

一种改善了非线性和色散性的 Boussinesq 方程模型*

张殿新, 陶建华

(天津大学 机械工程学院 力学系, 天津 300072)

(周恒推荐)

摘要: 推导了一种在不平底上的新的 Boussinesq 方程. 在不增加方程的最高导数项的阶数的情况下提高了模型方程的非线性. 为了提高模型的色散性, 引入长波近似, 通过调节待定系数来使模型的色散性达到 Pad (2, 2). 对模型方程进行了非线性、线性色散性和线性浅化性分析, 分析表明此模型在非线性和色散性和浅化性上都有所提高. 将计算结果与实验数据做了比较, 结果显示模型更好的符合了实验数据.

关键词: Boussinesq 方程; 改进; 非线性; 色散性

中图分类号: O353.2 文献标识码: A

引 言

水波在近岸的传播是海岸工程最基本和最受关注的问题之一. 波浪传播至近岸, 波浪的浅化性、折射、绕射以及非线性波的相互作用等都影响着波浪的形态. 浅水中波浪的特性和深水中的完全不同.

Boussinesq 方程可以较好地描述近岸波浪的演化. 1872 年 Boussinesq^[1] 提出了平底的弱色散弱非线性水深平均速度方程. Peregrine^[2] 把它推广到变化水深. 由于 Peregrine^[2] 方程的普遍应用, 它被作为经典的 Boussinesq 方程.

为了模拟浅水中的非线性波, 许多研究者致力于研究模型的非线性. 模型扩展过程中有两个重要的参数: 特征波高与特征水深的比 $\varepsilon = a_0/h_0$ 和特征水深与特征波长的比 $\mu = h_0/l$, 在浅水中 ε, μ 都是小于 1 的小量. 90 年代初模型发展到弱色散弱非线性模型方程, 方程的精度为 $O(\varepsilon^2, \mu^4)$, 如 Madsen 等人^[3] 和 Nwogu^[4] 的工作. 1995 年 Wei 等人^[5] 首先提出了完全非线性 Boussinesq 方程, 精度为 $O(\mu^4)$. Agnon 等人^[6] 得到了含有 5 阶导数的完全非线性方程, 精度为 $O(\varepsilon^5, \mu^{10})$. 同时 Gobbi 等人^[7] 用任意水深的加权平均速度势代替任意水深速度势得到了一种以表面高度和速度势作为依赖变量的完全非线性 Boussinesq 方程, 方程的最高阶导数为 4 阶, 精度为 $O(\mu^6)$. 目前大多数模型的非线性的提高将导致模型最高阶导数项的阶数

* 收稿日期: 2008-03-19; 修订日期: 2008-05-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50509018)

作者简介: 张殿新(1980—), 女, 天津人, 博士生(联系人. Tel: + 86-22-27890726; E-mail: dianxinz@hotmail.com); 陶建华, 教授(Tel: + 86-22-27404403; E-mail: jhtao@tju.edu.cn).

增加,如 Madsen 等人^[8-9]都达到 5 阶甚至 5 阶以上. 在数值计算中提高数值格式对控制方程的近似程度有两种方法: 一是减小空间步长和时间步长. 对于 Boussinesq 模型, 方程的最高阶导数项的系数是相对较小的量, 若要减小截断误差对最高阶导数项的影响, 则要求离散的空间步长很小, 因此计算的网格点增加, 造成计算量增加. 另一种方法是提高离散方程的精度, 使数值格式精度都要等于或高于最高阶导数的阶数. 但高精度格式造成离散点增多, 使得边界处理的难度增加^[10], 同时也使得数值解易于不稳定.

为了使模型应用到深水, 研究者不断地在改进模型的色散性. Madsen 等人^[3]在动量方程中加入 1 个由长波方程得来的高阶导数项, 并选择 1 个自由参数匹配 Pad (2, 2) 展开的色散关系. Gobbi 和 Kirby^[11]用 2 个水深层的速度加权平均值作速度变量, 这样存在 3 个自由参数: 任意 2 个水深层和加权函数, 然后用他们来确定比较理想的色散关系. Schaffer 和 Madsen^[12]、Madsen 等人^[13]则引入更一般的速度变量, 得到没有 5 阶导数项的控制方程. Madsen 等人^[8]用任意水深的速度代替底部水深速度作为依赖变量使得线性色散性达到 Pad (8, 10) 近似解.

本文在第 1 节种推导了一种在不平底上的新的 Boussinesq 方程, 方程在不增加最高阶导数项的情况下改进了方程的非线性和色散性. 第 2 节分析了方程的非线性、色散性和浅化性. 第 3 节将一个实例的计算结果与实验数据进行了比较.

1 基本方程

1.1 无量纲化

考虑垂直二维不可压无粘流体在直角坐标下的方程为:

连续性方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad -h(x) \leq z \leq \zeta(x, t); \quad (1)$$

动量方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad -h(x) \leq z \leq \zeta(x, t), \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g, \quad -h(x) \leq z \leq \zeta(x, t); \quad (3)$$

无旋条件

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad -h(x) \leq z \leq \zeta(x, t); \quad (4)$$

运动表面边界条件

$$w = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad z = \zeta(x, t); \quad (5)$$

动力学自由表面边界条件

$$p = 0, \quad z = \zeta(x, t); \quad (6)$$

运动底部边界条件

$$w = -u \frac{\partial h}{\partial x}, \quad z = -h(x); \quad (7)$$

其中, x 为水平坐标和 z 为垂直坐标, t 为时间, u 、 w 分别为水平速度和垂直速度, ζ 为自由表面位移, h 为静水深, p 为压力, ρ 为密度, g 为重力加速度.

为了方程推导的需要, 下面进行无量纲化. x 用特征波长 l_0 无量纲化; z 和 h 都是用特征水深 h_0 无量纲化; ζ 用特征波高 a_0 来无量纲化, 无量纲化后变量用 η 表示; t 用 $l/\sqrt{gh_0}$ 无量

纲化; 水平速度 u 用 $\varepsilon \sqrt{gh_0}$ 无量纲化; 垂直速度 w 用 $\varepsilon \mu \sqrt{gh_0}$ 无量纲化; 压力 p 用 ρgh_0 无量纲化. 并引入 2 个参数: 特征波高与特征水深的比 $\varepsilon = a_0/h_0$ 和特征水深与特征波长比 $\mu = h_0/l$. 得到无量纲化的方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (8)$$

$$\varepsilon \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon w \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

$$\varepsilon \mu^2 \left[\frac{\partial w}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial w}{\partial x} + \varepsilon w \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \frac{\partial p}{\partial z} + 1 = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \mu^2 \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (11)$$

$$w^s = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \varepsilon u^s \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad z = \varepsilon \eta(x, t), \quad (12)$$

$$p^s = 0, \quad z = \varepsilon \eta(x, t), \quad (13)$$

$$w^b = -u^b \frac{\partial h}{\partial x}, \quad z = -h(x), \quad (14)$$

角标 s 和 b 分别代表变量在自由表面和底部的估计值, 即

$$u^s = u(x, \eta, t), \quad u^b = u(x, -h, t).$$

1.2 改善非线性的 Boussinesq 方程

从底部到自由表面积分连续性方程(8)得到

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \varepsilon \eta)u] = 0, \quad (15)$$

其中

$$u(x, t) = \frac{1}{h + \varepsilon \eta} \int_{-h}^{\varepsilon \eta} u(x, z, t) dz. \quad (16)$$

从底部到自由表面积分动量方程(9), 得到

$$\int_{-h}^{\varepsilon \eta} \left[\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial z} (wu) - \varepsilon^2 u \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} \right] dz = 0. \quad (17)$$

象式(16)一样引入平均值的概念, 利用连续性方程(8)、底部边界条件(14)和表面边界条件(12)、(13), 结合微分和积分的转化关系, 得到

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} [(h + \varepsilon \eta)u] + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \varepsilon \eta)(\varepsilon^2 \overline{u^2} + p)] - p^b \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (18)$$

为了使方程应用在实际中, 需将变量 $\overline{u^2}$ 、 p 和 p^b 用 u 和 η 表示. 由 z 到自由表面积分垂直动量方程(10), 并利用表面边界条件, 得到 p 和 p^b :

$$p^b = \varepsilon \eta + h + \varepsilon \mu^2 \int_{-h}^{\varepsilon \eta} \frac{dw}{dt} dz, \quad (19)$$

$$(h + \varepsilon \eta)p = \frac{1}{2} (h + \varepsilon \eta)^2 + \varepsilon \mu^2 \int_{-h}^{\varepsilon \eta} (z + h) \frac{dw}{dt} dz, \quad (20)$$

这样就将方程(18)转换成只有变量 $\overline{u^2}$ 、 w 、 u 和 η 的方程.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [(h + \varepsilon \eta)u] + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} [(h + \varepsilon \eta) \overline{u^2}] + \\ & \mu^2 \int_{-h}^{\varepsilon \eta} (z + h) \frac{dw}{dt} dz + (h + \varepsilon \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} - \mu^2 h_x \int_{-h}^{\varepsilon \eta} \frac{dw}{dt} dz = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

下面需要将 $\overline{u^2}$ 、 w 用 u 和 η 表示. 现在保留方程到 $O(\varepsilon \mu^2, \mu^2)$, 而舍去 $O(\mu^4, \varepsilon^2 \mu^2)$ 项.

对无量纲化方程使用摄动法^[4], 得到 u, w 与 u 的关系

$$u(x, z, t) = u(x, t) - \mu^2 \left[\frac{1}{2} h \frac{\partial^2(hu)}{\partial x^2} - \frac{1}{6} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] - \mu^2 \left[z \frac{\partial^2(hu)}{\partial x^2} + \frac{1}{2} z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] + O(\varepsilon^2 \mu^2, \varepsilon^4), \quad (22)$$

$$w(x, z, t) = -\frac{\partial}{\partial x} [(h+z)u(x, t)] + \mu^2 z \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} h \frac{\partial^2(hu)}{\partial x^2} - \frac{1}{6} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] + \mu^2 z^2 \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^3(hu)}{\partial x^3} + \frac{1}{6} z \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right] + O(\varepsilon^2 \mu^2, \varepsilon^4). \quad (23)$$

因此

$$\overline{u^2} = u^2 - \mu^2 u \left\{ \varepsilon \eta \frac{\partial^2(hu)}{\partial x^2} - \frac{1}{3} \varepsilon \eta h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} + O(\varepsilon^2 \mu^2, \varepsilon^4), \quad (24)$$

$$\mu^2 \int_{-h}^{\varepsilon \eta} \left[(h+z) \frac{dw}{dt} \right] dz = -\frac{1}{3} \mu^2 \frac{\partial}{\partial x} [h^3(u_{tx} + \varepsilon u u_{xx} - \varepsilon u_x^2) + 3\varepsilon h^2 \eta u_{tx}] - \frac{1}{2} \mu^2 h_x [h^2(u_t + \varepsilon u u_x) + 2\varepsilon h \eta u_t] + O(\varepsilon^2 \mu^2, \varepsilon^4), \quad (25)$$

$$- \mu^2 h_x \int_{-h}^{\varepsilon \eta} \frac{dw}{dt} dz = \frac{1}{2} \mu^2 h_x [h^2(u_{tx} + \varepsilon u u_{xx} - \varepsilon u_x^2) + 2\varepsilon h \eta u_{tx}] + \mu^2 h_x^2 (h + \varepsilon \eta) [u_t + \varepsilon u u_x] + O(\varepsilon^2 \mu^2, \mu^4). \quad (26)$$

将等式(24)、(25)和(26)代入式(21)经过运算和整理得到

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [(h + \varepsilon \eta) u] + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} [(h + \varepsilon \eta) u^2] + (h + \varepsilon \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \\ & \mu^2 h_x^2 [h(u_t + \varepsilon u u_x) + \varepsilon \eta u_t] - \\ & \frac{1}{3} \mu^2 \frac{\partial}{\partial x} [h^3(u_{tx} + \varepsilon u u_{xx} - \varepsilon u_x^2) + 3\varepsilon h^2 \eta u_{tx}] - \\ & \frac{1}{2} \mu^2 \frac{\partial}{\partial x} [h_x h^2(u_t + \varepsilon u u_x) + 2\varepsilon h_x h \eta u_t] + \\ & \frac{1}{2} \mu^2 h_x [h^2(u_{tx} + \varepsilon u u_{xx} - \varepsilon u_x^2) + 2\varepsilon h \eta u_{tx}] = O(\varepsilon^2 \mu^2, \mu^4). \end{aligned} \quad (27)$$

如果在缓坡条件下用单宽流量作为依赖变量并且保留到 $O(\varepsilon, \mu^2)$ 的项, 方程(27)就变为 Abbott 等人^[14]的模型方程.

1.3 改善非线性和色散性的 Boussinesq 方程

长波方程近似到 $O(\varepsilon)$

$$\frac{\partial(h + \varepsilon \eta)u}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial(h + \varepsilon \eta)u^2}{\partial x} + (h + \varepsilon \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} = O(\mu^2, \varepsilon \mu^2), \quad (28)$$

对式(28)取二阶偏微分并乘以 $-Bh^2$, 这里 B 是 1 个参数, 得到

$$-B\mu^2 h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial(h + \varepsilon \eta)u}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial(h + \varepsilon \eta)u^2}{\partial x} + (h + \varepsilon \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] = O(\mu^4). \quad (29)$$

将等式(29)加到式(27), 得到了一种新的 Boussinesq 方程:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [(h + \varepsilon \eta) u] + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} [(h + \varepsilon \eta) u^2] + (h + \varepsilon \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} - \\ & \frac{1}{3} \mu^2 \frac{\partial}{\partial x} [h^3(u_{tx} + \varepsilon u u_{xx} - \varepsilon u_x^2) + 3\varepsilon h^2 \eta u_{tx}] - \\ & \frac{1}{2} \mu^2 \frac{\partial}{\partial x} [h_x h^2(u_t + \varepsilon u u_x) + 2\varepsilon h_x h \eta u_t] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \mu^2 h_x h^2 (u_{tx} + \varepsilon u_{xxx} - \varepsilon u_x^2) + \varepsilon \mu^2 h_x h \eta u_{tx} + \varepsilon \mu^2 h_x^2 \eta u_t + \\ & \mu^2 h_x^2 h [u_t + \varepsilon u u_x] - B \mu^2 h^2 [(h + \varepsilon \eta) u]_{xxt} - \varepsilon \mu^2 B h^2 [h u^2]_{xxx} - \\ & B \mu^2 h^2 [(h + \varepsilon \eta) \eta_x]_{xx} = O(\varepsilon^2 \mu^2, \mu^4). \end{aligned} \quad (30)$$

如果在缓坡条件下用单宽流量作为依赖变量并且保留到 $O(\varepsilon, \mu^2)$ 的项, 方程(30)就成为 Madsen 等人^[3]的模型方程, 方程(19)是 Drago^[15]的方程形式.

从方程的推导中可以看出本文的模型精度到了 $O(\varepsilon^2 \mu^2, \mu^4)$, Abbott 等人^[14]和 Madsen 等人^[3]精确到 $O(\mu^4, \varepsilon^2)$, 本文的模型保留了 $O(\varepsilon \mu^2)$ 项. 由于 ε 是特征波高与特征水深的比, 代表非线性的强弱, 因此本文的模型非线性强于 Abbott 等人^[14]和 Madsen 等人^[3]的模型. 虽然 Madsen 等人^[6]模型精度达到 $O(\varepsilon^5, \mu^{10})$, 但最高阶导数项的阶数大于本文模型, Madsen 等人^[6]模型为 5 阶, 本文模型仅为 3 阶.

2 模型的分析

2.1 非线性分析

在浅水中, Stokes 二阶波是最重要能量传递部分. 因此, 下面讨论模型的二阶超谐波和亚谐波.

将 $\eta = \eta_0 + \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2 + \dots$, $u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots$ 代入本文模型的平底情况, 按照 ε 的升序排列

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial t} + \frac{\partial (h u_0)}{\partial x} = 0, \quad (31a)$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} + \frac{\partial (h u_1)}{\partial x} = - \frac{\partial (\eta_0 u_0)}{\partial x}, \quad (31b)$$

$$\frac{\partial (h u_0)}{\partial t} + h \frac{\partial \eta_0}{\partial x} - \left[\frac{1}{3} + B \right] \mu^2 h^3 \frac{\partial^3 (u_0)}{\partial t \partial x^2} - B \mu^2 h^3 \frac{\partial^3 \eta_0}{\partial x^3} = 0, \quad (32a)$$

$$\frac{\partial (h u_1)}{\partial t} + h \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \left[\frac{1}{3} + B \right] \mu^2 h^2 \frac{\partial^3 (h u_1)}{\partial t \partial x^2} - B \mu^2 h^3 \frac{\partial^3 \eta_1}{\partial x^3} =$$

$$- \frac{\partial (\eta_0 u_0)}{\partial t} - \eta_0 \frac{\partial \eta_0}{\partial x} + \mu^2 h^2 \frac{\partial (\eta_0 (u_0)_x)}{\partial x} - \frac{\partial (h u_0^2)}{\partial x} +$$

$$\frac{1}{3} \mu^2 h^3 \frac{\partial}{\partial x} (u_0 (u_0)_{xx}) + \frac{1}{3} \mu^2 h^3 \frac{\partial}{\partial x} ((u_0)_x^2) + B \mu^2 h^3 (u_0^2)_{xxx} +$$

$$B \mu^2 h^2 (\eta_0 (\eta_0)_x)_{xx} + B \mu^2 h^2 \frac{\partial^3 (\eta_0 u_0)}{\partial t \partial x^2}. \quad (32b)$$

假定 $O(1)$ 阶解为

$$\eta_0 = \sum_n a_n \cos \phi_n, \quad (33a)$$

$$u_0 = \sum_n b_n \cos \phi_n. \quad (33b)$$

通过 $O(1)$ 阶解代入 ε 的 $O(\varepsilon)$ 阶形式方程(32), 假定 $O(\varepsilon)$ 阶解为

$$\eta_1 = \sum_l \sum_m a_l a_m (G_{lm}^+ \cos(\phi_l + \phi_m) + G_{lm}^- \cos(\phi_l - \phi_m)), \quad (34a)$$

$$u_1 = \sum_l \sum_m a_l a_m (M_{lm}^+ \cos(\phi_l + \phi_m) + M_{lm}^- \cos(\phi_l - \phi_m)), \quad (34b)$$

其中 a_n, b_n 为无量纲振幅, $\phi_n = k_n \cdot x - \omega_n t$, k_n 为无量纲化波数, x 是无量纲坐标, ω_n 为无量纲化角频率. G_{lm}^+, M_{lm}^+ 为超谐波系数, G_{lm}^-, M_{lm}^- 为亚谐波系数.

将式(33)、(34)代入式(31)、(32)得到

$$G_{lm}^+(\omega_l + \omega_m) - hM_{lm}^+(k_l + k_m) = D_{lm}^+/2, \quad (35a)$$

$$G_{lm}^-(\omega_l - \omega_m) - hM_{lm}^-(k_l - k_m) = D_{lm}^-/2, \quad (35b)$$

$$\begin{aligned} & hM_{lm}^+(\omega_l + \omega_m) - hG_{lm}^+(k_l + k_m) + \\ & (1/3 + B)\mu^2 h^3 M_{lm}^+(k_l + k_m)^2 (\omega_l + \omega_m) - G_{lm}^+ B \mu^2 h^3 (k_l + k_m)^3 = \\ & F_{lm}^+/2, \end{aligned} \quad (35c)$$

$$\begin{aligned} & hM_{lm}^-(\omega_l - \omega_m) - hG_{lm}^-(k_l - k_m) + \\ & (1/3 + B)\mu^2 h^3 M_{lm}^-(k_l - k_m)^2 (\omega_l - \omega_m) - G_{lm}^- B \mu^2 h^3 (k_l - k_m)^3 = \\ & F_{lm}^-/2, \end{aligned} \quad (35d)$$

其中

$$\begin{aligned} D_{lm}^+ &= \frac{\omega_m(k_l + k_m)}{hk_m}, \quad D_{lm}^- = \frac{\omega_m(k_l - k_m)}{hk_m}, \\ F_{lm}^+ &= -\frac{\omega_m(\omega_l + \omega_m)}{hk_m} + k_m - \frac{\mu^2 h^2 \omega_m(k_l k_m \omega_m + k_m^2 \omega_m)}{hk_m} + \frac{\mu^2 h \omega_l \omega_m(k_l + k_m)}{h^2 k_l k_m} + \\ & \frac{1}{3} \frac{\mu^2 h^3 \omega_l \omega_m(k_l k_m^2 + k_m^3)}{h^2 k_l k_m} - \frac{1}{3} \frac{\mu^2 h^3 \omega_l \omega_m(k_l^2 k_m + k_l k_m^2)}{h^2 k_l k_m} + \\ & \frac{B \mu^2 h^3 \omega_l \omega_m(k_l + k_m)^3}{h^2 k_l k_m} + B \mu^2 h^2 (k_l^2 k_m + k_m^3 + 2k_l k_m^2) - \\ & \frac{B \mu^2 h^2 \omega_m(\omega_l + \omega_m)(k_l + k_m)^3}{hk_m}, \\ F_{lm}^- &= -\frac{\omega_m(\omega_l - \omega_m)}{hk_m} - k_m - \frac{\mu^2 h^2 \omega_m(k_l k_m \omega_m - k_m^2 \omega_m)}{hk_m} + \frac{\mu^2 h \omega_l \omega_m(k_l - k_m)}{h^2 k_l k_m} + \\ & \frac{1}{3} \frac{\mu^2 h^3 \omega_l \omega_m(k_l k_m^2 - k_m^3)}{h^2 k_l k_m} - \frac{1}{3} \frac{\mu^2 h^3 \omega_l \omega_m(-k_l^2 k_m + k_l k_m^2)}{h^2 k_l k_m} + \\ & \frac{B \mu^2 h^3 \omega_l \omega_m(k_l - k_m)^3}{h^2 k_l k_m} + B \mu^2 h^2 (-k_l^2 k_m - k_m^3 + 2k_l k_m^2) - \\ & \frac{B \mu^2 h^2 \omega_m(\omega_l - \omega_m)(k_l - k_m)^3}{hk_m}. \end{aligned}$$

采用同样方法,得到 Abbott 等人^[14]、Drago^[15]、Madsen 等人^[3]模型的二阶谐波的传递函数,并与 Dean 和 Shama^[16]的 Stokes 理论进行比较.

从图 1 可以看出,无论是二阶超谐波还是二阶亚谐波,当水深较浅时所有模型都与 Stokes 理论较好地吻合;随着水深的增加,所有模型都远离 Stokes 理论. 图 1(a) 为所有模型与 Stokes 理论的二阶超谐波的比,注意到随着水深的增加所有模型的二阶超谐波都逐渐向下偏离 Stokes 理论,其中本文模型最接近 Stokes 理论,Abbott 等人^[14]模型最快远离 Stokes 理论,而 Drago^[15]、Madsen 等人^[3]远离速度介于两者之间. 图 1(b) 为所有模型与 Stokes 理论的二阶亚谐波比,注意到 Abbott 等人^[14]模型和 Madsen 等人^[3]模型大于 Stokes 理论,而本文模型小于 Stokes 理论. 随着水深的增大, Madsen 等人^[3]和 Drago^[15]模型很快远离 Stokes 理论. Abbott 等人^[14]和本文模型较缓慢地偏离 Stokes 理论. 因此本文的模型更好的符合了 Stokes 理论,具有更好的非线性.

2.2 色散性分析

为了分析模型的色散性, 假定模型有下面形式的解:

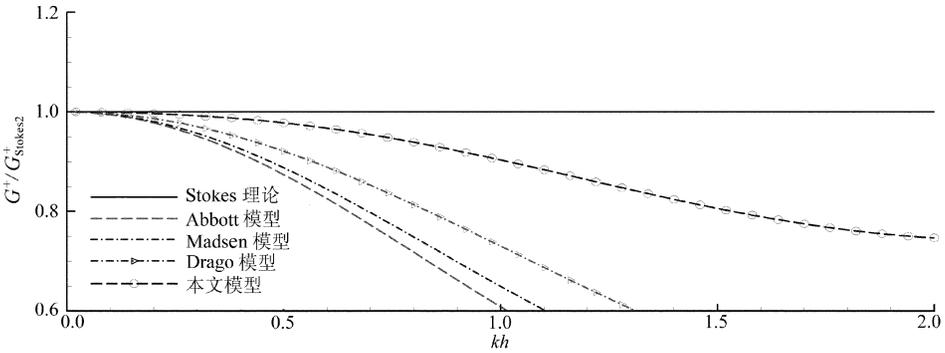
$$u = u_0 e^{i(kx - \omega t)}, \quad \zeta = a_0 e^{i(kx - \omega t)}, \quad (36)$$

其中 k 是波数, 角频率 ω , i 是虚数单位, a_0 、 u_0 分别为表面高度和水深积分速度的振幅.

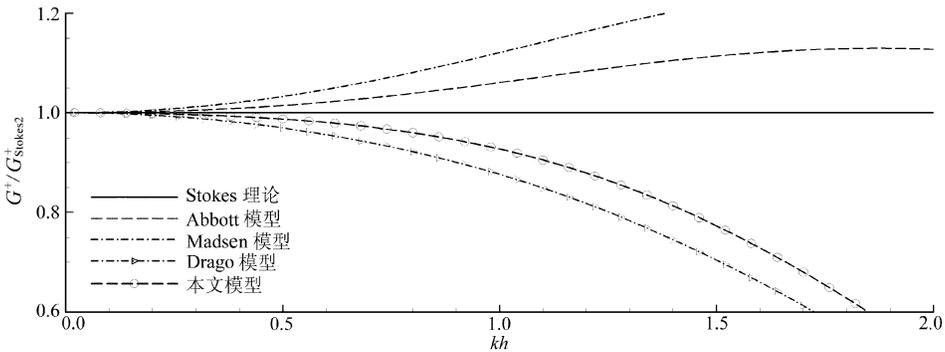
将式 (36) 代入本文的模型方程的线性有量纲形式, 得到色散关系

$$\omega^2 = \frac{ghk^2(1 + B(kh)^2)}{1 + (B + 1/3)(kh)^2}. \quad (37)$$

同样用这种方法得到 Abbott 等人^[13]、Madsen 等人^[3]和 Drago 等人^[14]的色散关系.



(a) Boussinesq 模型与 Stokes 理论的二阶超谐波比 ($k_l = k_m = k, \omega_l = \omega_m = \omega$)



(b) Boussinesq 模型与 Stokes 理论的二阶亚谐波比 ($k_l - k_m = 0.1 k, \omega_l - \omega_m = 0.1 \omega$)

图 1 Boussinesq 模型与 Stokes 理论的二阶谐波的比

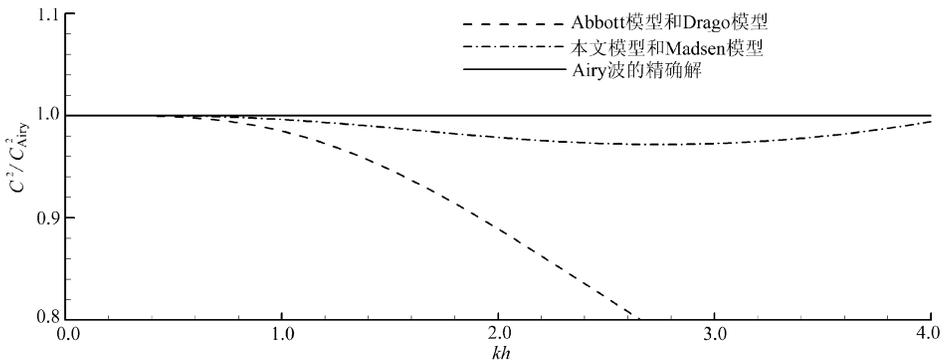


图 2 Boussinesq 模型的色散关系与 Airy 的精确色散关系的比

从色散性分析中可以看出通过调节参数 B , 本文的模型与 Madsen^[3] 模型都能达到 Pad (2, 2) 近似, 而 Drago^[15] 模型与 Abbott 等人^[14] 的模型色散性为 Pad (0, 2) 近似, 因此本文的模型色散性好于 Drago^[15] 模型和 Abbott 等人^[14] 的模型. 图 2 为模型的色散关系与 Airy 波的比, 从图中可以看出当水深较浅的时候几种模型的色散性与 Airy 的误差都较小, 随着水深的增加时误差都逐渐增大. 但本文模型与 Madsen 等人^[3] 模型的色散性缓慢地偏离 Airy 波色散性, 而且 kh 接近 4 的时候又开始靠近 Airy 波; Abbott 等人^[14] 模型和 Drago^[15] 的模型则很快地偏离了 Airy 波. 从数值上看当 $kh = 5$ 时, 本文的模型和 Madsen^[3] 模型与 Airy 波的误差达到 2%, 而当 $kh = 1.4$ 时, Abbott 等人^[14] 模型与精确解的误差就已经达到 2%. 因此本文模型的色散性好于 Abbott 等人^[14] 模型和 Drago^[15] 模型.

2.3 浅化性分析

本文对方程的浅化性分析采用 WKBJ 方法分析, 假定模型具有水深、波幅、波数随空间坐标缓慢变化的解. 其表面高度为 ζ 和水深平均速度 u 形式如下:

$$\zeta(x, t) = a(\beta x) e^{[-i\omega t + (i\beta)S(\beta x)]}, \quad (38)$$

$$u(x, t) = b(\beta x) e^{[-i\omega t + (i\beta)S(\beta x)]}, \quad (39)$$

这里 β 是底部坡度的参数, 即

$$h = h(\beta x), \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\beta} S(\beta x) \right] = k(\beta x),$$

其中 k 为波数, i 是虚数单位, $a(\beta x)$ 为表面高度振幅, $b(\beta x)$ 为水深积分速度的振幅.

将式 (38)、(39) 代入本文模型的控制方程 (15) 和 (30) 的线性有量纲形式, 得到的 β 的零阶方程为模型的色散关系, 得到的 β 的一阶方程为 b_x 、 h_x 、 k_x 和 b 、 h 、 k 的关系, 然后将连续性方程中 β 的零阶微分得到 a_x 、 b_x 、 h_x 、 k_x 和 a 、 b 、 h 、 k 的关系, 结合这两种关系得到

$$\alpha_1 \frac{a_x}{a} = -\alpha_2 \frac{h_x}{h} - \alpha_3 \frac{k_x}{k}, \quad (40)$$

利用色散关系的微分形式得到浅化性关系

$$\frac{a_x}{a} = -\frac{\alpha_2 - \alpha_3 \alpha_4}{\alpha_1} \frac{h_x}{h} = -\alpha_5 \frac{k_x}{h}, \quad (41)$$

α_5 表示表面高度的振幅与水深的关系, 定义为浅化性系数.

本文模型的系数分别为

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2 + 4Bk^2h^2 + 2B(1/3 + B)k^4h^4, \\ \alpha_2 = -((1/3 - 2B)k^2h^2 - B(1/3 + 2B)k^4h^4), \\ \alpha_3 = -(1 - 2Bk^2h^2 - 3B(1/3 + B)k^4h^4), \\ \alpha_4 = \frac{1}{2} \frac{1 + (2B - 1/3)k^2h^2 + B(B + 1/3)k^4h^4}{1 + 2Bk^2h^2 + B(B + 1/3)k^4h^4}. \end{cases} \quad (42)$$

利用同样的方法可以得到 Abbott 等人^[14]、Drago^[15] 和 Madsen 等人^[3] 的浅化系数.

$$\omega^2 = \frac{ghk^2(1 + B(kh)^2)}{1 + (B + 1/3)(kh)^2}. \quad (43)$$

波浪传播至浅水时, 由于水深的变化引起波速、波长和波高的变化就是波浪的浅化效应. 图 3 为线性浅化性系数的比较. 在水深很小时, 几种模型的浅化性系数都很接近 Airy 波理论, 随着水深的增加浅化性系数开始偏离 Airy 波理论. 本文模型的浅化性系数开始向下缓慢偏离 Airy 波理论, 但当到达 $kh = 2.1$ 左右时接近 Airy 波理论, 最后很快向上偏离 Airy 波理论; 而

Abbott 等人^[14]和 Drago^[15]的浅化性系数很快向下偏离 Airy 波理论. 因此本文模型的浅化性好于 Abbott 等人^[14]和 Drago^[15]模型.

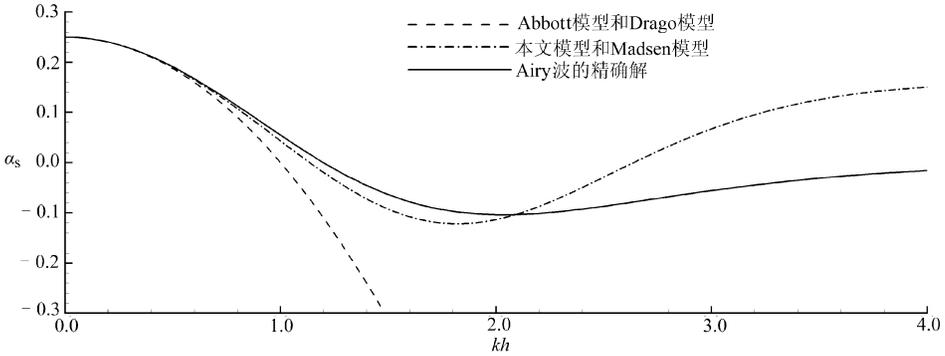


图3 Boussinesq 模型和 Airy 波精确的线性浅化系数比较

3 算例验证

本文选用 Beji 和 Battjes(1993)^[17]的实验结果对模型结果进行验证, 实验布置如图 4 所示, 水池长 30 m, 水深 0.4 m, 计算区域由长 6 m 的水平部分(水深 0.4 m)、长 11 m 的潜堤和 1 个 1:20 的缓坡组成. 中间潜堤和右边的缓坡之前是 1.95 m 的水平部分(水深 0.4 m). 潜堤包含 1 个 1:20 的斜坡、长 2 m 的水平顶部和右边 1 个 1:10 的斜坡. 这个斜坡上布置了砂石用来吸收传过来的波浪. 分别在 $x = 10.2\text{ m}, 12.2\text{ m}, 13.2\text{ m}, 14.2\text{ m}, 15.4\text{ m}, 17.0\text{ m}$ 这 6 个截面上测得波高变化. 图 5 是表面高度在 6 个不同的截面上数值结果与实验数据的比较. 横轴坐标为时间, 纵轴坐标为表面高度. 图 5(a)~(f) 分别给出了波高 0.02 m 周期 2 s 的波在时间 40 s 到 44 s 之间在 6 个截面上的传播. 当遇到潜堤的时候, 开始波高随着坡度的增加而增加, 当爬上潜堤后波形有了显著变化, 波高达到原来的 2 倍. 接着会产生两个不同频率的波. 这是随着水深变化波浪非线性作用的结果. 从图 5 中可以看出无论实验结果和数值模拟的结果都呈现出同样的变化趋势. 图 5 可以看出本文模型的计算结果与实验数据吻合较好, 明显好于 Drago^[15]模型和 Madsen 等人^[3]模型, 结果也有所改善, 与 2.1 至 2.3 小节分析吻合. 因此本文的模型能够比较准确的模拟非线性水波在缓坡上的传播.

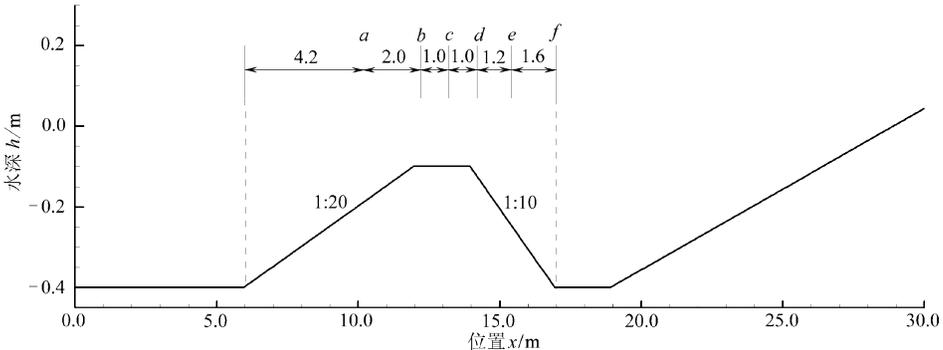


图4 地形

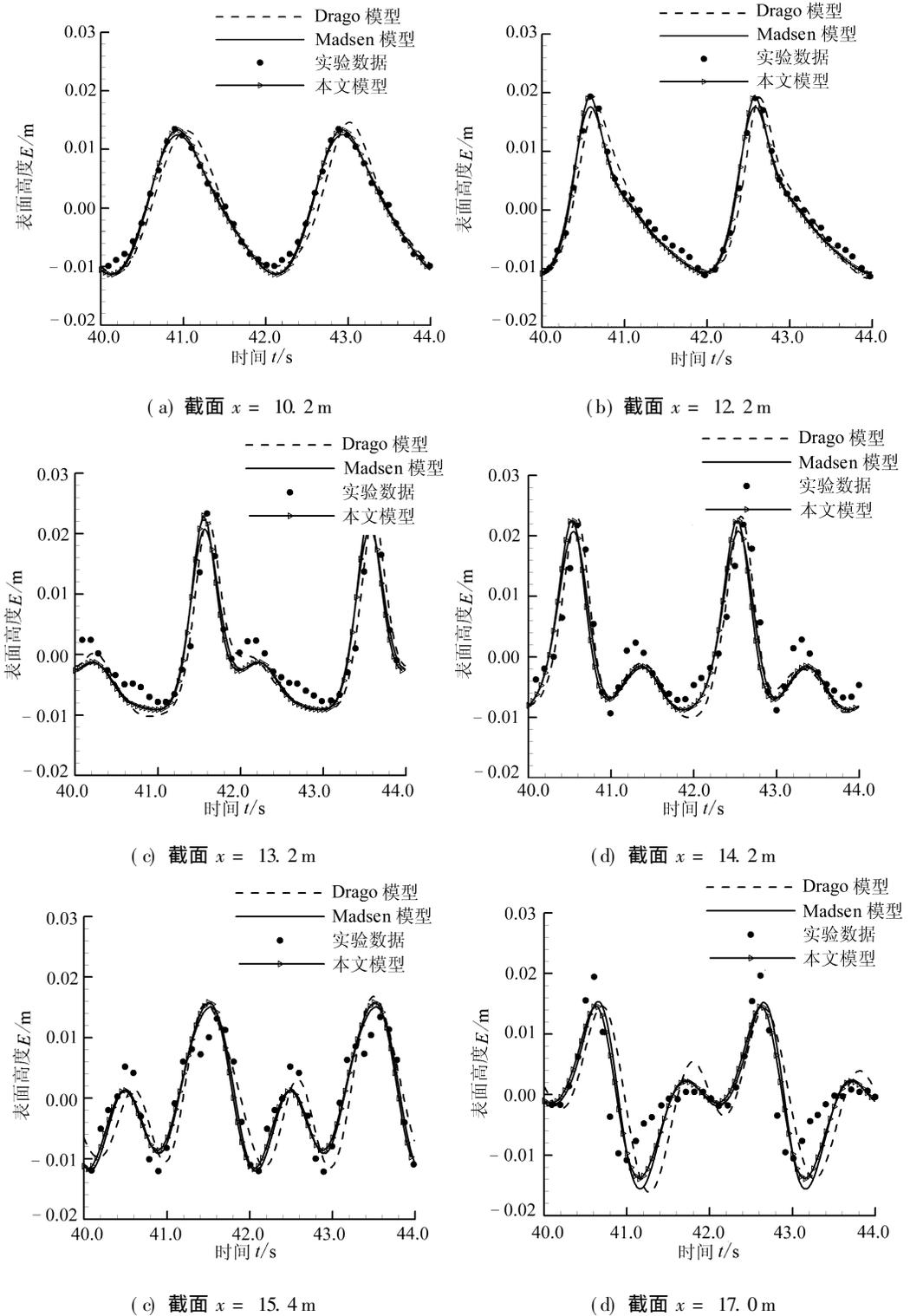


图5 模型计算结果与实验结果的比较

4 结 论

本文通过使用 $\omega/\varepsilon = O(1)$ 近似推导, 得到了一种在不平底上的浅水波浪传播的模型. 这个模型的最高阶导数项是 3 阶. 通过对二阶超谐波和亚谐波的分析, 并与最高阶导数为 3 阶的其他模型(如经典 Boussinesq 模型)比较, 本文模型非线性有所改善. 在色散性上, 本文模型达到了 Pade(2, 2) 阶近似. 同时, 本文模型的浅化性也跟 Madsen 等人^[3]模型达到了同样的精度. 从数值上看, 与 Madsen 模型和 Drago^[15]模型相比, 本文模型能较好地预测波浪传播到潜堤前后的表面高度. 通过与 Beji 和 Battjes^[17]的实验数据比较, 本文的计算结果与实验结果符合较好.

[参 考 文 献]

- [1] Boussinesq M J. Theorie des ondes et des rous qui se propagent le long d'un canal rectangularies horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond[J]. Journal de Mathematique Pures et Appliqu es, Deuxieme Serie, 1872, **17**(1): 55-108.
- [2] Peregrine D H. Long waves on a beach[J]. J Fluid Mech, 1967, **27**(7): 815-827.
- [3] Madsen P A, Sorensen O R. A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics—Part 2: A slowly-varying bathymetry[J]. Coastal Engineering, 1992, **18**(4/3): 183-204.
- [4] Nwogu O. Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation[J]. Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, 1993, **119**(6): 618-638.
- [5] Wei G, Kirby J T, Grilli S T, et al. A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves—Part 1: Highly nonlinear unsteady waves[J]. J Fluid Mech, 1995, **294**(13): 71-92.
- [6] Agnon B Y, Madsen P A, Schaffer H A. A new approach to high order Boussinesq models[J]. J Fluid Mech, 1999, **399**(22): 319-333.
- [7] Gobbi M F, Kirby J T, Wei G. A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves—Part 2: Extension to $O((kh)^4)$ [J]. J Fluid Mech, 2000, **405**(4): 181-210.
- [8] Madsen P A, Bingham B B, Liu Hua. A new Boussinesq method for fully nonlinear waves from shallow to deep water[J]. J Fluid Mech, 2002, **462**(13): 1-30.
- [9] Madsen P A, Fuhrman D R, Wang Ben-long. A Boussinesq-type method for fully nonlinear waves interacting with a rapidly varying bathymetry[J]. Coastal Engineering, 2006, **53**(5/6): 487-504.
- [10] 陶建华. 水波的数值模拟[M]. 天津: 天津大学出版社, 2005, 108.
- [11] Gobbi M F, Kirby J T. A fourth order Boussinesq-type wave model[A]. In: Billy L, Ed. Proceedings of the 25th international Conference on Coastal Engineering [C]. New York: ASCE, 1997, **1**(1): 1116-1129.
- [12] Schaffer H A, Madsen P A. Further enhancements of Boussinesq-type equations[J]. Coastal Engineering, 1995, **26**(1/2): 1-14.
- [13] Madsen P A, Schaffer H A. Higher order Boussinesq-type equations for surface gravity waves-Derivation and analysis[J]. Phil Trans R Soc Lond A, 1998, **356**(12): 1-59.
- [14] Abbott M B, McCowan A D, Warren I R. Accuracy of short wave numerical models[J]. J Hydraul Eng, 1984, **110**(10): 1287-1301.
- [15] Drago M. Mathematical models for propagation of sea waves in the surf zone[D]. Ph D Thesis. Ital-

- ian: University of Bologna, 1991, 135.
- [16] Dean R G, Sharma J N. Simulation of wave systems due to nonlinear directional spectra[J]. Proc Internat Symp Hydrodynamics in Ocean Engng, 1981, 2(1): 1214-1222.
- [17] Beji S, Battjes J A. Experimental investigations of wave propagation over a bar[J]. Coastal Engineering, 1993, 19(1/2): 151-162.

A Boussinesq Model With Improved Nonlinearity and Dispersion

ZHANG Dian-xin, TAO Jian-hua

(Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China)

Abstract: A new form of Boussinesq model over uneven bottom is derived. In the new model, the nonlinearity is improved without increasing the orders of the highest derivative of the differential equations. The dispersion relationship of the model was improved to the order of Pad (2, 2) by adjusting a parameter in the model based on the long wave approximation. The analysis of the linear dispersion, linear shoaling and nonlinearity of the present model shows that the nonlinearity, dispersion and shoaling of this model are improved. The numerical results obtained for the present model were compared with the experimental data, and it is found that the predicted results agree with the experimental data.

Key words: Boussinesq equation; improvement; nonlinearity; dispersion