

翘曲空间曲线梁自然坐标精确解^{*}

朱莉莉^{1,2}, 赵颖华¹

(1. 大连海事大学 道路与桥梁工程研究所, 辽宁 大连 116026;

2. 大连交通大学 机械工程学院, 辽宁 大连 116028

(皓江推荐

摘要: 基于现有空间曲线梁理论, 考虑与扭转有关的翘曲变形和横向剪切变形的影响, 建立了自然标架下空间曲线梁的内力和变形的解析解答. 将该解答应用于受均布扭矩和竖向分布荷载的平面曲线梁的分析, 将所得结果与 Heins 解答进行比较, 证明了理论的正确. 并应用该理论分析了解析式中翘曲和横向剪切变形项的影响.

关键词: 曲线梁; 复杂荷载; 翘曲; 自然坐标; 解析解

中图分类号: TB125 **文献标识码:** A

引 言

曲线梁作为一种重要的结构形式被广泛应用于航天、机械、建筑工程中. 关于曲线梁的研究已有百年的历史^[1]. 经典曲线梁结构理论^[2-3]以平面曲线梁为研究对象, 分析常曲率梁在面外荷载作用下的力学响应, 研究弯扭耦合问题, 给出变形和内力的解析表达式. 在此基础上 Tufekci 和 Dogruer^[4] 计入横向剪切影响, 给出了变曲率、变截面平面拱的面外变形精确解. 针对近年来曲线桥梁面内变形引起破坏的现象, 赵颖华和李晓飞等人^[5-6] 提出了平面曲线梁在面内荷载和变温作用下的位移精确解答. 随着研究的深入, 平面曲线梁的理论成果已经成为曲线桥梁的设计计算依据^[7-9]. 近年来解析分析工作向空间曲线梁拓展, 熊汉伟和张培源^[10] 建立了自然坐标下空间曲杆的控制方程, 并求出其静定问题通解; 朱渝春等人^[11] 给出了各向异性材料薄壁截面空间曲杆双力矩的一般解法; 虞爱民和易名^[12] 考虑与扭转有关的翘曲和横向剪切对截面变形的影响, 通过求解广义翘曲坐标提出了自然弯扭梁受复杂载荷作用时静力分析方法; 郑安节等人^[13] 在文献[10]的理论框架基础上提出了空间曲杆小变形问题自然标架的矩阵分析解答. 由于问题的复杂性, 现有的曲线梁理论研究还存在局限性, 例如大部分成果未计入翘曲的影响, 而考虑翘曲的又未提出显式表达^[12], 不便于实际应用. 本文在现有空间曲线梁理论上, 考虑与扭转相关的翘曲变形和横向剪切变形的影响, 得出空间曲线梁在广义力作用下内力和变形的显式解析解, 并进行了算例验证. 最后应用本文理论分析了翘曲效应

* 收稿日期: 2008-01-14; 修订日期: 2008-04-28

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50578021)

作者简介: 朱莉莉(1979—, 女, 山东黄县人, 博士生;

赵颖华(1954—, 女, 教授, 博士, 博士生导师(联系人, Tel/Fax: + 86-411-84725602; E-mail: yhzha@newmail.dlmu.edu.cn .

对平面曲线梁变形的影响.

1 方程的建立和解答

1.1 现有空间曲线梁的解答

设曲线梁横截面形心的轨迹为一连续空间曲线, 其切线、法线和次法线单位矢量分别用 e_s 、 e_n 、 e_b 表示, e_ξ 和 e_η 分别表示过横截面的形心曲线梁截面主轴 ξ 和 η 方向上的单位矢量, 而 ξ 轴与 e_n 间的夹角记为 θ , s 为曲线的弧坐标. 在空间曲线坐标下考虑曲线梁微段内力和几何变形, 可建立如下方程^[12]:

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \mathbf{Q} - \mathbf{KQ} + \mathbf{p} = \mathbf{0}, \\ \frac{d}{ds} \mathbf{M} - \mathbf{KM} - \mathbf{HQ} + \mathbf{m} = \mathbf{0}, \\ \frac{d}{ds} \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{K}\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}, \\ \frac{d}{ds} \mathbf{u} - \mathbf{Ku} - \mathbf{H}\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (1)$$

$$\quad (2)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \begin{Bmatrix} Q_s & Q_\xi & Q_\eta \end{Bmatrix}^T, \quad \mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_s & M_\xi & M_\eta \end{Bmatrix}^T, \\ \mathbf{p} &= \begin{Bmatrix} p_s & p_\xi & p_\eta \end{Bmatrix}^T, \quad \mathbf{m} = \begin{Bmatrix} m_s & m_\xi & m_\eta \end{Bmatrix}^T, \\ \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} 0 & k_\eta & -k_\xi \\ -k_\eta & 0 & k_s \\ k_\xi & -k_s & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\varphi} &= \begin{Bmatrix} \varphi_s & \varphi_\xi & \varphi_\eta \end{Bmatrix}^T, \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_s & u_\xi & u_\eta \end{Bmatrix}^T, \\ \boldsymbol{\omega} &= \begin{Bmatrix} \omega_s & \omega_\xi & \omega_\eta \end{Bmatrix}^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s & \varepsilon_\xi & \varepsilon_\eta \end{Bmatrix}^T, \end{aligned}$$

其中 \mathbf{Q} 和 \mathbf{M} 为曲线梁任一截面上过形心的主矢和主矩, Q_s 、 Q_ξ 、 Q_η 为轴力和沿 ξ 、 η 向的剪力, M_s 、 M_ξ 、 M_η 分别为扭矩、 $e_s O_1 e_\eta$ 面和 $e_s O_1 e_\xi$ 面内力矩, p_s 、 p_ξ 、 p_η 和 m_s 、 m_ξ 、 m_η 分别表示轴向单位长度的外力和外力矩在标架 e_s 、 e_ξ 、 e_η 上的分量, \mathbf{u} 和 $\boldsymbol{\varphi}$ 为荷载 \mathbf{p} 、 \mathbf{m} 所对应的广义位移, 而 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 为与 \mathbf{Q} 和 \mathbf{M} 相对应的广义应变, $k_\xi = k \sin \theta$, $k_\eta = k \cos \theta$, $k_s = \tau + \theta'$, k 和 τ 分别为曲线的曲率和挠率.

方程(1)、(2)的解答可表示成矩阵形式如下^[12]:

$$\begin{cases} \mathbf{Q} = \mathbf{A} \left[\mathbf{Q}_0 - \int_0^s \mathbf{A}^T \mathbf{p} ds \right], \\ \mathbf{M} = \mathbf{A} \left\{ \mathbf{M}_0 + \int_0^s \mathbf{A}^T \left[\mathbf{HA} \left(\mathbf{Q}_0 - \int_0^s \mathbf{A}^T \mathbf{p} ds \right) - \mathbf{m} \right] ds \right\}, \\ \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{A} \left\{ \boldsymbol{\varphi}_0 + \int_0^s \mathbf{A}^T \mathbf{DM} ds \right\}, \\ \mathbf{u} = \mathbf{A} \left\{ \mathbf{u}_0 + \int_0^s \mathbf{A}^T \left[\mathbf{HA} \left(\boldsymbol{\varphi}_0 + \int_0^s \mathbf{A}^T \mathbf{DM} ds \right) + \mathbf{BQ} \right] ds \right\}, \end{cases} \quad (3)$$

$$\quad (4)$$

式中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} e_s \cdot i_x & e_s \cdot i_y & e_s \cdot i_z \\ e_\xi \cdot i_x & e_\xi \cdot i_y & e_\xi \cdot i_z \\ e_\eta \cdot i_x & e_\eta \cdot i_y & e_\eta \cdot i_z \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1/(EA_s) & & & \\ & 1/(GA_s) & & \\ & & 1/(GA_s) & \\ & & & 1/(GA_s) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1/(GJ) & & & \\ & 1/(EI_\xi) & & \\ & & 1/(EI_\eta) & \\ & & & 1/(EI_\eta) \end{bmatrix},$$

i_x, i_y, i_z 为直角坐标系的基本单位矢量; 而 E, G, A_s, J, I_ξ 和 I_η 分别表示梁的弹性模量、剪切模量、横截面面积、横截面的极惯性矩以及截面关于 ξ, η 轴的惯性矩; Q_0, M_0, φ_0 和 u_0 均为积分常数.

1.2 计入翘曲变形的解答

对于完全弹性材料, 考虑与扭转有关的翘曲变形和横向剪切变形的影响, 可建立曲线梁微段本构方程为

$$\begin{cases} Q_s = EA_s \varepsilon, & Q_\xi = GA_s \varepsilon_\xi, & Q_\eta = GA_s \varepsilon_\eta, \\ M_\xi = EI_\xi \omega_\xi, & M_\eta = EI_\eta \omega_\eta, & M_s = GJ \omega_s - EI_\omega \frac{d^2 \omega_s}{ds^2}, \end{cases} \quad (5)$$

式中 $GJ \omega_s$ 表示 St. Venant 扭转; $-EI_\omega(d^2 \omega_s/ds^2)$ 表示翘曲扭转效应; I_ω 为截面扇形惯性矩.

求解方程 $M_s = GJ \omega_s - EI_\omega(d^2 \omega_s/ds^2)$, 可得通解为

$$\omega_s = \frac{M_s}{GJ} + W_1 e^{Ps} + W_2 e^{-Ps} - \frac{1}{2GJ} \left(e^{Ps} \int e^{-Ps} M'_s ds + e^{-Ps} \int e^{Ps} M'_s ds \right), \quad (6)$$

式中 W_1 和 W_2 为积分常数, 而 $P = \sqrt{GJ/(EI_\omega)}$.

将式(6)代入式(5), 计算后得到

$$\varepsilon = \mathbf{BQ}, \quad \omega = \mathbf{DM} + z, \quad (7)$$

式中

$$z = \left\{ W_1 e^{Ps} + W_2 e^{-Ps} - \frac{1}{2GJ} \left(e^{Ps} \int e^{-Ps} M'_s ds + e^{-Ps} \int e^{Ps} M'_s ds \right) \quad 0 \quad 0 \right\}^T,$$

z 可以通过对式(3)中的 M_s 求微分得到.

将式(7)代入式(2)并求解可得

$$\begin{cases} \varphi = \mathbf{A} \left\{ \varphi_0 + \int_0^s \mathbf{A}^T \mathbf{DM} ds \right\} + \delta_\varphi, \\ \mathbf{u} = \mathbf{A} \left\{ \mathbf{u}_0 + \int_0^s \mathbf{A}^T \left[\mathbf{HA} \left\{ \varphi_0 + \int_0^s \mathbf{A}^T \mathbf{DM} ds \right\} + \mathbf{BQ} \right] ds \right\} + \delta_u, \end{cases} \quad (8)$$

式中 $\delta_\varphi = \mathbf{A} \int_0^s \mathbf{A}^T z ds$ 和 $\delta_u = \mathbf{A} \int_0^s \mathbf{A}^T \mathbf{H} \delta_\varphi ds$ 分别表示翘曲对 φ 和 \mathbf{u} 的影响, 当这两项为 0 时就是空间曲杆不考虑翘曲的情况. 现在剩下的问题就是通过边界条件确定积分常数 Q_0, M_0, φ_0, u_0 以及 W_1 和 W_2 .

在曲线梁端部对应 7 个独立基本未知量的边界条件分为 3 种:

$$\begin{cases} \text{固定端: } u_s = u_\xi = u_\eta = 0, & \varphi_s = \varphi_\xi = \varphi_\eta = 0, & \omega_s = 0; \\ \text{简支端: } u_s = u_\xi = u_\eta = 0, & \varphi_s = M_\xi = M_\eta = 0, & \omega'_s = 0; \\ \text{自由端: } M_s = M_\xi = M_\eta = 0, & Q_s = Q_\xi = Q_\eta = 0, & \omega'_s = 0. \end{cases} \quad (9)$$

如果曲线梁在某处作用有集中荷载, 例如有轴力 F_s 、 ξ 和 η 方向上的剪力 F_ξ 和 F_η 、扭矩 T_s 、

$e_s O_1 e_\eta$ 和 $e_s O_1 e_\xi$ 面内的弯矩 T_ξ 和 T_η , 则应在此位置建立载荷随动坐标轴 s_1 和 s_2 . 该处的边界条件为

$$\begin{cases} u_{s1} = u_{s2}, u_{\xi1} = u_{\xi2}, u_{\eta1} = u_{\eta2}, \varphi_{s1} = \varphi_{s2}, \varphi_{\xi1} = \varphi_{\xi2}, \varphi_{\eta1} = \varphi_{\eta2}, \\ (Q_s)_1 - (Q_s)_2 = F_s, (Q_\xi)_1 - (Q_\xi)_2 = F_\xi, (Q_\eta)_1 - (Q_\eta)_2 = F_\eta, \omega_{s1} = \omega_{s2}, \\ (M_s)_1 - (M_s)_2 = T_s, (M_\xi)_1 - (M_\xi)_2 = T_\xi, (M_\eta)_1 - (M_\eta)_2 = T_\eta, \omega'_{s1} = \omega'_{s2}. \end{cases} \quad (10)$$

2 平面曲线梁解答

平面曲线梁是最常见的曲线梁形式, 关于平面曲线梁的研究成果相对较多. 这里将应用上述理论求解均布扭矩和均布铅直荷载作用下平面曲线梁(图 1, 给出受力和变形的精确解, 将其与 Heins 解答^[2]比较, 以验证本解答的正确.

令 $\tau = 0$ 即平面曲线梁的情况. 将局部直角坐标系的原点置于曲线梁端部($s = 0$), 并取梁轴线在 $X-Y$ 平面内, 则 $\theta = 0$. 荷载向量简化为

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & q_z \end{Bmatrix}^T, \quad \mathbf{m} = \begin{Bmatrix} m_s & 0 & 0 \end{Bmatrix}^T.$$

设曲线梁轴线是半径为 r 的圆弧, 则有 $\beta = s/r$, $k\eta = k = 1/r$, 并

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{i}_x & \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{i}_y & \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{i}_z \\ \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{i}_x & \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{i}_y & \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{i}_z \\ \mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{i}_x & \mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{i}_y & \mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{i}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

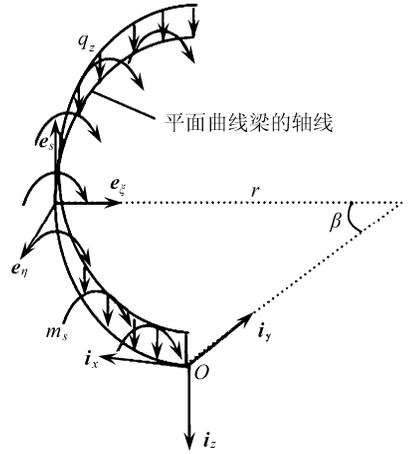


图 1 平面曲线梁的受力图

将上述条件带入式(3) 可得到梁内力分量表达式如

下:

$$\begin{cases} Q_s = Q_{0s} \cos \frac{s}{r} + Q_{0\xi} \sin \frac{s}{r}, \\ Q_\xi = -Q_{0s} \sin \frac{s}{r} + Q_{0\xi} \cos \frac{s}{r}, \\ Q_\eta = -q_z s + Q_{0\eta}, \\ M_s = q_z r \left(r \sin \frac{s}{r} - s \right) - m_s r \sin \frac{s}{r} + Q_{0\eta} r \left(1 - \cos \frac{s}{r} \right) + \\ \quad M_{0s} \cos \frac{s}{r} + M_{0\xi} \sin \frac{s}{r}, \\ M_\xi = (m_s r - q_z r^2) \left(1 - \cos \frac{s}{r} \right) + M_{0\xi} \cos \frac{s}{r} + (Q_{0\eta} r - M_{0s}) \sin \frac{s}{r}, \\ M_\eta = Q_{0s} r \left(1 - \cos \frac{s}{r} \right) - Q_{0\xi} r \sin \frac{s}{r} + M_{0\eta}, \end{cases} \quad (11)$$

其中 Q_{0i} 和 M_{0i} 为 Q_i 、 M_i 在曲线梁边界 $s = 0$ 处的值, 需根据曲线梁端部受力条件确定.

同理可由式(8) 求出平面曲线梁的转角和位移分量:

$$\left\{ \begin{aligned}
 \varphi_s &= \frac{1}{2EI\xi} \left[(qz - m_s)rc + M_{0\xi} s \sin \frac{s}{r} + lb \right] + \frac{1}{2GJ} \left[(M_{0\xi} - m_s r) s \sin \frac{s}{r} + \right. \\
 &\quad \left. M_{0s}d - Q_{0\eta}rb + qz^2c \right] + \varphi_{0s} \cos \frac{s}{r} + \varphi_{0\xi} \sin \frac{s}{r} + \delta_{\varphi_s}, \\
 \varphi_\xi &= \frac{1}{2EI\xi} \left[(qz - m_s)rb - ls \sin \frac{s}{r} + M_{0\xi}d \right] + \frac{1}{2GJ} \left\{ (M_{0\xi} - m_s r) b + \right. \\
 &\quad \left. qz^2 \left[s \left(2 + \cos \frac{s}{r} \right) - 3r \sin \frac{s}{r} \right] + Q_{0\eta}rc - M_{0s} s \sin \frac{s}{r} \right\} + \\
 &\quad \varphi_{0\xi} \cos \frac{s}{r} - \varphi_{0s} \sin \frac{s}{r} + \delta_{\varphi_\xi}, \\
 \varphi_\eta &= \varphi_{0\eta} - \frac{1}{EI\eta} \left[Q_{0\xi} r^2 \left(1 - \cos \frac{s}{r} \right) - M_{0\eta} s - Q_{0s} r \left(-r \sin \frac{s}{r} + s \right) \right], \\
 u_s &= \frac{r}{2EI\eta} \left\{ 2M_{0\eta} \left[s - r \sin \frac{s}{r} \right] + Q_{0s} r \left[s \left(2 + \cos \frac{s}{r} \right) - 3r \sin \frac{s}{r} \right] + Q_{0\xi} r c \right\} + \\
 &\quad \frac{1}{2GA_s} \left[Q_{0s} \cos \frac{s}{r} + (Q_{0\xi} s - Q_{0s} r) \sin \frac{s}{r} \right] + \frac{1}{2EA_s} \left[Q_{0s} \cos \frac{s}{r} + \right. \\
 &\quad \left. (Q_{0s} r + Q_{0\xi} s) \sin \frac{s}{r} \right] + \varphi_{0\eta} r + (u_{0s} - \varphi_{0\eta} r) \cos \frac{s}{r} + u_{0\xi} \sin \frac{s}{r}, \\
 u_\xi &= \frac{-r^2}{2EI\eta} \left\{ 2M_{0\eta} \left[\cos \frac{s}{r} - 1 \right] - Q_{0\xi} b + Q_{0s} c \right\} + \frac{1}{2GA_s} \left[Q_{0\xi} s \cos \frac{s}{r} + \right. \\
 &\quad \left. (Q_{0\xi} r - Q_{0s} s) \sin \frac{s}{r} \right] + \frac{1}{2EA_s} \left[Q_{0\xi} s \cos \frac{s}{r} - (Q_{0\xi} r + Q_{0s} s) \sin \frac{s}{r} \right] + \\
 &\quad u_{0\xi} \cos \frac{s}{r} + (\varphi_{0\eta} r - u_{0s}) \sin \frac{s}{r}, \\
 u_\eta &= -\frac{1}{2EI\xi} \left[M_{0\xi} r s \sin \frac{s}{r} + lrb + (qz - m_s) r^2 c \right] + \frac{1}{2GJ} \left\{ -M_{0s} r b + \right. \\
 &\quad \left. Q_{0\eta} r^2 \left[s \left(2 + \cos \frac{s}{r} \right) - 3r \sin \frac{s}{r} \right] + (m_s r - M_{0\xi}) r c - \right. \\
 &\quad \left. qz^2 \left[4r^2 \left[\cos \frac{s}{r} - 1 \right] + s \left[s + r \sin \frac{s}{r} \right] \right] \right\} + \frac{1}{GA_s} \left(Q_{0\eta} s - \frac{qz^2}{2} \right) + \\
 &\quad u_{0\eta} - r \left(\varphi_{0s} \cos \frac{s}{r} + \varphi_{0\xi} \sin \frac{s}{r} \right) + \delta_{u_\eta},
 \end{aligned} \right. \quad (12)$$

式中 φ_{0i} 和 u_{0i} 为 φ_i 、 u_i 在曲线梁边界 $s = 0$ 处的值, 而 δ_{φ_s} 、 δ_{φ_ξ} 、 δ_{u_η} 这 3 项分别表示翘曲对 φ_s 、 φ_ξ 和 u_η 的影响, 有

$$\begin{aligned}
 \delta_{\varphi_s} &= -\frac{1}{2GJ(1+P^2r^2)} \left\{ js \sin \frac{s}{r} + ld - 2GJr \left[W_1 \left(e^{Ps} Pr - Pr \cos \frac{s}{r} + \sin \frac{s}{r} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. W_2 \left(-e^{-Ps} Pr + Pr \cos \frac{s}{r} + \sin \frac{s}{r} \right) \right] \right\}, \\
 \delta_{\varphi_\xi} &= -\frac{1}{2GJ(1+P^2r^2)} \left\{ jb - ls \sin \frac{s}{r} - 2GJr \left[W_1 \left(\cos \frac{s}{r} - \cosh(Ps) + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. Pr \sin \frac{s}{r} - \sinh(Ps) \right) + W_2 \left(\cos \frac{s}{r} - \cosh(Ps) - Pr \sin \frac{s}{r} + \sinh(Ps) \right) \right] \right\}, \\
 \delta_{u_\eta} &= -\frac{r}{2PGJ(1+P^2r^2)} \left\{ -P(lb + jc) + GJ \left[W_1 \left(g + 2Pr \sin \frac{s}{r} \right) - \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$W_2 \left\{ f - 2Pr \sin \frac{s}{r} \right\} \Bigg\},$$

式中

$$b = s \cos \frac{s}{r} - r \sin \frac{s}{r}, \quad c = 2r \left(\cos \frac{s}{r} - 1 \right) + s \sin \frac{s}{r}, \quad d = s \cos \frac{s}{r} + r \sin \frac{s}{r},$$

$$f = 2 \left[1 - e^{-Ps} + P^2 r^2 \left(1 - \cos \frac{s}{r} \right) \right], \quad g = 2 \left[1 - e^{Ps} + P^2 r^2 \left(1 - \cos \frac{s}{r} \right) \right],$$

$$l = M_{0s} - Q_{0\eta} r, \quad j = M_{0\xi} - m_s r + q_z r^2,$$

P 同式(6). 可以看到, 当 $r \rightarrow \infty$, 即直梁的情况, $\delta_{\xi}, \delta_{\eta}$ 均等于 0, 这符合直梁弯扭不耦合的性质.

文献[2]中仅给出了扭转角 φ_s 和 i_z 方向挠度 u_{η} 的解答, 比较式(12)中相应的转角和位移, 可以看到两者的 φ_s 解答完全相同, 但 u_{η} 的解答却存在差异, 这是因为本文计入了横向剪切变形, 增加了

$$\frac{1}{GA_s} \left[Q_{0\eta} s - \frac{q_z s^2}{2} \right]$$

一项. 剪切变形对 u_s 和 u_{ξ} 也有影响, 两位移分量表达式各增加了

$$\frac{1}{2GA_s} \left[Q_{0s} s \cos \frac{s}{r} + (Q_{0\xi} s - Q_{0s} r) \sin \frac{s}{r} \right], \quad \frac{1}{2GA_s} \left[Q_{0\xi} s \cos \frac{s}{r} + (Q_{0\xi} r - Q_{0s} s) \sin \frac{s}{r} \right]$$

一项.

应用上述解答进行实例计算. 分别讨论平面曲线梁两端固定和两端简支两种边界情况, 工字形横截面尺寸参数见表 1. 其它计算数据如下^[2]:

$$E = 3 \times 10^6 \text{ N/mm}^2, \quad G = 1.2 \times 10^6 \text{ N/mm}^2, \quad S = 180 \text{ cm}, \quad r = 240 \text{ cm},$$

$$m_s = -0.222 \text{ N}, \quad q_z = 0.022 \text{ N/cm}.$$

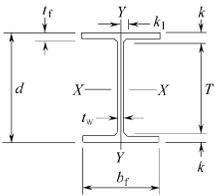
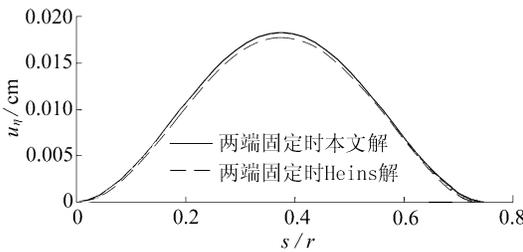
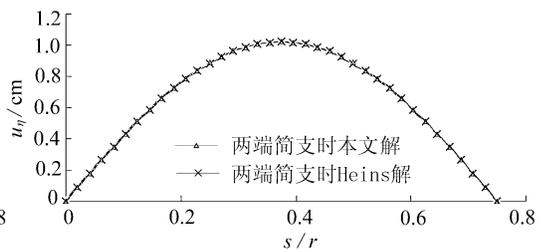


表 1		工字形梁截面的尺寸参数					cm
A / cm^2	d	t_w	b_f	t_f	k	k_1	
14.4	9.98	0.34	10	0.56	1.1875	0.6875	



(a) 两端固定梁



(b) 两端简支梁

图 2 平面曲线梁 m_s, q_z 作用下的挠度 u_{η}

挠度 u_{η} 变化如图 2 所示, 可以看出横向剪切变形对于两端固定梁的挠度 u_{η} 有一定的影响, 而在两端简支时影响甚微.

3 翘曲变形效应

为了分析翘曲对曲线梁变形的影响,应用式(11)、(12)分析平面曲线梁,计算参数见上节.取两端固定和两端简支两种边界支承情况,讨论 $r = 2S$ 时翘曲变形对 φ_s 、 φ_ξ 和 u_η 的影响.

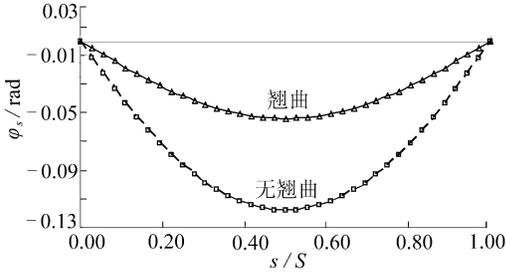


图 3a 翘曲效应对简支梁 φ_s 的影响

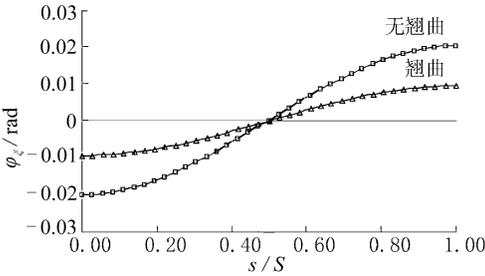


图 3b 翘曲效应对简支梁 φ_ξ 的影响

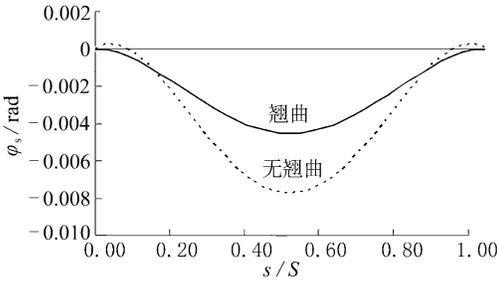


图 4a 翘曲效应对固支梁 φ_s 的影响

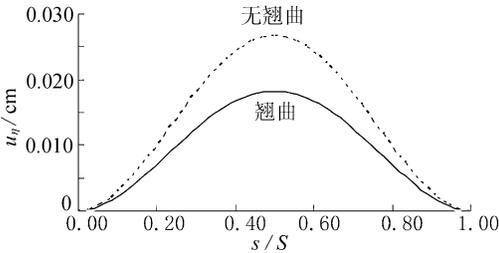


图 4c 翘曲效应对固支梁 u_η 的影响

图 3、4 分别表示在两种支承条件下翘曲效应对曲率半径 $r = 360$ cm 的平面曲线梁中性轴的 3 个变形分量的影响. 由图可见, 翘曲效应不仅仅影响扭转变形, 对弯曲变形也有很大影响. 且计入翘曲的影响时 φ_s 、 φ_ξ 和 u_η 的值都减小, 这可用能量观点解释, 即外力功有相当一部分转化成了局部翘曲变形成.

图 5 表示梁跨长不变而曲率半径变化, 不计入翘曲影响所产生的最大变形相对误差 $\Delta\varphi_s$ 、

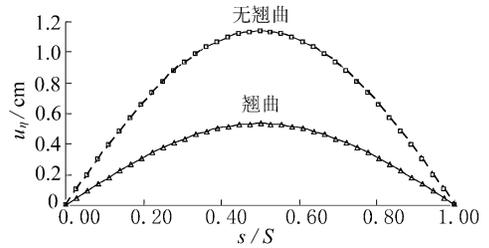


图 3c 翘曲效应对简支梁 u_η 的影响

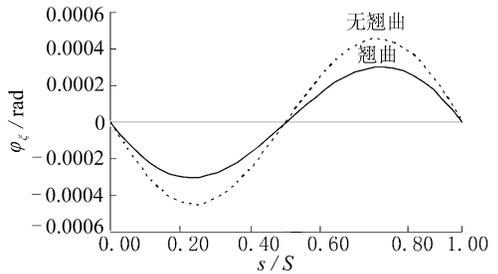


图 4b 翘曲效应对固支梁 φ_ξ 的影响

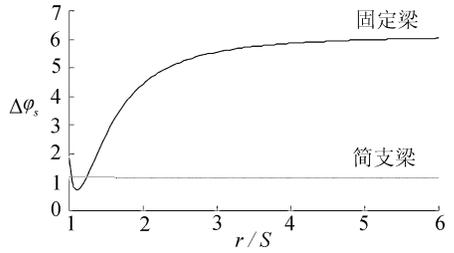
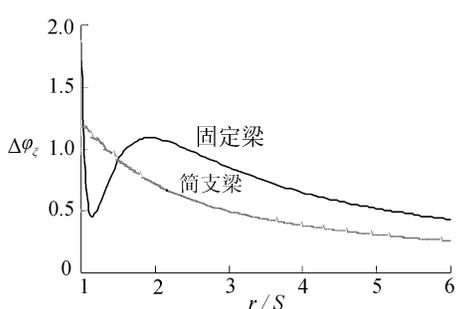
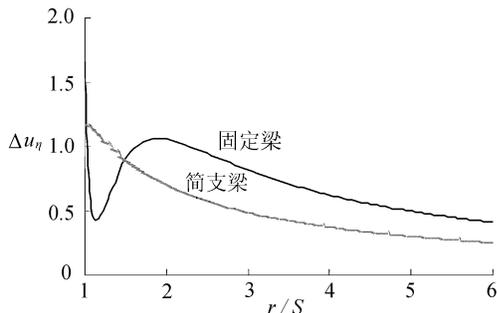


图 5a 翘曲效应对 φ_s 的影响

$\Delta\varphi_\xi$ 、 Δu_η , 分别对应最大变形 φ_{smax} 、 $\varphi_{\xi max}$ 、 $u_{\eta max}$. 可以看到固支曲线梁的翘曲变形效应比简支

图 5b 翘曲效应对 ϕ_{ξ} 的影响图 5c 翘曲效应对 u_{η} 的影响

梁要大. 当不考虑翘曲变形, 固支梁除在 r/S 变化较小 (< 2) 的情况下有突变外, 随着曲率半径增大 (即更接近于直梁时), $\Delta\phi_{\xi}$ 逐渐增大, 而 $\Delta\phi_{\xi}$ 和 Δu_{η} 则逐渐变小. 简支梁的 3 个相对误差值均随曲率半径的增大而减小. 当 $r/S \rightarrow \infty$ 即为直梁时, 因弯扭不耦合, 翘曲效应对弯曲变形的影响消失, 见图 5(b)、(c).

4 结 论

1 在现有空间曲线梁理论的基础上, 考虑与扭转有关的翘曲变形和横向剪切变形的影响, 得到了空间曲线梁在复杂荷载作用下的内力、弯扭变形以及翘曲变形的显式解答.

2 给出了平面曲线梁受均布扭矩和竖向分布荷载的解析解, 计算结果与 Heins 解答进行比较, 证明了本文理论的正确性, 并分析了解析式中横向剪切变形项的影响.

3 通过算例讨论了平面曲线梁的翘曲变形效应. 分析结果显示翘曲效应对扭转和弯曲变形均有不容忽视的影响, 后者随 r/S 的增加而减小, 并逐渐消失. 与端部简支曲线梁相比, 固支梁的翘曲效应更为突出.

[参 考 文 献]

- [1] 赵跃宇, 康厚军, 冯锐, 等. 曲线梁研究进展[J]. 力学进展, 2006, 36(2): 170-186.
- [2] Heins C P. 结构杆件的弯曲与扭转[M]. 常岭, 吴绍本 译校. 北京: 人民交通出版社, 1981.
- [3] 姚玲森. 曲线梁[M]. 北京: 人民交通出版社, 1989.
- [4] Tufekci E, Dogruer O Y. Exact solution of out-of-plane problems of an arch with varying curvature and cross section[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2006, 132(6): 600-609.
- [5] 赵颖华, 李晓飞. 多跨曲线桥在集中荷载和变温作用下横向位移[J]. 沈阳建筑工程学院学报, 2004, 20(2): 97-99.
- [6] Li Xiao-fei, Liu Feng, Zhao Ying-hua. Analytical solution for in-plane displacement of multi-span curved bridge[A]. In: PENG Qi-yuan, Kelvin C P, Wang, et al, Eds. International Conference on Transportation Engineering 2007[C]. Chengdu: ASCE, 2007, 1022-1027.
- [7] 邵容光, 夏淦. 混凝土弯梁桥[M]. 北京: 人民交通出版社, 1994.
- [8] 高岛春生. 曲线桥梁[M]. 张德礼 译. 北京: 中国建筑工业出版社, 1979.
- [9] 孙广华. 曲线桥梁计算[M]. 北京: 人民交通出版社, 1995.
- [10] 熊汉伟, 张培源. 空间曲杆有限元分析[J]. 重庆大学学报, 1997, 20(4): 31-36.
- [11] 朱渝春, 张培源, 严波. 封闭薄壁截面空间曲杆的双力矩[J]. 应用数学和力学, 1999, 20(12): 1252-1258.
- [12] 虞爱民, 易明. 自然弯扭梁广义翘曲坐标的求解[J]. 应用数学和力学, 2004, 25(10): 1067-1075.

- [13] 郑安节, 张晓敏, 严波. 空间曲杆小变形问题自然标架的矩阵分析解[J]. 重庆大学学报, 2006, 29(6): 124-126.

Exact Solution of Spatial Warping Curved Beams in Natural Coordinates

ZHU Li-li^{1,2}, ZHAO Ying-hua¹

(1. Institute of Road and Bridge Engineering, Dalian Maritime University,
Dalian 116026, P.R. China;

2. School of Mechanical Engineering, Dalian Jiaotong University,
Dalian 116028, P.R. China

Abstract: The purpose is to present an exact analytical solution of the spatial curved beam under multiple loads based on the existed theory. The transverse shear deformation and torsion-related warping effects are taken into account. By using this solution, a plane curved beam subjected to uniform vertical loads and torsions was analyzed. The accuracy and the efficiency of present theory were demonstrated by comparing its numerical results with Heins' solution. Besides, the effects of the transverse shear deformation and torsion-related warping on the deformations of the beam were discussed.

Key words: curved beam; multiple load; warping; natural coordinate; analytical solution