, \mathrm{Re}\{\lambda_{i,2}\} \leqslant -\delta$ 对所有的 $i \geqslant 0$ 都成立. 令 $\lambda=\mu_i\xi$, 那么

$$\phi_i(\lambda)=\mu_i^2\xi^2-\mu_i\xi\mathrm{tr}\boldsymbol{A}_i+\det\boldsymbol{A}_i:=\Psi_i(\xi),$$

因为当 $i \to \infty$ 时, $\mu_i \to \infty$, 所以有

$$\lim_{i\to\infty}\Psi_i(\xi)/\mu_i^2=\xi^2+(d_1+d_2)\xi+d_1d_2.$$

显然 $\Psi_i(\xi)=0$ 的2个根 ξ_1、ξ_2 都有负实部. 类似文献[11] 中定理2的证明, 可以证明存在正常数 δ 使得 $\mathrm{Re}\{\lambda_{i,1}\}, \mathrm{Re}\{\lambda_{i,2}\} \leqslant -\delta$. 证毕.

定理3 假设 $b>1$, 并且对某个 $i \geqslant 1$, μ_i 是 $-\Delta$ 在 Ω 内带有齐次 Neumann 边界条件的简单特征值. 如果 d_1、d_2 满足

$$-(d_1+d_2)\mu_i+b-1>0$$

和

$$-d_1^2\mu_i^2+(bd_1-2d_1-bd_2)\mu_i+b-1>0,$$

那么存在 $a^*>0$, 使得点$(a^*, \boldsymbol{u})$ 是一个Hopf分支点, 并且这样的Hopf分支解具有下面的形式: $\boldsymbol{u}(x,t)=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{p}(x,t)$, 其中 $\boldsymbol{p}(x,t)$ 是关于 t 的非平凡的周期函数, 而且对任意固定的 t, $\boldsymbol{p}(t,x) \in X_i$.

注2 显然, 对某个 $i \geqslant 1$, 如果 μ_i 是算子 $-\Delta$ 在 Ω 内的带有齐次Neumann边界条件的简单特征值, 并且 d_1 和 d_2 充分小, 那么定理3的条件成立.

定理3的证明 因为 $-(d_1+d_2)\mu_i+b-1>0$, 所以存在唯一的 $a^*>0$ 使得 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}_i(a^*)=0$, 且当 $a<a^*$ 时, $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}_i(a)>0$; 当 $a>a^*$ 时, $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}_i(a)<0$.

$$\det\boldsymbol{A}_i(a^*)=\mu_i^2d_1d_2+(a^{*2}d_1+d_2-bd_2)\mu_i+a^{*2}=$$
$$-d_1^2\mu_i^2+(bd_1-2d_1-bd_2)\mu_i+b-1>0.$$

那么 $\phi_i(\lambda;\mu_i)=0$ 有一对复根: $\lambda_1=\alpha+\mathrm{i}\beta$, $\lambda_2=\alpha-\mathrm{i}\beta$, $\beta>0$, 并且

$$\alpha(a)=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\boldsymbol{A}_i(a)=\frac{1}{2}[-(d_1+d_2)\mu_i+b-1-a^2],$$

$$\beta(a)=\frac{1}{2}\sqrt{4\det\boldsymbol{A}_i(a)-[\mathrm{tr}\boldsymbol{A}_i(a)]^2}.$$

显然

$$\alpha(a^*)=0,\quad \alpha'(a^*)=-a_0<0,\quad \beta(a^*)>0.$$

从而得出 $\mathrm{i}\beta$ 是算子 $\boldsymbol{L}$ 在子空间 X_i 上的纯虚特征值, 因为 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}_i$ 关于 μ_i 是严格非增函数, 所以对 $j\neq i$, $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}_j\neq 0$. 由假设 μ_i 是简单的, 所以 $\mathrm{i}\beta$ 是算子 $\boldsymbol{L}$ 的简单特征值. 由Hopf分支定理[12-13] 可以得到系统(5) 在子空间 X_i 上从$(a^*, \boldsymbol{u})$ 处产生 Hopf 分支. 证毕.

当空间维数是1时, 对每一个 i, μ_i 都是简单的, 那么我们有下面的结论:

命题1 如果空间维数是1并且定理3的条件成立, 那么存在序列 $\{(d_{1i}, d_{2i})\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, 使得对每一个 $i \geqslant 1$, 偏微分系统(5) 当 $(d_1, d_2)=(d_{1i}, d_{2i})$ 时, 点$(a_i, \boldsymbol{u})$ 是Hopf分支点, 而且这样的Hopf分支解有下面的形式: $\boldsymbol{u}_i(x,t)=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{p}_i(x,t)$, 其中 $\boldsymbol{p}_i(x,t)$ 是关于 t 的非平凡的周期函数, 并且对任意固定的 t, $\boldsymbol{p}_i(t,x)\in X_i$.

注3 同于定理3的证明, 我们可以证明点 $(a_0, \boldsymbol{u})$ 是系统(5) 的Hopf分支点.

2 系统(5)的周期解的稳定性

我们考虑系统(5)的特殊情况: $\Omega=(0,\pi)$. 则系统(5)变为

$$\begin{cases} u_t-d_1u_{xx}=1-(b+1)u+bu^2v, & (t,x)\in(0,\infty)\times(0,\pi),\\ v_t-d_2v_{xx}=a^2(u-u^2v), & (t,x)\in(0,\infty)\times(0,\pi),\\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0, & t\in(0,\infty),\\ v_x(0,t)=v_x(\pi,t)=0, & t\in(0,\infty). \end{cases} \tag{10}$$

我们知道带有上面的无流边界条件的算子 $u\to-u_{xx}$ 有如下形式的特征值和特征函数:

$$\mu_0=0,\ \phi_0=\sqrt{\frac{1}{\pi}},\ \mu_i=i^2,\ \phi_i(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(ix),\qquad i=1,2,\cdots.$$

定理 4 当 $b>1$ 时, $(a_0,\boldsymbol{u})$ 是系统(10)的 Hopf 分支点;如果条件(6)对某个 $\mu_i=i^2$ 成立, 那么 Hopf 分支的方向是亚临界的并且 Hopf 分支解是不稳定的; 如果条件(7)或者(8)成立, 那么 Hopf 分支的方向是亚临界的并且 Hopf 分支解是轨道渐近稳定的.

证明 我们只需证明定理的最后部分. 下面用规范形理论和中心流行定理[12]来研究 Hopf 分支解的稳定性. 令

$$\boldsymbol{L}_1\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\boldsymbol{D}\begin{pmatrix}u_{xx}\\v_{xx}\end{pmatrix}+\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},$$

设 $\boldsymbol{L}_1^*$ 是算子 $\boldsymbol{L}_1$ 的共轭算子, 则

$$\boldsymbol{L}_1^*=\boldsymbol{D}\begin{pmatrix}u_{xx}\\v_{xx}\end{pmatrix}+\boldsymbol{A}^*\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}, \tag{11}$$

其中

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}b-1 & -a^2\\ b & -a^2\end{pmatrix}.$$

我们在区域$\{(u,v)\in H^2[(0,\pi)]\times H^2[(0,\pi)]\mid u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0, v_x(0,t)=v_x(\pi,t)=0\}$上讨论 Hopf 分支解的稳定性, 其中 $H^2[(0,\pi)]$ 是标准的 Sobolev 空间, 令

$$\boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{1-b}{b}+\dfrac{\omega_0}{b}\mathrm{i}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{q}^*=\frac{b}{2\omega_0\pi}\begin{pmatrix}\dfrac{\omega_0}{b}+\dfrac{1-b}{b}\mathrm{i}\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

容易看出 $\langle\boldsymbol{L}_1^*\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{b}\rangle$ 对任意的 $\boldsymbol{a}\in D\boldsymbol{L}_1^*$, $\boldsymbol{b}\in D\boldsymbol{L}_1$ 都成立, 并且 $\boldsymbol{L}_1^*\boldsymbol{q}^*=-\mathrm{i}\omega_0\boldsymbol{q}^*$, $\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{q}=\mathrm{i}\omega_0\boldsymbol{q}$, $\langle\boldsymbol{q}^*,\boldsymbol{q}\rangle=1$, $\langle\boldsymbol{q}^*,\boldsymbol{q}\rangle=0$. 这里$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\int_0^\pi\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\,\mathrm{d}x$ 表示$L^2[(0,\pi)]\times L^2[(0,\pi)]$ 中的内积. 系统(10)可以写成

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\end{pmatrix}=\boldsymbol{L}_1\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix},$$

其中

$$f_1(u,v,a)=b(u^2v+2uv+u^2),\ f_2(u,v,a)=-a^2(u^2v+2uv+u^2).$$

根据文献[12], 记

$$(u,v)^{\mathrm{T}}=z\boldsymbol{q}+\overline{z\boldsymbol{q}}+w;\ z=\langle\boldsymbol{q}^*,(u,v)^{\mathrm{T}}\rangle,$$

那么

$$u = z + z + w_1,\quad v = z\left(\frac{1-b}{b} + \frac{\omega_0}{b}\mathrm{i}\right) + z\left(\frac{1-b}{b} - \frac{\omega_0}{b}\mathrm{i}\right) + w_2.$$

系统(10)关于坐标$(z、w)$的方程为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}\,\omega_0 z + \langle \boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{f}\rangle, \tag{12}$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{L}_1 w + [\boldsymbol{f} - \langle \boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{f}\rangle \boldsymbol{q} - \langle \boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{f}\rangle \boldsymbol{q}], \tag{13}$$

其中$\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)^{\mathrm{T}}$.

直接计算得到

$$\langle \boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{f}\rangle = \frac{b}{2\omega_0}\left[\frac{\omega_0}{b}f_1 - \mathrm{i}\,\frac{b-1}{b}f_1 - \mathrm{i}f_2\right] = \frac{f_1}{2},$$

$$\langle \boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{f}\rangle = \frac{b}{2\omega_0}\left[\frac{\omega_0}{b}f_1 + \mathrm{i}\,\frac{b-1}{b}f_1 + \mathrm{i}f_2\right] = \frac{f_1}{2},$$

$$\langle \boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{f}\rangle \boldsymbol{q} = \frac{b}{2\omega_0}\begin{pmatrix} \dfrac{\omega_0}{b}f_1 \\ \dfrac{\omega_0}{b}\left(\dfrac{1-b}{b} + \mathrm{i}\,\dfrac{\omega_0}{b}\right)f_1 \end{pmatrix},$$

$$\langle \boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{f}\rangle \boldsymbol{q} = \frac{b}{2\omega_0}\begin{pmatrix} \dfrac{\omega_0}{b}f_1 \\ \dfrac{\omega_0}{b}\left(\dfrac{1-b}{b} - \mathrm{i}\,\dfrac{\omega_0}{b}\right)f_1 \end{pmatrix},$$

$$\langle \boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{f}\rangle \boldsymbol{q} + \langle \boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{f}\rangle \boldsymbol{q} = \frac{b}{2\omega_0}\begin{pmatrix} \dfrac{2\omega_0}{b}f_1 \\ \dfrac{\omega_0}{b}\left(\dfrac{2(1-b)}{b}\right)f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{H}(z, z, w) = \boldsymbol{f} - \langle \boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{f}\rangle \boldsymbol{q} - \langle \boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{f}\rangle \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

记

$$w = (w_{20}/2)z^2 + w_{11}z\,z + (w_{02}/2)z^2 + \cdots. \tag{14}$$

在原点附近的中心流形上

$$w'(z, z) = w_z z' + w_z z'.$$

用上面的展开式(14)代替w_z和w_z,用方程(12)代替z'和z',我们得到w'的展开式. 这个结果和方程(13)比较,得到

$$(2\mathrm{i}\,\omega_0 - \boldsymbol{L}_1)\,\omega_{20} = 0,\quad (-\boldsymbol{L}_1)\,\omega_{11} = 0,\quad \omega_{02} = w_{20}.$$

于是有 $\omega_{20} = \omega_{02} = \omega_{11} = 0$.

因此有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}\,\omega_0 z + \frac{1}{2}g_{20}z^2 + g_{11}z\,z + \frac{1}{2}g_{02}z^2 + \frac{1}{2}g_{21}z^2 z + \cdots,$$

这里

$$g_{20} = \frac{1}{2}[B_{20} + 2B_{11}q_2],\quad g_{11} = \frac{1}{2}[B_{20} + B_{11}q_2 + B_{11}q_2],$$

$$g_{02} = \frac{1}{2}[B_{20} + 2B_{11}q_2],\quad g_{21} = \frac{1}{2}[B_{30} + B_{21}q_2 + 2B_{21}q_2],$$

其中

$$B_{20}=\frac{\partial^2 f_1}{\partial u^2}(0,0)=2b,\quad B_{11}=\frac{\partial^2 f_1}{\partial u\partial v}(0,0)=2b,$$

$$B_{30}=\frac{\partial^3 f_1}{\partial u^3}(0,0)=0,\quad B_{21}=\frac{\partial^3 f_1}{\partial u^2\partial v}(0,0)=2b,$$

$$q_2=\tau+\mathrm{i}\rho=\frac{1-b}{b}+\mathrm{i}\frac{\omega_0}{b}.$$

由文献[12],

$$c_1(0)=\frac{\mathrm{i}}{2\omega_0}\left(g_{20}g_{11}-2|g_{11}|^2-\frac{1}{3}|g_{02}|^2\right)+\frac{g_{21}}{2},$$

所以

$$\mathrm{Re}c_1(0)=\mathrm{Re}\left\{\frac{\mathrm{i}}{2\omega_0}\left(g_{20}g_{11}-2|g_{11}|^2-\frac{1}{3}|g_{02}|^2\right)+\frac{g_{21}}{2}\right\}=$$
$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\mathrm{i}}{2\omega_0}g_{20}g_{11}+\frac{g_{21}}{2}\right\}.$$

注意到

$$g_{20}g_{11}=\frac{1}{4}(B_{20}+2B_{11}\tau)^2+\frac{1}{2}B_{11}\rho(B_{20}+2B_{11}\tau)\mathrm{i},$$

于是得到

$$\mathrm{Re}c_1(0)=-\frac{1}{4\omega_0}B_{11}\rho(B_{20}+2B_{11}\tau)+\frac{3}{4}B_{21}\tau=-\frac{1}{2}(b+1)<0.$$

如果 $\boldsymbol{u}$ 是系统(10)的不稳定的平衡解,但是对系统(3)是稳定的,那么 Hopf 分支解也是不稳定的. 因此,如果条件(6)对某个 $\mu_i=i^2$ 成立,则系统(10)的平衡解 $\boldsymbol{u}$ 是不稳定的,所以 Hopf 分支解是不稳定的. 如果条件(7)或者(8)成立, $\boldsymbol{u}$ 是系统(10)局部渐近稳定的平衡解,由上面的分析可知 Hopf 分支解是稳定的. 证毕.

致谢　感谢审稿人的建议.

[参 考 文 献]

[1] Erneux T, Reiss E. Brusselator isolas[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1983, **43**(6): 1240-1246.

[2] Nicolis G. Patterns of spatio-temporal organization in chemical and biochemical kinetics[J]. SIAM-AMS Proc, 1974, **8**(1): 33-58.

[3] Prigogene I, Lefever R. Symmetry breaking instabilities in dissipative systems Ⅱ[J]. The Journal of Chemical Physics, 1968, **48**(4): 1665-1700.

[4] Brown K J, Davidson F A. Global bifurcation in the Brusselator system[J]. Nonlinear Analysis, 1995, **24**(12): 1713-1725.

[5] Callahan T K, Knobloch E. Pattern formation in three-dimensional reaction-diffusion systems[J]. Physica D, 1999, **132**(3): 339-362.

[6] Rabinowitz P. Some global results for nonlinear eigenvalue problems[J]. Journal of Functional Analysis, 1971, **7**(3): 487-513.

[7] Peng R, Wang M X. Pattern formation in the Brusselator system[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2005, **309**(1): 151-166.

[8] Yi F Q, Wei J J, Shi J P. Diffusion-driven instability and bifurcation in the Lengyel-Epstein system [J]. Nonlinear Analysis, 2008, **9**(8): 1038-1051.

[9] Wang M X. Stability and Hopf bifurcation for a prey-predator model with prey-stage structure and diffusion[J]. Mathematical Biosciences, 2008, **212**(2): 149-160.

[10] 陆启韶. 常微分方程的定性分析和分叉[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1989.

[11] Wang M X. Stationary patterns for a prey-predator model with prey-dependent and ratio-dependent functional responses and diffusion[J]. Physica D, 2004, **196**(1): 172-192.

[12] Hassard B D, Kazarinoff N D, Wan Y H. Theory and Application of Hopf Bifurcation [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.

[13] Crandall Michael G, Rabinowitz Paul H. The Hopf bifurcation theorem in infinite dimensions[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1977, **67**(1): 53-72.

Diffusion-Driven Instability and Hopf Bifurcation in the Brusselator System

LI Bo[1,2], WANG Ming-xin[1]

(1. Department of Mathematics, Southeast University, Nanjing 210018, P. R. China;

2. School of Mathematical Science, Xuzhou Normal University, Xuzhou, Jiangsu 221116, P. R. China)

Abstract: The Hopf bifurcation for the Brusselator ODE model and the corresponding PDE model are investigated by using the Hopf bifurcation theorem. The stability of the Hopf bifurcation periodic solution was discussed by applying the normal form theory and the center manifold theorem. When parameters satisfy some conditions, the spatial homogenous equilibrium solution and the spatial homogenous periodic solution become unstable. The results show that if parameters are properly chosen, Hopf bifurcation does not occur for the ODE system, but occurs for the PDE system.

Key words: Brusselator system; Hopf bifurcation; stability; diffusion-driven Hopf bifurcation