

无限压电体内共线周期裂纹间的相互作用^{*}

崔之健^{1,2}, 胡洪平², 杨 峰²

(1. 西安石油大学 石油工程学院, 西安 710065;

2. 华中科技大学 力学系, 武汉 430074)

(程昌钧推荐)

摘要: 研究了无限压电体内共线周期裂纹间的相互作用的问题, 并且考虑了裂纹尖端的饱和条带作用. 应用 Stroh 理论和保角变换方法, 得到了共线裂纹的一般周期解. 对应力强度因子和饱和条带尺寸进行了理论推导, 详细分析了它们与周期长和半裂纹长的比值 h/l 之间的关系. 数值结果表明: 1) 当 h/l 大于 4.0 时, 裂纹之间的相互作用对应力强度因子影响较小, 无限压电体内周期裂纹和单裂纹的值几乎相等. 这表明当 h 大于 $4.0l$ 时, 建立裂纹扩展判据时可以近似忽略裂纹之间的相互作用; 2) 周期裂纹的饱和条带尺寸趋近于单裂纹值的速度, 取决于无穷远处的电载荷, 通常无穷远处的电载荷越大, 趋近速度越慢.

关键词: 共线周期裂纹; 应力强度因子; 饱和条带; 周期长和半裂纹长比值; 趋近速度

中图分类号: O346.1 文献标识码: A

引 言

在过去的十几年中, 许多学者研究了弹性体内的周期性微观缺陷问题^[1-3]. 其中, Hausler 等人^[4] 研究各向同性材料中的共线周期性缺陷(夹杂、孔洞、裂纹)问题, Zhou 和 Wang^[5] 研究了各向异性材料中的共线裂纹问题, 以及 Hu 等人^[6-9] 研究了共线周期性缺陷问题. 这些研究表明, 缺陷附近的应力分布非常复杂, 但对工程运用又是重要和必需的. 对压电介质, 由于在裂纹尖端处本构方程的复杂性和复杂的电场效应, 还没有得到共线周期性缺陷问题的周期性通解. 在过去的 30 年里, Stroh 理论^[6-7] 常用于分析二维的弹性问题^[10-16]. Ting 等人^[12-13] 研究了椭圆夹杂问题. Gao 等人^[14-15] 和 Hao^[16] 研究了压电材料中的周期裂纹问题, 但没有考虑裂纹两尖端的电场屈服效应. 这些论文的研究结果是应力分析必需的, 同时也使 Stroh 理论变得更加通用和强大. 本文将讨论在各向异性介质中的一般共线周期裂纹问题. 由于具有周期性, 所以只需要讨论 1 个周期内的裂纹问题. 应用保角变换方法, 基本方程可以被转换为 Riemann-Hilbert 边值问题. 因此就容易通过 Stroh 理论得到周期性通解, 相应应力强度因子, 裂纹张开位移, 以及应变能释放率.

* 收稿日期: 2007-07-09; 修订日期: 2008-06-11

基金项目: 中国博士后科学基金资助项目(20070410944)

作者简介: 崔之健(1963—), 男, 安徽芜湖人, 副教授, 博士;

胡洪平(1973—), 男, 江西丰城人, 博士(联系人. Tel: + 86-27-87559409; E-mail: hhp0066@163.com).

1 在无限大压电体中共线周期性排列的裂纹

如图 1 所示, 压电体内的周期性裂纹 $L_k (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 位于 x_1 轴上, 无穷远处受 $\sigma_{22}^\infty, D_2^\infty$ 作用. 由 Zhang 和 Gao^[17] 关于压电裂纹的饱和条带模型, 考虑 2 条相同的电屈服条带 (从 $x_1 = \pm l$ 到 $x_1 = \pm a$) 位于 L_0 裂纹两端, 因此裂纹表面的边界条件如下:

$$\begin{cases} \sigma_{22} = 0, \sigma_{21} = 0, \sigma_{23} = 0, D_2 = 0, & |x_1| \leq l, \\ (u_i^+, \sigma_{21}^+, \sigma_{22}^+, \sigma_{23}^+) = (u_i^-, \sigma_{21}^-, \sigma_{22}^-, \sigma_{23}^-), D_2 = D_s, & l \leq |x_1| \leq a, \end{cases} \quad (1)$$

其中上标“+”和“-”分别表示 L_0 的上下面, D_s 为屈服电位移. h 表示周期长度. 不失一般性, 将原点设为 L_0 的中点, 并且令 L_0 的长度为 $2l$ ($l < a < h/2$).

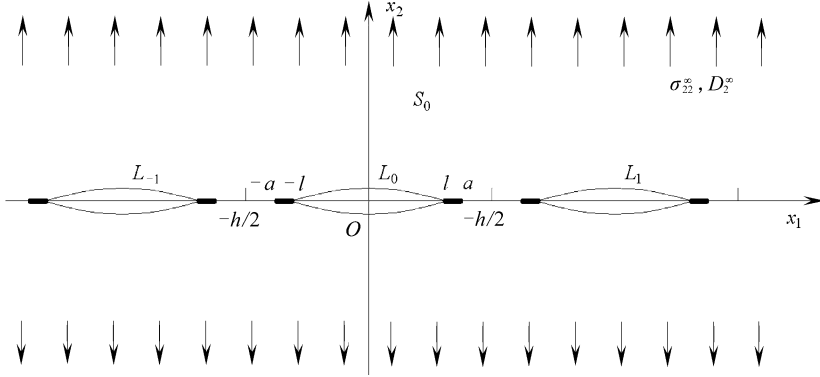


图 1 无限压电体内的共线周期裂纹

基于 Stroh 原理的关于二维压电理论(见 Yang 的文献[18], Wang 的文献[19], Hu 的文献[6-9]), 二维压电体内的共线周期裂纹问题的解如下:

$$\begin{cases} \mathbf{U} = (\mathbf{u}^T, \phi)^T = (u_1, u_2, u_3, \phi)^T = 2\text{Re}\{\mathbf{A}\mathbf{f}(z)\}, \\ \Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)^T = 2\text{Re}\{\mathbf{B}\mathbf{f}(z)\}, \\ E_i = -\varphi_{,i}; \sigma_{1i} = -\varphi_{i,2}, \sigma_{2i} = \varphi_{i,1}, \quad i = 1, 2, 3, \\ D_1 = -\varphi_{4,2}, D_2 = \varphi_{4,1}, \\ \mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4), \mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4), \\ \mathbf{f}(z) = \text{diag}\{f_1(z_1), f_2(z_2), f_3(z_3), f_4(z_4)\}, \\ z = x_1 + ix_2, i = \sqrt{-1}, z_\alpha = x_1 + p_\alpha x_2 \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4), \end{cases} \quad (2)$$

其中, u_i 表示机械位移, σ_j 表示应力, E_i 和 D_i 表示电场和电位移; ϕ 为电势能, φ_α 为广义应力势能, 上标 T 表示矩阵的转置, 逗号后面的数值表示在相应坐标下的偏微分, Re 表示复数的实部; $f_\alpha(z_\alpha)$ 是通过已知边界条件求得的函数; p_α 是用材料常数表示的正虚部复特征值, 其中材料常数包括弹性常数 c_{ijkl} , 介电常数 ϵ_j , 压电常数 e_{ihl} ; \mathbf{a}_α 和 \mathbf{b}_α 为相应特征值 p_α 对应的特征向量组. 应注意的是, 本文的讨论中假设特征向量 p_α 不相等. 另外, 重复的拉丁字母后缀服从 1 到 3 相加的求和准则, 而关于重复希腊字母后缀的求和将会给出求和说明.

显然, 在均匀力场作用下的无裂纹二维压电体有

$$\sigma_{22} = \sigma_{22}^\infty, D_2^0 = D_2^\infty, \text{其它量均为 } 0. \quad (3)$$

由裂纹而产生的非均匀场应该满足

$$\begin{cases} \mathbf{t}^+(\xi) = \mathbf{t}^-(\xi) = -\mathbf{T}, & \text{在 } L_k \text{ 上,} \\ \mathbf{t}(\xi) = [\mathbf{t}_2(\xi), D_2(\xi)], \quad \mathbf{t}_2(\xi) = [\sigma_{21}(\xi), \sigma_{22}(\xi), \sigma_{23}(\xi)]^T, \\ \mathbf{T} = \{0, \sigma_{22}^\infty, 0, D_2^\infty\}^T, \end{cases} \quad (4)$$

在电屈服条带处有

$$\begin{cases} (\mathbf{u}^+, \mathbf{t}_2^+) = (\mathbf{u}^-, \mathbf{t}_2^-), \\ D_2 = D_s - D_2^\infty, \end{cases} \quad \text{在 } L_k \text{ 的屈服带上.} \quad (5)$$

以下将只需要讨论由裂纹引起的非均匀解, 并且所得的解应该在无穷远处趋近于 0.

由于问题的周期性, 只需详细分析图 2 中的一个带状区域 $|\operatorname{Re}(z)| \leq h/2$. 设内部区域的一个周期为 S_k , 而整个区域 S 则是对 S_k 求和, 即 $S = \sum_{k=0, \pm 1, \pm 2, \dots} S_k$.

如果 $f'(z)$ 为 S 区域上的解, 则 $f'(z)$ 在 S_0 区域上的映射 $f'_0(z)$ 将是分段全纯并连续到 $x_1 = \pm h/2$, 因此满足以下条件:

$$\begin{cases} \mathbf{t}^+(z) = \mathbf{t}^-(z) = -\mathbf{T}, & \text{在 } x_2 = 0, |x_1| < l \text{ 上,} \\ [\mathbf{u}^+(z), \mathbf{t}_2^+(z)] = [\mathbf{u}^-(z), \mathbf{t}_2^-(z)], \quad D_2(z) = D_s - D_2^\infty, & \text{在 } x_2 = 0, l \leq |x_1| \leq a \text{ 上,} \\ f'_a(z_a) |_{x_1=h/2} = f'_a(z_a) |_{x_1=-h/2}, \quad |x_2| < \infty, \\ f'_a(z_a) \rightarrow 0, & \text{当 } z \rightarrow \pm i\infty. \end{cases} \quad (6)$$

另外, 如果 $f'_0(z)$ 为 S_0 区域上的解, 易由一个周期 h 内的解 $f'_0(z)$ 扩展求得整个 S 域内的解 $f'(z)$. 因此只需利用式(6)求得解 $f'_0(z)$.

显然, 各向同性映射函数

$$\eta = \tan(\pi z/h) \quad (7)$$

可以从区域 $|\operatorname{Re}(z)| \leq h/2$ 映射到区域 Σ_0 内 η 平面的 $[-i, i]$ 区域. 而且, 点 $z = 0, \pm h/2, +i\infty$ 和 $-i\infty$ 分别映射到 $\eta = 0, \infty, i$ 和 $-i$ 上. 同时, $x_1 = \pm h/2$ 两条直线映射为相应的新裂纹左、右面, 则 L_0 映射到新裂纹 Γ , Γ 在 ξ 轴上的 $[-\gamma, \gamma]$ 范围内, 这里 $\gamma = \tan(\pi l/h)$, $\eta = \xi + i\zeta$.

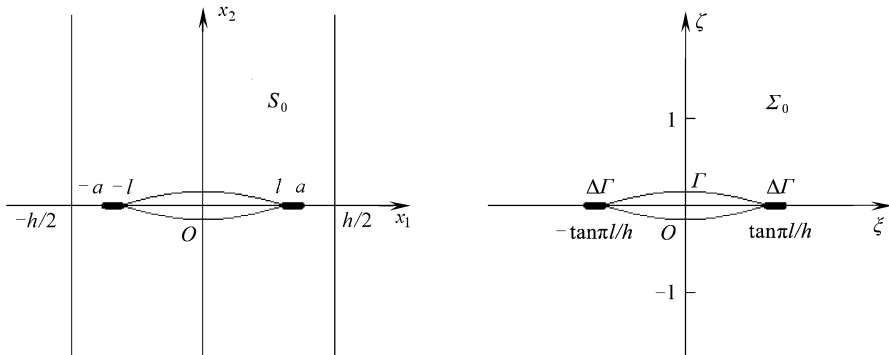


图 2 一个周期的区域以及相应的映射区域

对于压电平面问题, 除了物理变量 z 外, 还有 4 个 Stroh 变量, $z_\alpha = x_1 + p_\alpha x_2$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4$), 因此还需确定其它映射函数:

$$\eta_\alpha = \tan(\pi z_\alpha/h). \quad (8)$$

假定通过上面的映射, 分别得到以下的映射: $f'_0(z)$ 被映射到 $f^*(\eta)$, $f_\alpha(z_\alpha)$ 被映射到

$f_{\alpha^*}(\eta)$, L_0 和 ΔL 上的点映射到 Γ 和 $\Delta\Gamma$ 上的点. 所以 $f_*(\eta)$ 在 Σ_0 域内将是分段全纯的, 式 (6) 变为

$$\begin{cases} t^*(\eta) = \bar{t}^*(\eta) = -T, & \text{在 } \zeta = 0, |\xi| < l^* \text{ 上,} \\ [u^*(\eta), t^*(\eta)] = [u^*(\eta), \bar{t}^*(\eta)], \quad D_{2^*}(\eta) = D_s - D_2^\infty, \\ & \text{在 } \zeta = 0, l^* \leq |\xi| \leq a^* \text{ 上,} \\ f_{\alpha^*}'(\eta) \rightarrow 0, & \text{当 } \eta \rightarrow \pm i. \end{cases} \quad (9)$$

显然, $t^*(\eta)$ 在整个 ξ 轴上连续, 包括裂纹区、屈服条带区和剩余部分. 于是由解析函数的边值理论可得到

$$h(\eta) = Bf_{\alpha^*}'(\eta) = Bf_{\alpha^*}'(\eta), \quad (10)$$

其中 $h(\eta)$ 是复势向量, 并且满足裂纹边界条件:

$$h^+(\xi) + h^-(\xi) = -T, \quad |\xi| \leq l^*. \quad (11)$$

广义位移 U 在 ξ 轴上的跳变定义为

$$d^*(\xi) = U^*(\xi 0^+) - U^*(\xi 0^-), \quad (12)$$

再利用式(2)和式(10), 可得到

$$id^*(\xi) = HBf_{\alpha^*}'^+(\xi) - HBf_{\alpha^*}'^-(\xi), \quad H = 2\text{Re}(iAB^{-1}). \quad (13)$$

根据在裂纹附近力电位移的连续性条件, 函数

$$g(\eta) = HBf_{\alpha^*}'(\eta) \quad (14)$$

将在整个 η 平面上是可解析的(除了 Γ 上的 $g_{\nu}(\eta_{\nu})$ ($\nu = 1, 2, 3$) 和在 $\Gamma + \Delta\Gamma$ 上的 $g_4(\eta)$). 由式(10)和式(14)可得

$$h(\eta) = \Lambda g(\eta), \quad \Lambda = H^{-1}. \quad (15)$$

考虑到裂纹线 $\Gamma + \Delta\Gamma$ 的 $g_4(\eta_4)$ 不同于裂纹线 Γ 上的 $g_{\nu}(\eta_{\nu})$ ($\nu = 1, 2, 3$), 所以首先通过式(15)消去 $g_4(\eta_4)$, 确定 $g_{\nu}(\eta_{\nu})$ ($\nu = 1, 2, 3$),

$$\Lambda_{ik}^* [g_k^+(\xi) + g_k^-(\xi)] = -T_i^* \quad (i, k = 1, 2, 3), \quad |\xi| \leq l^*, \quad (16)$$

这里 Λ_{ik}^* 由材料参数构成, T_i^* 由式(4)中的 T_{α} ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) 组成, 其中

$$\Lambda_{ik}^* = \Lambda_{ik} - \Lambda_{i4} \Lambda_{4k} / \Lambda_{44}, \quad T_i^* = T_i - T_4 \Lambda_{i4} / \Lambda_{44}. \quad (17)$$

通过与 Hwu 等人^[12] 和 Hu 等人^[8] 类似的求解过程, 利用式(16)得到 $g_{\nu}(\eta_{\nu})$ ($\nu = 1, 2, 3$),

$$\begin{cases} g_{\nu}(\eta_{\nu}) = (\Lambda_{i\nu}^*)^{-1} T_i^* \theta_0(z_{\nu}), \\ \theta_0'(z_{\nu}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\vartheta_4(z_{\nu})}{\sqrt{\vartheta_4^2(z_{\nu}) - \vartheta_4^2(l)}} - 1 \right], \quad \vartheta_4(z_{\nu}) = \sin \frac{\pi z_{\nu}}{h}. \end{cases} \quad (18)$$

除了裂纹线 Γ , 上式在整个 η_{α} 平面上是解析的.

基于上面所求 $g_{\nu}(\eta_{\nu})$ ($\nu = 1, 2, 3$) 的解, 可以得到 $\Gamma + \Delta\Gamma$ 上 $g_4(\eta_4)$ 的边界条件:

$$\begin{cases} g_4^+(\xi) + g_4^-(\xi) = - \left\{ \Lambda_{4k} [g_k^+(\xi) + g_k^-(\xi)] + T_4 \right\} / \Lambda_{44}, & |\xi| \leq l^*, \\ g_4^+(\xi) + g_4^-(\xi) = - \left\{ \Lambda_{4k} [g_k^+(\xi) + g_k^-(\xi)] + T_4 \right\} / \Lambda_{44} + D_s / \Lambda_{44}, \\ & l^* \leq |\xi| \leq a^*. \end{cases} \quad (19)$$

考虑到式(19)与式(16)相似, 通过参考 Wang 的研究^[19], 由式(18)得

$$\begin{cases} g_4(\eta_4) = [-\Lambda_{4k} g_k(\eta_4) + T_4 f_{\alpha}(\eta_4)] / \Lambda_{44} + D_s g_0(\eta_4) / \Lambda_{44}, \\ f_{\alpha}'(\eta_4) = \frac{1}{2} \left[\frac{\vartheta_4(z_{\nu})}{\sqrt{\vartheta_4^2(z_{\nu}) - \vartheta_4^2(a)}} - 1 \right], \\ g_0(\eta_4) = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2i} \omega(x_1) - \frac{\vartheta_4(z_{\nu})}{\sqrt{\vartheta_4^2(z_{\nu}) - \vartheta_4^2(a)}} \arccos \left[\frac{\eta_4(l)}{\eta_4(a)} \right] \right\}; \end{cases} \quad (20)$$

$$\omega(x_1) = \ln \left[\left(\frac{\eta_4(x_1)}{\eta_4(a)} \frac{\sqrt{\eta_4^2(a) - \eta_4^2(l)}}{\sqrt{\eta_4^2(x_1) - \eta_4^2(a)}} + i \right) \left| \left(\frac{\eta_4(x_1)}{\eta_4(a)} \frac{\sqrt{\eta_4^2(a) - \eta_4^2(l)}}{\sqrt{\eta_4^2(x_1) - \eta_4^2(a)}} - i \right) \right. \right]. \quad (21)$$

容易证明

$$\begin{cases} g_0^+(\xi) + g_0^-(\xi) = 0, & |\xi| \leq l^*, \\ g_0^+(\xi) + g_0^-(\xi) = 1, & l^* \leq |\xi| \leq a^*. \end{cases} \quad (22)$$

沿 ξ 轴的广义应力张量 $t^*(\xi)$ 和电位移 D_2 如下:

$$\begin{cases} t^*(\xi) = \Lambda g^+(\xi) + \Lambda g^-(\xi), & |\xi| > a^*, \\ D_2^*(\xi) = \left\{ D_2^\infty - \frac{2}{\pi} D_s \arccos \left[\frac{\eta_4(l)}{\eta_4(a)} \right] \right\} \frac{\vartheta_4(x_1)}{\sqrt{\vartheta_4^2(x_1) - \vartheta_4^2(a)}} + \\ D_s \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2i} \omega(x_1) \right\}, & |\xi| > a^*. \end{cases} \quad (23)$$

由于电位移 D_2 在 $\xi \rightarrow a^*$ 时应该为有限值, 所以 D_2 的奇异项系数在 $\xi \rightarrow a^*$ 时应该为 0, 运用该结论可以得到饱和条带尺寸 a^* ,

$$\frac{l}{a} = \frac{1}{\pi} \frac{h}{l} \arctan \left[\tan \left(\frac{\pi l}{h} \right) \cos \left(\frac{\pi D_2^\infty}{2D_s} \right) \right]. \quad (24)$$

通过式(24)得: 1) 当 $l \ll h/2$, $a/l = \cos(\pi D_2^\infty / 2D_s)$; 2) 当 $l \rightarrow h/2$, $a \rightarrow h/2$, 这两者和 Wang 对无限大压电体中单一裂纹研究结论一致.

因此由式(10)、(14)、(18)和(20)可求得该问题的解. 通过式(23)的第1式, 可以得到二维无限压电体中共线周期性裂纹的应力强度因子 ($K_{II}^p, K_I^p, K_{III}^p$) 的解

$$\begin{cases} K_{II}^p = - \left(\frac{h}{\pi l} \tan \frac{\pi l}{h} \right)^{1/2} \sqrt{\pi l} \frac{\Lambda_{14}}{\Lambda_{44}} D_2^\infty, \\ K_I^p = \left(\frac{h}{\pi l} \tan \frac{\pi l}{h} \right)^{1/2} \sqrt{\pi l} \left(\sigma_{22}^\infty - \frac{\Lambda_{24}}{\Lambda_{44}} D_2^\infty \right), \\ K_{III}^p = - \left(\frac{h}{\pi l} \tan \frac{\pi l}{h} \right)^{1/2} \sqrt{\pi l} \frac{\Lambda_{34}}{\Lambda_{44}} D_2^\infty. \end{cases} \quad (25)$$

通过与二维无限压电体中单一裂纹的应力强度因子 ($K_{II}^s, K_I^s, K_{III}^s$) 的比较得到

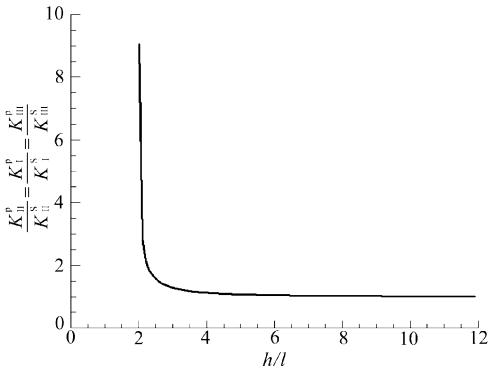
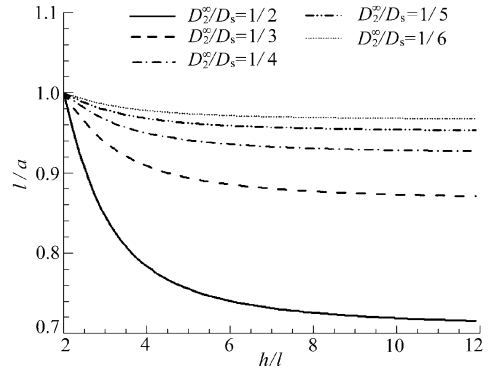
$$\frac{K_{II}^p}{K_{II}^s} = \frac{K_I^p}{K_I^s} = \frac{K_{III}^p}{K_{III}^s} = \left(\frac{h}{\pi l} \tan \frac{\pi l}{h} \right)^{1/2}. \quad (26)$$

显然, 当 $2l/h \rightarrow 0$ 时, 两种情况(单一裂纹和周期裂纹)的应力强度因子是相等的, 这也表明当 $2l \ll h$ 时, 裂纹之间的相互作用很弱; 当 $2l/h \rightarrow 1$, $K_{II}^p/K_{II}^s = K_I^p/K_I^s = K_{III}^p/K_{III}^s \rightarrow \infty$, 这表明裂纹之间有很强的相互作用.

2 数值结果分析

为了阐明裂纹之间的相互作用, 用两个图显示: 图3为应力强度因子随 h/l 的变化, 图4为饱和条带尺寸随 h/l 的变化. 由图3得, 当 $h/l > 4.0$ 时应力强度因子基本上和无限压电体中单一裂纹的应力强度因子相等, 不受无穷远处的力电载荷的影响. 这一结论也意味着, 在建立裂纹扩展准则时, 如果裂纹间距离满足 $h > 4.0l$ 时, 就可以忽略裂纹间相互作用对裂纹扩展所产生的影响.

图4显示的是, 在无穷远处不同的电载荷的作用下饱和条带尺寸随 h/l 的变化规律. 显

图3 应力强度因子随 h/l 的变化图4 不同电载荷 D_2^∞/D_s 的作用下饱和条带尺寸随 h/l 的变化

然, 周期式裂纹的饱和条带尺寸趋近于单裂纹的饱和条带尺寸的趋近速度, 取决于无穷远处的电载荷 D_2^∞ , 通常 D_2^∞ 越大, 趋近速度越慢. 以上现象可以理解为, D_2^∞ 越大, 饱和条带和周期性边界之间的相互作用也越大.

3 结 论

给出了无限压电体中共线周期性裂纹的力电场. 得到了相应的应力强度因子和饱和条带尺寸的解析解. 研究了周期尺寸对应力强度因子和裂纹的饱和条带尺寸的影响. 数值结果显示, 当周期尺寸大于 4 倍的饱和条带尺寸时, 可以忽略裂纹间相互作用对裂纹扩展的影响. 与弹性体不同的是, 当无穷远处的电载荷给定的情况下, 压电介质中的应力强度因子取决于材料常数. 所得到的结论不仅适用于面内变形、面外变形情况, 而且也适用于面内和面外耦合变形情况. 本文建立的研究模型有益于理解和建立周期性裂纹的判定准则.

[参 考 文 献]

- [1] Chen Y Z, Lin X Y, Wang Z X. Solution of periodic group crack problems by using the Fredholm integral equation approach[J]. Acta Mech, 2005, **178**(1): 41-51.
- [2] Danicki E. Periodic crack-model of comb transducers: efficiency and optimization[J]. Archives of Acoustics, 2000, **25**(4): 487-508.
- [3] Chen Y Z, Lin X Y. Periodic group crack problems in an infinite plate[J]. Internat J Solids and Structure, 2005, **42**(9/10): 2837-2850.
- [4] Hausler C, Gao C F, Balke H. Collinear and periodic electrode-ceramic interfacial cracks in piezo-electric bimetals[J]. Journal of Applied Mechanics, 2004, **71**(4): 486-492.
- [5] Zhou Z G, Wang B. Investigation of the interaction of two collinear cracks in anisotropic elasticity materials by means of the nonlocal theory[J]. Internat J Engrg Sci, 2005, **43**(13/14): 1107-1120.
- [6] Hu Y T, Zhao X H. Collinear periodic cracks in an anisotropic medium[J]. Internat J Fracture, 1995, **76**(3): 207-219.
- [7] Hu Y T, Huang Y Y. Periodic inclusions in anisotropic elasticity[J]. Internat J Engrg Sci, 1996, **34**(14): 1623-1630.
- [8] Hu Y T, Huang Y Y, Zhong W F. Boundary value problems of two-dimensional anisotropic body with a parabolic boundary[J]. Acta Mech Solids Sinica, 1996, **9**(2): 139-150.
- [9] Hu Y T, Huang Y Y, Cheng L Z, et al. Periodic elliptic holes in anisotropic elasticity[J]. Mech Res Commun, 1998, **25**(2): 171-178.

- [10] Hu Y T, Huang Y Y, Zhong W F. Collinear periodic crack in anisotropic bimetals[J]. *Internat J Fracture*, 1997, **85**(1): 69-80.
- [11] Hu Y T, Huang Y Y, Lingzhi C, et al. Periodic elliptic holes in anisotropic elasticity[J]. *Mech Res Commun*, 1998, **25**(2): 171-178.
- [12] Hwu C, Ting T C T. Two-dimensional problems of the anisotropic elastic solid with an elliptic inclusion[J]. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1989, **42**(4): 553-572.
- [13] Li Q, Ting T C T. Line inclusions in anisotropic elastic solids[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1989, **56**(3): 556-563.
- [14] Gao C F, Wang M Z. Periodical cracks in piezoelectric media[J]. *Mech Res Commun*, 1999, **26**(4): 427-432.
- [15] Gao C F, Hausler C, Balke H. Periodic permeable interface cracks in piezoelectric materials[J]. *Internat J Solids and Structures*, 2004, **41**(2): 323-335.
- [16] Hao T. Periodical collinear air containing cracks in a piezoelectric material[J]. *Internat J Fracture*, 2001, **112**(3): 197-204.
- [17] Zhang T Y, Gao C F. Fracture behaviors of piezoelectric materials[J]. *Theoret Appl Fracture Mech*, 2004, **41**(1/3): 339-379.
- [18] Yang X H, Chen C Y, Hu Y T, et al. A half-infinite coupled crack on an interface of piezoelectric bimetals without oscillation[J]. *The Chinese Journal of Mechanics*, 2003, **19**(1): 241-245.
- [19] 王自强. 压电材料裂纹顶端条状电饱和区模型的力学分析[J]. *力学学报*, 1999, **31**(3): 311-319.

Interaction Between Collinear Periodic Cracks in an Infinite Piezoelectric Body

CUI Zhi-jian^{1,2}, HU Hong-ping², YANG Feng²

(1. College of Petroleum Engineering, Xi'an Shiyou University,
Xi'an 710065, P. R. China;

2. Department of Mechanics, Huazhong University of Science and Technology,
Wuhan 430074, P. R. China)

Abstract: The problem of collinear periodic cracks in an infinite piezoelectric body is studied. Effect of saturation strips at the crack-tips was taken into account. By means of Stroh formalism and the conformal mapping technique, the general periodic solutions for collinear cracks were obtained. The stress intensity factors and the size of saturation strips were derived analytically and their dependencies on the ratio of the periodicity to half-length of the crack h/l were analyzed in detail. Numerical results show that: 1) when h/l is higher than 4.0, the stress intensity factors become almost identical to the ones for a single crack in an infinite piezoelectric body. It indicates that the interaction between cracks can be ignored in establishing the criterion for crack initiation in the case that h is larger than 4.0 l ; 2) the speed of saturation strip size of periodic cracks approaching one of a single crack depends on the electric load applied at infinity. In general, a larger electric load applied at infinity is with a slower approaching speed.

Key words: collinear periodic cracks; stress intensity factors; saturation strips; ratio of periodicity to half-length of crack; approaching speed