

一种自由界面追踪的模板化 VOF 方法^{*}

李孝伟¹, 樊俊飞²

(1. 上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;

2. 宝钢股份研究院(技术中心), 上海 201900)

(戴世强推荐)

摘要: 发展了一种模板化的 volume of fluid (VOF) 方法. 该方法根据自由界面的法向建立一个模板, 然后由已知的网格单元上的流体体积比值确定出自由界面的准确位置, 使得在二维情形下一个网格单元被自由界面切割的形式只有 3 种. 另一方面, 引入了单元边流体占有长度的概念, 在此基础上建立了一个统一的流体占有面积模型, 可以使得自由界面输运方程的求解有统一的算法. 该方法不受网格单元形式的限制, 并且容易推广到三维情形. 算例表明, 该方法能保证自由界面的跟踪精度.

关键词: VOF 方法; 流体体积比函数; 界面重构

中图分类号: O351.1 **文献标识码:** A

引 言

自由界面跟踪的流体体积 (volume of fluids, VOF) 方法自 1981 年由 Hirt 和 Nichols^[1] 提出以来, 得到了广泛的应用. 它首先定义一个流体体积比函数 C , 在一个网格单元内, C 的取值代表单元内流体所占的份额. 若 C 为 1, 则网格单元内充满流体; 若 C 为 0, 则网格单元内没有流体; 若 C 在 0 和 1 之间, 则网格单元内存在自由界面. 然后运用界面重构算法和界面输运算法实现自由界面跟踪. 经过众多研究者的努力, VOF 方法得到了重要的发展, 出现了一系列界面重构算法和相应的界面输运算法, 比如 Noh 和 Woodward 的 SLIC 算法^[2]、Ashgriz 和 Poo 的 FLAIR 算法^[3]、Youngs 的精细构造算法^[4] 和 Ubbink 和 Issa 的 CICSAM 技术^[5] 等.

已有的一些自由界面重构技术和界面输运算法实现和推广起来大多比较繁琐^[6-10], 因为: 1) 多数技术和算法都是在直角型网格的基础上建立起来的, 所得结论不易推广到一般性网格; 2) 在二维情形下一个网格被自由界面切割的形式很多, 三维情形更为复杂; 3) 由于以上两点, 自由界面输运方程的求解也变得较为困难.

针对以上问题, 本文发展了一种模板化的 VOF 方法. 该方法一方面通过建立一个模板, 只需要知道单元上的流体体积比值和运动界面的法向就可以确定出界面的准确位置, 使得在二维情形下一个网格被自由界面切割的形式只有 3 种. 该重构技术与 Youngs 方法有点相似,

* 收稿日期: 2007-07-23; 修订日期: 2008-05-08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10672097); 上海市重点学科建设项目(Y0103)

作者简介: 李孝伟(1969—), 男, 四川资中人, 副教授, 博士(联系人. Tel: + 86-21-56385962; E-mail: xwli@staff.shu.edu.cn).

但它对网格单元不用进行复杂的转换或映射,同时在网格单元每一边上定义流体占有长度,通过求解这些流体占有长度,可以很方便地构造出自由界面.另一方面,本文在单元边流体占有长度概念的基础上,建立了一个统一的流体占有面积模型,据此很容易实现自由界面输运方程的求解.本文方法不受网格形式的限制,并且容易推广到三维情形.

1 模板化的界面重构技术

1.1 模板的建立

由于在自由界面重构之前,所有网格单元上的流体体积比函数 C 都是已知的,所以运用 Youngs 算法可以得到某一网格单元 (i, j) 内自由界面的法向 $\mathbf{n}(n^x, n^y)$:

$$\begin{cases} n^x = (C_{i+1,j+1} + 2C_{i+1,j} + C_{i+1,j-1} - C_{i-1,j+1} - 2C_{i-1,j} - C_{i-1,j-1})/(\delta x), \\ n^y = (C_{i+1,j+1} + 2C_{i,j+1} + C_{i-1,j+1} - C_{i+1,j-1} - 2C_{i,j-1} - C_{i-1,j-1})/(\delta y). \end{cases} \quad (1)$$

由以上算法得到的自由界面的法向总是指向单元中含流体的部分.

对于一个任意四边形单元 (i, j) , 求出它的形心 (x_0, y_0) ; 过 (x_0, y_0) 作出一条直线 L , 使其法向为 $\mathbf{n}(n_x, n_y)$. 分别求出四边形的4个顶点到直线 L 的距离 $d_{i,j}, d_{i+1,j}, d_{i+1,j+1}, d_{i,j+1}$. 根据直线 L 的法向对4个距离进行设置. 如果某点处于直线 L 的正向半平面, 则距离取正值, 反之, 取负值, 也就是说, 经过设置后的距离值带正负号. 于是可以根据距离值由大到小的顺序对4个顶点进行排序, 依次命名为 A, B, C, D , 并通过该4个顶点分别作直线 L 的平行线 L_1, L_2, L_3, L_4 , 如图1所示.

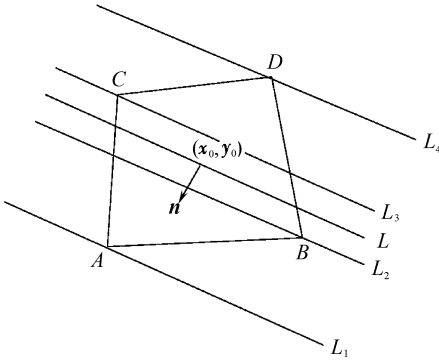


图1 模板

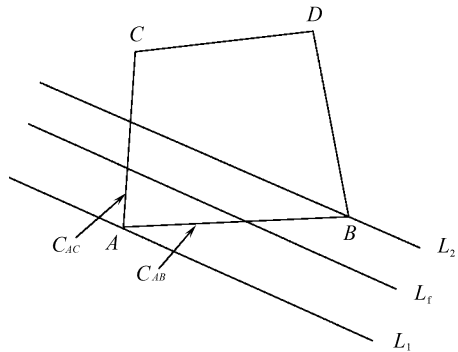


图2 当 $S_f \leq S_{12}$ 时, 界面 L_f 在模板中的位置

求出网格单元夹在直线 L_1 和 L_2 之间的面积 S_{12} 和夹在直线 L_1 和 L_3 之间的部分的面积 S_{13} 为

$$S_{12} = \frac{1}{2}h(a_1 + a_2), \quad (2)$$

$$S_{13} = S_{i,j} - \frac{1}{2}\bar{h}(a_3 + a_4), \quad (3)$$

以上两式中,

$$h = |d_A - d_B|, \quad \bar{h} = |d_C - d_D|,$$

$$a_1 = \sqrt{AB^2 - h^2}, \quad a_3 = \sqrt{CD^2 - \bar{h}^2},$$

$$a_2 = h \cdot \tan(\angle A - \arccos(h/(\overline{AB}))), \quad a_4 = \bar{h} \cdot \tan(\angle D - \arccos(\bar{h}/(\overline{CD}))),$$

单元夹在直线 L_1 和 L_4 之间的部分的面积 S_{14} 就是单元面积 $S_{i,j}$, 事先可以求出.

实际上, 不管单元内自由界面的法向如何, 都可以形成如图 1 所示的模板, 并且模板的形式是唯一的, 差别仅仅是由于自由界面的法向不同而引起面积 S_{12} 、 S_{13} 的具体数值不同而已.

1.2 自由界面的重构

首先, 定义单元每一边上流体占有长度为 C_{AB} 、 C_{AC} 、 C_{BD} 和 C_{CD} , C_{AB} 表示从 A 点算起的流体占有 AB 边的长度, 其他类推. 知道了 C_{AB} 、 C_{AC} 、 C_{BD} 和 C_{CD} , 就知道了单元内的输运界面的所有信息. 根据流体体积比值 $C_{i,j}$, 可以知道单元中流体占有面积为

$$S_f = C_{i,j} \cdot S_{i,j}. \tag{4}$$

然后, 根据 S_f 值对 C_{AB} 、 C_{AC} 、 C_{BD} 和 C_{CD} 进行求解:

i) 如果 $S_f \leq S_{12}$, 则界面 L_f 位于直线 L_1 和 L_2 之间, 如图 2 所示.

由于单元的几何外形和面积 S_f 是已知的, 且 L_f 平行于 L_1 和 L_2 , 所以根据几何运算可以得到

$$\begin{cases} C_{AB} = \sqrt{\frac{S_f}{S_{12}}} \cdot \overline{AB}, & C_{AC} = \sqrt{\frac{S_f}{S_{12}}} \cdot \frac{|d_B - d_A|}{|d_C - d_A|} \overline{AC}. \\ C_{BD} = 0, & C_{CD} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

ii) 如果 $S_{12} < S_f \leq S_{13}$, 则界面 L_f 处于直线 L_2 和 L_3 之间, 如图 3 所示. 可以得到

$$\begin{cases} C_{AB} = \overline{AB}, & C_{AC} = \frac{(h_s + |d_B - d_A|) \cdot \overline{AC}}{|d_C - d_A|}, \\ C_{BD} = \frac{h_s \cdot \overline{BD}}{|d_D - d_B|}, & C_{CD} = 0, \end{cases} \tag{6}$$

在上式中,

$$h_s = \frac{-b_s - \sqrt{b_s^2 - 4a_s c_s}}{2a_s}, \quad a_s = \frac{(a_3 + a_4) - (a_1 + a_2)}{|d_C - d_B|},$$

$$b_s = 2(a_1 + a_2), \quad c_s = -2(S_f - S_{12}).$$

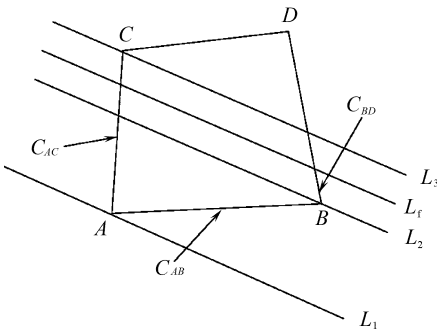


图 3 当 $S_{12} < S_f \leq S_{13}$ 时, 界面 L_f 在模板中的位置

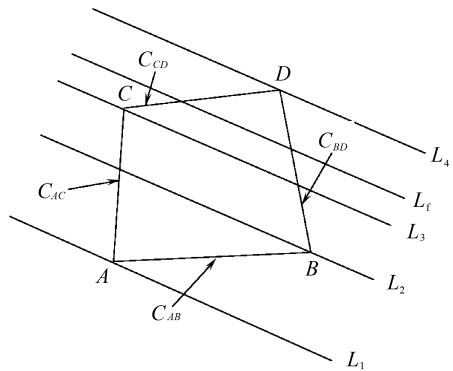


图 4 当 $S_{13} < S_f \leq S_{14}$ 时, 界面 L_f 在模板中的位置

ii) 如果 $S_{13} < S_f \leq S_{14}$, 则界面 L_f 处于直线 L_3 和 L_4 之间, 如图 4 所示. 可以得到

$$\begin{cases} C_{AB} = \overline{AB}, & C_{AC} = \overline{AC}, \\ C_{BD} = (1.0 - S_r) \cdot \overline{BD}, & C_{CD} = (1.0 - S_r \cdot d_r) \cdot \overline{CD}, \end{cases} \tag{7}$$

在上式中

$$S_r = \sqrt{\frac{S_{13} - S_f}{S_{13} - S_{12}}}, \quad d_r = \frac{|d_D - d_C|}{|d_D - d_B|}.$$

可以看到, 有了前面的模板, 自由界面的位置只有 3 种可能性存在, 并且只需要知道单元上的流体体积比值, 就可以完成自由界面的重构.

2 自由界面输运方程的求解

VOF 自由界面追踪方法还有一个重要研究内容, 就是根据给定的流速及重构好的自由界面确定下一时刻 C 值的界面输运算法. 由于采用了上面的模板化的重构技术, 基于 C 值的界面输运算法便可以写成统一的形式. 不妨认为 C_{AB} 、 C_{AC} 、 C_{BD} 和 C_{CD} 都是变量, 即

$$\begin{cases} 0 \leq C_{AB} \leq \overline{AB}, & 0 \leq C_{AC} \leq \overline{AC}, \\ 0 \leq C_{BD} \leq \overline{BD}, & 0 \leq C_{CD} \leq \overline{CD}. \end{cases} \quad (8)$$

根据前面模板的定义, 显然 $C_{CD} \leq C_{AB}$, $C_{BD} \leq C_{AC}$, 所以, 让 $\overline{AB}_1 = C_{AB}$ 、 $\overline{AC}_1 = C_{AC}$ 、 $\overline{B_1D_1} = C_{BD}$ 和 $\overline{C_1D_2} = C_{CD}$, 且 $B_1D_1 \parallel BD$, $C_1D_2 \parallel CD$ 可以在模板上画出一个包含流体的多边形 $AB_1D_1D_2C_1$, 称其为流体占有面积模型, 如图 5 所示.

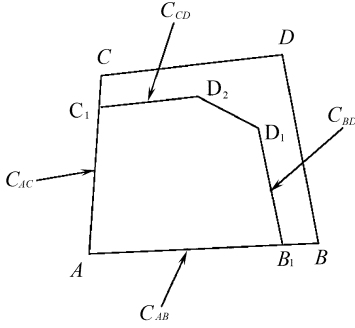


图 5 模板中统一的流体占有面积图

由于网格单元各边上的流体速度是已知的, 所以可以求得流体沿各边外法向的速度分量, 不妨定义为 V_{AB} 、 V_{AC} 、 V_{BD} 和 V_{CD} . 假设在 δt 时间内通过各边流入相邻单元的流

体体积分别为: f_{AB} 、 f_{AC} 、 f_{BD} 和 f_{CD} , 为了使公式相对简单些, 此处假设网格单元为矩形, 那么, 通过简单的推导可得

$$f_{AB} = \begin{cases} 0, & H_{AB} \leq 0, \\ H_{AB} \cdot C_{AB}, & 0 < H_{AB} \leq C_{BD}, \\ \min \left\{ S_f, H_{AB} \cdot C_{AB} - \frac{1}{2} f_1 (H_{AB} - C_{BD})^2 \right\}, & H_{AB} > C_{BD}, \end{cases} \quad (9)$$

$$f_{AC} = \begin{cases} 0, & H_{AC} \leq 0, \\ H_{AC} \cdot C_{AC}, & 0 < H_{AC} \leq C_{CD}, \\ \min \left\{ S_f, H_{AC} \cdot C_{AC} + \frac{1}{2} f_1 (H_{AC} - C_{CD})^2 \right\}, & H_{AC} > C_{CD}, \end{cases} \quad (10)$$

$$f_{BD} = \begin{cases} 0, & H_{BD} \leq 0, \\ H_{BD} \cdot C_{BD} + \frac{1}{2} f_1 H_{BD}^2, & 0 < H_{BD} \leq E_{CD} - E_{AB}, \\ \min \left\{ S_f, H_{BD} \cdot C_{BD} - \frac{f_2}{2} \right\}, & H_{BD} > E_{CD} - E_{AB}, \end{cases} \quad (11)$$

$$f_{CD} = \begin{cases} 0, & H_{CD} \leq 0, \\ H_{CD} \cdot C_{CD} + \frac{f_1}{2} H_{CD}^2, & 0 < H_{CD} \leq E_{BD} - E_{AC}, \\ \min \left\{ S_f, H_{CD} \cdot C_{CD} - \frac{f_2}{2} \right\}, & H_{CD} > E_{BD} - E_{AC}, \end{cases} \quad (12)$$

在以上各式中

$$f_1 = \frac{C_{AB} - C_{CD}}{C_{AC} - C_{BD}}, f_2 = (C_{AB} - C_{CD}) \cdot (C_{AC} - C_{BD}),$$

$$E_{AB} = \overline{AB} - C_{AB}, E_{AC} = \overline{AC} - C_{AC}, E_{BD} = \overline{BD} - C_{BD}, E_{CD} = \overline{CD} - C_{CD},$$

$$H_{AB} = V_{AB} \cdot \delta t, H_{AC} = V_{AC} \cdot \delta t, H_{BD} = V_{BD} \cdot \delta t - E_{AB}, H_{CD} = V_{CD} \cdot \delta t - E_{AC}.$$

将上一小节中求得的 C_{AB} 、 C_{AC} 、 C_{BD} 和 C_{CD} 代入式(9) ~ (12) 即可得到 f_{AB} 、 f_{AC} 、 f_{BD} 和 f_{CD} ，然后就可以运用施主-受主算法修正单元 (i, j) 及其相邻单元上的流体体积比值，从而完成界面输运方程的求解。因此，在模板上建立了统一的流体占有面积模型，界面输运方程的求解变得更为简单。

3 算 例

1) 旋转速度场

本小节对经典的 Zalesak 界面模型在旋转流场中的运动进行了计算模拟。考虑二维旋转速度场

$$u(x, y) = -\pi(y - 0.5), v(x, y) = \pi(x - 0.5), \tag{13}$$

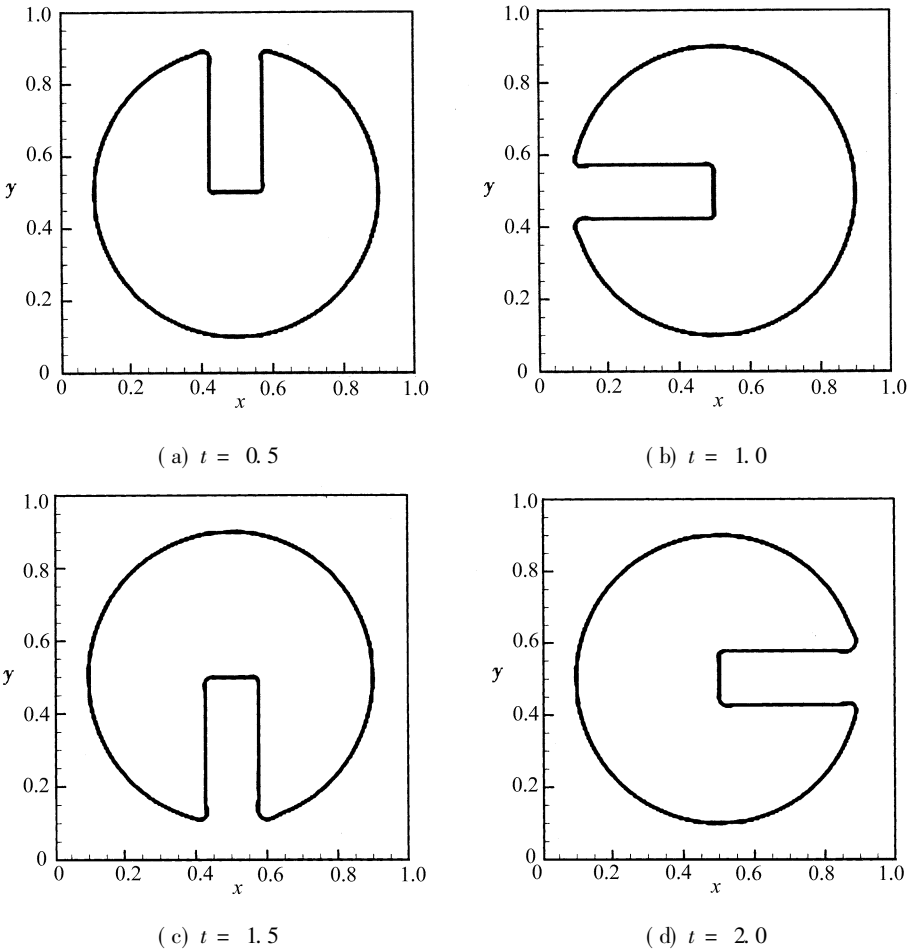


图 6 Zalesak 模型的计算结果

取计算区域 $[0, 1] \times [0, 1]$ ，计算网格点数为 200×200 ， $\delta t = 0.001$ 。在旋转流场作用下，初值图分别旋转 $\pi/2$ 、 π 、 $3\pi/2$ 和 2π ，计算结果如图 6 所示。可以看出，得到的界面很“锐利”，说明本

文方法能保证界面追踪的精度.

2) 剪切速度场

考虑一个剪切流场

$$\begin{cases} u(x, y) = \pi \cos(\pi(x - x_0)) \sin(\pi(y - y_0)), \\ v(x, y) = -\pi \sin(\pi(x - x_0)) \cos(\pi(y - y_0)). \end{cases} \quad (14)$$

在计算中, 取 $(x_0, y_0) = (0.5, 0.5)$, 计算区域取 $[0, 1] \times [0, 1]$, 初值界面为圆心在 $(0.5, 0.3)$ 、半径为 0.2 的圆周.

运用模板化 VOF 方法, 首先计算得到初值界面经过 $t = 1.0$ 后的界面, 然后再以此结果为初值, 将速度反号, 反剪切至 $t = 1.0$, 结果如图 7 所示. 可以看到, 反剪切后的界面与初值很接近, 再次证明了本文方法具有很好的界面追踪精度.

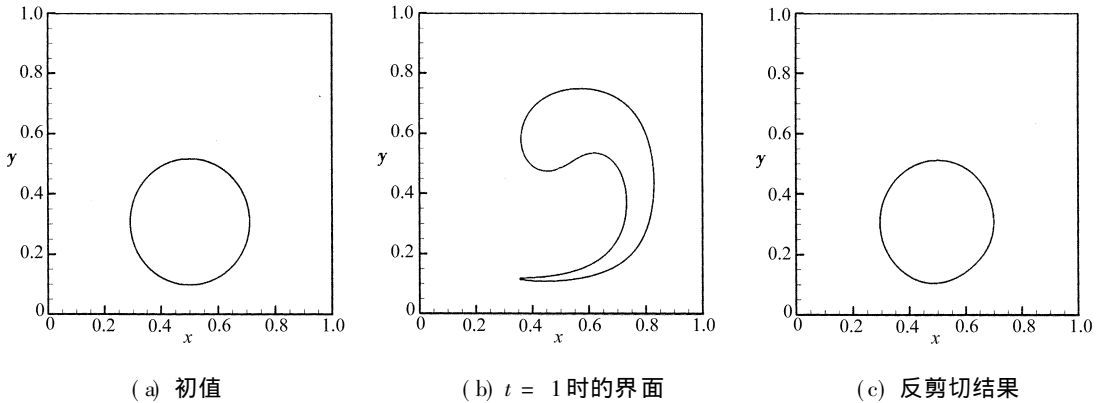


图 7 剪切速度场计算结果

4 结 论

本文提出的界面重构的模板的形式是唯一的, 在此模板基础上进行界面重构非常简单, 网格单元被界面切割为 3 种形式. 并且该重构技术对网格单元的形状没有特别的要求, 适合于任意形状的四边形网格单元, 容易推广到三维情形. 在构造的过程中, 除了在计算自由界面法向时需要相邻单元的流体体积比的信息外, 其他方面对相邻单元的信息没有依赖. 另一方面, 本文引入了流体占有长度的概念, 结合界面重构的模板算法, 可以建立起一个统一的流体占有面积图, 因而可以写出统一的界面输运算法, 使得界面输运方程的求解变得更为简单.

[参 考 文 献]

- [1] Hirt C W, Nichols B D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries[J]. J Comput Phys, 1981, **39**(1): 201-225.
- [2] Noh W F, Woodward P R. SLIC (simple line interface calculation)[A]. In: Van de Vooren A, Zandbergen P, Eds. Proceedings of Fifth International Conference on Fluid Dynamics, 59 of Lecture Notes in Physics [C]. Berlin: Springer, 1976, 330-340.
- [3] Ashgriz N, Poo J Y. FLAIR: Flux line-segment model for advection and interface reconstruction[J]. J Comput Phys, 1991, **93**(2): 449-468.
- [4] Youngs D L. Time-dependent multi-material flow with large fluid distortion[A]. In: Morton K W, Baines M J, Eds. Numerical Methods for Fluid Dynamics [C]. New York: Academic Press, 1982, 273-285.

- [5] Ubbink O, Issa R I. A method for capturing sharp fluid interfaces on arbitrary meshes[J]. J Comput Phys, 1999, **153**(1): 26-50.
- [6] Gueyffier D, Nadim A, Li J, et al. Volume-of-fluid interface tracking with smoothed surface stress methods for three-dimensional flows[J]. J Comput Phys, 1998, **152**(2): 423-456.
- [7] Renardy Y, Renardy M. A parabolic reconstruction of surface tension for the volume-of-fluid method [J]. J Comput Phys, 2002, **183**(2): 400-421.
- [8] Afkhani S, Bussmann M. Height function-based contact angles for VOF simulations of contact line phenomena[J]. International Journal of Numerical Analysis and Modeling, 2004, **1**(1): 1-18.
- [9] Rider W J, Kothe B D. Reconstructing volume tracking[J]. J Comput Phys, 1998, **141**(2): 112-152.
- [10] Harvie C J E, Fletcher D F. A new volume of fluid advection algorithm: The stream scheme[J]. J Comput Phys, 2000, **162**(1): 1-32.

A Stencil-like Volume-of-Fluid (VOF) Method for Tracking Free Interface

LI Xiao-wei, FAN Jun-fei

(1. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China;

2. Research Institute (R & D Center), Baoshan Iron & Steel Co. Ltd.,
Shanghai 201900, P. R. China)

Abstract: A stencil-like volume-of-fluid (VOF) method is proposed for tracking free interface. A stencil on a grid cell is worked out according to the normal direction of the interface, in which, only three interface positions are possible in 2D cases, and the interface can be reconstructed by only requiring the known local volume fraction information. On the other hand, the fluid-occupying-length was defined on each side of the stencil, through which a unified fluid occupying volume model and the unified algorithm can be resulted for solving the interface advection equation. The method is suitable for arbitrary geometry of the grid cell, and is extendible to 3D cases. The typical numerical examples show that the current method can give “sharp” result for tracking free interface.

Key words: VOF method; fluid volume fraction function; interface-reconstruction