应用数学和力学, 第 29 卷 第 7 期
2008 年 7 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 29, No. 7, Jul. 15, 2008

文章编号: 1000-0887(2008) 07-0864-07

关于"块 H-矩阵与块矩阵的谱"一文的注记*

刘建州, 黄泽军

(湘潭大学 数学与计算科学学院, 湖南 湘潭 411105)

(郭兴明推荐)

摘要: 完善了"块 H-矩阵与块矩阵的谱"一文中的主要结论. 进一步, 给出了分块矩阵特征值的一个新包含域, 并用实例说明了新结论的优越性.

关 键 词: G-函数; 分块矩阵; 特征值

中图分类号: O151.21 文献标识码: A

1 引言与符号

分块矩阵在计算数学、矩阵理论中有着广泛的应用. 自从 Feingold 和 Varga[1] 首先提出了矩阵的块对角占优性, 近年来, 很多学者对此进行了颇有价值的推广, 如文献[2-6]. 文献[4]利用 G-函数的性质对分块矩阵的特征值问题进行了研究. 本文完善了文献[4]中的主要结论, 进一步, 我们给出了分块矩阵特征值的一个新包含域, 并用实例说明了新结论的优越性.

为叙述方便, 我们先引入一些记号与定义.

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{C})$ 且分块如下:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1k} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{k1} & \boldsymbol{A}_{k2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{kk} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ii} \in M_{n_i}(\mathbf{C})(i = 1, 2, \cdots, k)$ 且非奇异, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. 记 $K = \{1, 2, \cdots, k\}$, $\sigma(\boldsymbol{A})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的谱, $\|\cdot\|$ 为任意的诱导矩阵范数, $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A}) \triangleq (t_{ij})_{k\times k}$, 其中

$$t_{ij} = \begin{cases} \|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}, & i = j, \\ -\|\boldsymbol{A}_{ij}\|, & i \neq j. \end{cases} \quad i, j \in K.$$

定义 1 记 $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 为 n 维实值函数集, 其中 $f_i(\boldsymbol{A}): M_n(\mathbf{C}) \to \mathbf{R}^+$ (非负实数集) 且仅依赖于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非对角元的模. 若任意满足 $|a_{ii}| > f_i(\boldsymbol{A})$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 的 $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbf{C})$ 非奇异, 则称 $\boldsymbol{f}$ 是一个 G- 函数, 记为 $\boldsymbol{f} \in g_n$.

显然, 若 $f_i(\boldsymbol{A})$ 为下列之一, 则 $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_n) \in g_n$:

* 收稿日期: 2007-03-12; 修订日期: 2008-05-07
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671164); 湖南省教育厅重点资助项目(06A070)
作者简介: 刘建州(1960—), 男, 武冈人, 教授(联系人. Tel: +86-732-8293372; E-mail: liujz@xtu.edu.cn).

$$f_i(\boldsymbol{A}) = \sum_{j\neq i} |a_{ij}|,$$

$$f_i(\boldsymbol{A}) = \alpha\sum_{j\neq i} |a_{ij}| + (1-\alpha)\sum_{j\neq i} |a_{ji}|, \qquad \alpha \in [0,1],$$

$$f_i(\boldsymbol{A}) = \left(\sum_{j\neq i} |a_{ij}|\right)^{\alpha}\left(\sum_{j\neq i} |a_{ji}|\right)^{1-\alpha}, \qquad \alpha \in [0,1],$$

$$f_i(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{x_i}\sum_{j\neq i} x_j |a_{ij}|, \qquad x_1, x_2, \cdots, x_n > 0.$$

定义 2 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{C})$ 且分块形如式(1), 若

$$\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1} > \sum_{j\neq i}\|\boldsymbol{A}_{ij}\|, \qquad \forall i \in K,$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为块严格对角占优矩阵, 记为 $\boldsymbol{A} \in \mathrm{BD}$; 若存在 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_k)^{\mathrm{T}} > 0$ 使得

$$x_i\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1} > \sum_{j\neq i} x_j\|\boldsymbol{A}_{ij}\|, \qquad \forall i \in K,$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为块 H- 矩阵, 记为 $\boldsymbol{A} \in \mathrm{BH}$; 若存在 $\boldsymbol{f} \in g_k$ 使得

$$\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1} > f_i(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})), \qquad \forall i \in K,$$

则称 $\boldsymbol{A} \in \mathrm{BGD}$; 若存在 $\boldsymbol{f} \in g_k$ 使得

$$\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}\|\boldsymbol{A}_{jj}^{-1}\|^{-1} > f_i(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A}))f_j(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})), \qquad \forall i, j \in K,\ i \neq j,$$

则称 $\boldsymbol{A} \in \mathrm{BGD}_m$.

2 关于文献[4]中结论的完善

这一节中, 我们指出文献[4]中结果的缺陷并完善了这些结果.

文献[4]中给出了矩阵特征值分布的如下结论:

结论 1[4] 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{C})$ 且分块形如(1), 则 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值均位于如下区域之中

$$\bigcup_{i=1}^{k} G_i = \bigcup_{i=1}^{k}\left\{z \in \mathbf{C} \,\middle|\, \|(\boldsymbol{A}_{ii} - z\boldsymbol{I}_{n_i})^{-1}\|^{-1} \leqslant f_i(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{f} \in g_k\right\}.$$

结论 2[4] 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{C})$ 且分块形如式(1), 则 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值均位于如下区域之中:

$$\bigcup_{j\neq i} G_{i,j} = \bigcup_{j\neq i}\Big\{z \in \mathbf{C} \,\Big|\, \|(\boldsymbol{A}_{ii} - z\boldsymbol{I}_{n_i})^{-1}\|^{-1}\|(\boldsymbol{A}_{jj} - z\boldsymbol{I}_{n_j})^{-1}\|^{-1} \leqslant f_i(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A}))f_j(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})), \boldsymbol{f} \in g_k\Big\}, \qquad i, j \in K.$$

观察下例:

例 1 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

将 $\boldsymbol{A}$ 分块如下:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}_{21} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}_{22} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

容易验证 0 和 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 同时也是 $\boldsymbol{A}_{11}$、$\boldsymbol{A}_{22}$ 的特征值, 显然当 $z = 0$ 或 2 时, $\|(\boldsymbol{A}_{11} - z\boldsymbol{I}_2)^{-1}\|^{-1}$ 和 $\|(\boldsymbol{A}_{22} - z\boldsymbol{I}_2)^{-1}\|^{-1}$ 都不存在, 故

$$0,2 \notin \bigcup_{i=1}^{k} G_i = \bigcup_{i=1}^{2}\left\{z \in \mathbf{C} \mid \|(\boldsymbol{A}_{ii} - z\boldsymbol{I}_{n_i})^{-1}\|^{-1} \leqslant f_i(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{f} \in g_k\right\}.$$

且

$$0,2 \notin \bigcup_{j\neq i} G_{i,j} = \bigcup_{j\neq i}\left\{z \in \mathbf{C} \mid \|(\boldsymbol{A}_{ii} - z\boldsymbol{I}_{n_i})^{-1}\|^{-1}\|(\boldsymbol{A}_{jj} - z\boldsymbol{I}_{n_j})^{-1}\|^{-1} \leqslant f_i(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A}))f_j(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})), \boldsymbol{f} \in g_k\right\}, \qquad i,j = 1,2.$$

由上可见，结论1和结论2的结果还不够完善．究其原因，是当 $z \in \sigma(\boldsymbol{A}_{ii})$ 时，$(\boldsymbol{A}_{ii} - z\boldsymbol{I}_2)^{-1}$ 不存在．下面我们对结论1和结论2进行修正．

定理1 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{C})$ 且分块形如式(1)，则 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值均位于如下区域之中：

$$G^{(1)}(\boldsymbol{A}) = \bigcup_{i=1}^{k}\sigma(\boldsymbol{A}_{ii}) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} G_i\right),$$

其中 $$G_i = \left\{z \in \mathbf{C} \mid \|(\boldsymbol{A}_{ii} - z\boldsymbol{I}_{n_i})^{-1}\|^{-1} \leqslant f_i(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})), \boldsymbol{f} \in g_k\right\}.$$

证明 用反证法．若 $\boldsymbol{A}$ 的某特征值 $\lambda \notin G^{(1)}(\boldsymbol{A})$，则

$$\|(\boldsymbol{A}_{ii} - \lambda\boldsymbol{I}_{n_i})^{-1}\|^{-1} > f_i(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})) = f_i(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}_n)), \qquad \forall i \in K.$$

由 $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_k) \in g_k$ 知 $\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}_n \in \mathrm{BGD}$，于是由文献[4]知 $\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}_n$ 非奇异，即 λ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，矛盾．

同样可得

定理2 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{C})$ 且分块形如式(1)，则 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值均位于如下区域之中

$$G^{(2)}(\boldsymbol{A}) = \bigcup_{i=1}^{k}\sigma(\boldsymbol{A}_{ii}) \cup \left(\bigcup_{j\neq i} G_{i,j}\right),$$

其中

$$G_{i,j} = \left\{z \in \mathbf{C} \mid \|(\boldsymbol{A}_{ii} - z\boldsymbol{I}_{n_i})^{-1}\|^{-1}\|(\boldsymbol{A}_{jj} - z\boldsymbol{I}_{n_j})^{-1}\|^{-1} \leqslant f_i(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A}))f_j(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})), \boldsymbol{f} \in g_k\right\}, \qquad i,j \in K.$$

3 分块矩阵特征值的一个新包含域

本节我们给出分块矩阵特征值的一个新包含域．

引理 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{C})$ 且分块形如式(1)，若存在 $\alpha, \beta \subset K$，$\alpha \cup \beta = K$，$\alpha \cap \beta = \varnothing$，使

$$\Big[\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1} - \sum_{t\in\alpha, t\neq i}\|\boldsymbol{A}_{it}\|\Big]\Big[\|\boldsymbol{A}_{jj}^{-1}\|^{-1} - \sum_{t\in\beta, t\neq j}\|\boldsymbol{A}_{jt}\|\Big] > \sum_{t\in\beta}\|\boldsymbol{A}_{it}\|\sum_{t\in\alpha}\|\boldsymbol{A}_{jt}\|, \qquad \forall i \in \alpha, j \in \beta, \tag{2}$$

且或者存在 $i \in \alpha$ 使 $\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1} > \sum_{t\in\alpha, t\neq i}\|\boldsymbol{A}_{it}\|$，或者存在 $j \in \beta$ 使 $\|\boldsymbol{A}_{jj}^{-1}\|^{-1} > \sum_{t\in\beta, t\neq j}\|\boldsymbol{A}_{jt}\|$，则 $\boldsymbol{A} \in \mathrm{BH}$．

证明 假设定理条件成立，若存在 $i_0 \in \alpha$ 使得

$$\|\boldsymbol{A}_{i_0i_0}^{-1}\|^{-1} > \sum_{t\in\alpha, t\neq i_0}\|\boldsymbol{A}_{i_0t}\|,$$

则 $\forall j \in \beta$，由式(2)有

$$\Big[\|\boldsymbol{A}_{i_0i_0}^{-1}\|^{-1} - \sum_{t\in\alpha, t\neq i_0}\|\boldsymbol{A}_{i_0t}\|\Big]\Big[\|\boldsymbol{A}_{jj}^{-1}\|^{-1} - \sum_{t\in\beta, t\neq j}\|\boldsymbol{A}_{jt}\|\Big] > \sum_{t\in\beta}\|\boldsymbol{A}_{i_0t}\|\sum_{t\in\alpha}\|\boldsymbol{A}_{jt}\| \geqslant 0,$$

从而

$$\|A_{jj}^{-1}\|^{-1}-\sum_{t\in\beta,\ t\neq j}\|A_{jt}\|>0,\qquad \forall j\in\beta;\tag{3}$$

$\forall i\in\alpha, j\in\beta$, 由式(2)有

$$[\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}-\sum_{t\in\alpha,\ t\neq i}\|A_{it}\|][\|A_{jj}^{-1}\|^{-1}-\sum_{t\in\beta,\ t\neq j}\|A_{jt}\|]>\sum_{t\in\beta}\|A_{it}\|\sum_{t\in\alpha}\|A_{jt}\|\geqslant 0,$$

由式(3)可知

$$\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}-\sum_{t\in\alpha,\ t\neq i}\|A_{it}\|>0,\qquad \forall i\in\alpha.\tag{4}$$

若存在 $j_0\in\beta$ 使 $\|A_{j_0j_0}^{-1}\|^{-1}>\sum_{t\in\beta,\ t\neq j_0}\|A_{j_0t}\|$, 同理可证式(3)和式(4)成立.

取 d 满足

$$\min_{i\in\alpha}\frac{\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}-\sum_{t\in\alpha,\ t\neq i}\|A_{it}\|}{\sum_{t\in\beta}\|A_{it}\|}>d>\max_{j\in\beta}\frac{\sum_{t\in\alpha}\|A_{jt}\|}{\|A_{jj}^{-1}\|^{-1}-\sum_{t\in\beta,\ t\neq j}\|A_{jt}\|},\tag{5}$$

令 $D_1=\mathrm{diag}(d_i\mid d_i=1, i\in\alpha; d_i=d, i\in\beta)$, 由式(3) ~ (5) 知 D_1 为正对角阵, 且 $B=T(A)D_1=(b_{ij})_{k\times k}$ 满足

$\forall i\in\alpha$ 时:

$$|b_{ii}|=\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}>\sum_{t\in\alpha,\ t\neq i}\|A_{it}\|+d\sum_{t\in\beta}\|A_{it}\|=\sum_{t\neq i}|b_{it}|;$$

$\forall j\in\beta$ 时:

$$|b_{jj}|=d\|A_{jj}^{-1}\|^{-1}>\sum_{t\in\alpha}\|A_{jt}\|+d\sum_{t\in\beta,\ t\neq j}\|A_{jt}\|=\sum_{t\neq j}|b_{jt}|.$$

所以 $B=T(A)D_1$ 为严格对角占优矩阵, 于是取 $X=\mathrm{diag}(d_1I_{n_1}, d_2I_{n_2}, \cdots, d_kI_{n_k})$ (其中 $d_i=1$, $i\in\alpha$; $d_i=d$, $i\in\beta$), 则 $AX\in BD$, 从而 $A\in BH$.

定理3 设 $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbf{C})$ 且分块形如式(1), $\alpha,\beta\subset K$, $\alpha\cup\beta=K$, $\alpha\cap\beta=\emptyset$, 则 A 的所有特征值均位于如下区域之中:

$$G^{(3)}(A)=\bigcup_{i=1}^{k}\sigma(A_{ii})\cup G_\alpha\cup G_\beta\cup G_{\alpha\beta},$$

其中

$$G_\alpha=\bigcup_{i\in\alpha}\left\{z\in\mathbf{C}\,\|(A_{ii}-zI_{n_i})^{-1}\|^{-1}\leqslant\sum_{t\in\alpha,\ t\neq i}\|A_{it}\|\right\},$$

$$G_\beta=\bigcup_{j\in\beta}\left\{z\in\mathbf{C}\,\|(A_{jj}-zI_{n_j})^{-1}\|^{-1}\leqslant\sum_{t\in\beta,\ t\neq j}\|A_{jt}\|\right\},$$

$$G_{\alpha\beta}=\bigcup_{\substack{i\in\alpha\\ j\in\beta}}\left\{z\in\mathbf{C}\,[\|(A_{ii}-zI_{n_i})^{-1}\|^{-1}-\sum_{t\in\alpha,\ t\neq i}\|A_{it}\|][\|(A_{jj}-zI_{n_j})^{-1}\|^{-1}-\sum_{t\in\beta,\ t\neq j}\|A_{jt}\|]\leqslant\sum_{t\in\beta}\|A_{it}\|\sum_{t\in\alpha}\|A_{jt}\|\right\}.$$

证明 若 A 的特征值 $\lambda\notin G^{(3)}(A)$, 则 $\forall i\in\alpha, j\in\beta$, 有

$$\|(A_{ii}-\lambda I_{n_i})^{-1}\|^{-1}>\sum_{t\in\alpha,\ t\neq i}\|A_{it}\|,$$

$$\|(A_{jj}-\lambda I_{n_j})^{-1}\|^{-1}>\sum_{t\in\beta,\ t\neq j}\|A_{jt}\|;$$

且

$$[\|(A_{ii}-\lambda I_{n_i})^{-1}\|^{-1}-\sum_{t\in\alpha,\ t\neq i}\|A_{it}\|][\|(A_{jj}-\lambda I_{n_j})^{-1}\|^{-1}-\sum_{t\in\beta,\ t\neq j}\|A_{jt}\|]>$$

$$\sum_{t\in\beta}\|A_{it}\|\ \sum_{t\in\alpha}\|A_{jt}\|,$$

由引理知 $A-\lambda I_n\in BH$，故由文献[1] 的引理1 知 $A-\lambda I_n$ 非奇异，即 λ 不是 A 的特征值，矛盾.

注1　取 $f_i(T(A))=\sum_{j\neq i}\|A_{ij}\|$，$i=1,2,\cdots,k$ 时，此定理的结论改进了定理1. 事实上，对 $\forall z\in G^{(3)}(A)$，若 $z\in\bigcup_{i=1}^{k}\sigma(A_{ii})\cup G_\alpha\cup G_\beta$，则显然 $z\in G^{(1)}(A)$. 若不然，则 $z\in G_{\alpha\beta}$，从而至少存在一个 $k\in\alpha$ 使得 $\|(A_{kk}-zI_{n_k})^{-1}\|^{-1}-\sum_{t\in\alpha,t\neq i}\|A_{kt}\|\leqslant\sum_{t\in\beta}\|A_{kt}\|$；或存在一个 $k\in\beta$ 使得 $\|(A_{kk}-zI_{n_k})^{-1}\|^{-1}-\sum_{t\in\beta,t\neq j}\|A_{kt}\|\leqslant\sum_{t\in\alpha}\|A_{kt}\|$. 即存在 $k\in K$ 使得 $\|(A_{kk}-zI_{n_k})^{-1}\|^{-1}\leqslant\sum_{t\neq k}\|A_{kt}\|$，从而 $z\in G^{(1)}(A)$. 综上可知 $G^{(3)}(A)\subset G^{(1)}(A)$.

注2　$G^{(2)}(A)$ 和 $G^{(3)}(A)$ 互不包含，下面的例子将说明这一点.

4　数值例子

下面我们通过两个数值例子来进一步说明以上几个分块矩阵特征值包含域的关系：$G^{(2)}\subset G^{(1)}$，$G^{(3)}\subset G^{(1)}$，$G^{(2)}$ 和 $G^{(3)}$ 没有必然的包含关系.

例2　设

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&5&6&1\\3&4&1&2&5&6\\4&1&2&3&5&6\\5&6&3&4&1&2\\3&4&5&6&2&3\end{bmatrix},$$

将 A 分块如下：

$$A=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{bmatrix},$$

其中 $A_{ij}(i,j=1,2,3)$ 均为 2×2 矩阵. 令 $f_i(T(A))=\sum_{j\neq i}\|A_{ij}\|$，$i=1,2,3$. $\alpha=\{1\}$，$\beta=\{2,3\}$，取 $\|\cdot\|$ 为矩阵的 2-范数，则

$$\|(A_{11}-zI_{n_1})^{-1}\|=\|(A_{22}-zI_{n_2})^{-1}\|=\|(A_{33}-zI_{n_3})^{-1}\|=\max\left\{\frac{1}{|2+\sqrt5-z|},\frac{1}{|2-\sqrt5-z|}\right\}\equiv\eta^{-1},$$

且

$$\|A_{12}\|=8.1231,\quad\|A_{13}\|=9.3246;$$
$$\|A_{21}\|=6.1231,\quad\|A_{23}\|=11.0454;$$
$$\|A_{31}\|=9.2711,\quad\|A_{32}\|=9.2711;$$
$$\sigma(A_{11})=\sigma(A_{22})=\sigma(A_{33})=\{4.2361,-0.2361\}.$$

从而可以计算出

$$\begin{aligned}G^{(1)}&=\bigcup_{i=1}^{3}\sigma(A_{ii})\cup\left(\bigcup_{i=1}^{3}\left\{z\in\mathbf{C}\mid\|(A_{ii}-zI_{n_i})^{-1}\|^{-1}\leqslant\sum_{j\neq i}\|A_{ij}\|\right\}\right)=\\&\{4.2361,-0.2361\}\cup\{z\mid\eta\leqslant\|A_{12}\|+\|A_{13}\|=17.4477\}\cup\\&\{z\mid\eta\leqslant\|A_{21}\|+\|A_{23}\|=17.1685\}\cup\\&\{z\mid\eta\leqslant\|A_{31}\|+\|A_{32}\|=18.5422\}=\end{aligned}$$

$$\{4.2361, -0.2361\} \cup \{z \mid \eta \leqslant 18.5422\} =$$
$$\{4.2361, -0.2361\} \cup \{z \mid \min\{|2+\sqrt{5}-z|, |2-\sqrt{5}-z|\} \leqslant 18.5422\} =$$
$$\{z \in \mathbf{C}: |2+\sqrt{5}-z| \leqslant 18.5422\} \cup \{z \in \mathbf{C}: |2-\sqrt{5}-z| \leqslant 18.5422\},$$

$$G^{(2)} = \bigcup_{i=1}^{3} \sigma(\boldsymbol{A}_{ii}) \cup \bigcup_{j\neq i} \Big\{ z \in \mathbf{C} \mid \|(\boldsymbol{A}_{ii} - z\boldsymbol{I}_{n_i})^{-1}\|^{-1} \|(\boldsymbol{A}_{jj} - z\boldsymbol{I}_{n_j})^{-1}\|^{-1} \leqslant \sum_{k\neq i} \|\boldsymbol{A}_{ik}\| \sum_{k\neq j} \|\boldsymbol{A}_{jk}\| \Big\} =$$
$$\{4.2361, -0.2361\} \cup \{z \mid \eta^2 \leqslant (\|\boldsymbol{A}_{12}\| + \|\boldsymbol{A}_{13}\|)(\|\boldsymbol{A}_{21}\| + \|\boldsymbol{A}_{23}\|) = 17.4477 \times 17.1685 = 299.5508\} \cup \{z \mid \eta^2 \leqslant (\|\boldsymbol{A}_{12}\| + \|\boldsymbol{A}_{13}\|)(\|\boldsymbol{A}_{31}\| + \|\boldsymbol{A}_{32}\|) = 17.4477 \times 18.5422 = 323.5187\} \cup \{z \mid \eta^2 \leqslant (\|\boldsymbol{A}_{21}\| + \|\boldsymbol{A}_{23}\|) \|\boldsymbol{A}_{31}\| + \|\boldsymbol{A}_{32}\| = 17.1685 \times 18.5422 = 318.3418\} =$$
$$\{4.2361, -0.2361\} \cup \{z \mid \eta^2 \leqslant 323.5187\} =$$
$$\{4.2361, -0.2361\} \cup \{z \mid (\min\{|2+\sqrt{5}-z|, |2-\sqrt{5}-z|\})^2 \leqslant 323.5187\} =$$
$$\{z \in \mathbf{C}: |2+\sqrt{5}-z| \leqslant 17.9866\} \cup \{z \in \mathbf{C}: |2-\sqrt{5}-z| \leqslant 17.9866\},$$

$$G^{(3)} = \bigcup_{i=1}^{3} \sigma(\boldsymbol{A}_{ii}) \cup \bigcup_{i\in\alpha} \Big\{ z \in \mathbf{C} \, \|(\boldsymbol{A}_{ii} - z\boldsymbol{I}_{n_i})^{-1}\|^{-1} \leqslant \sum_{t\in\alpha, t\neq i} \|\boldsymbol{A}_{it}\| \Big\} \cup \bigcup_{j\in\beta} \Big\{ z \in \mathbf{C} \, \|(\boldsymbol{A}_{jj} - z\boldsymbol{I}_{n_j})^{-1}\|^{-1} \leqslant \sum_{t\in\beta, t\neq j} \|\boldsymbol{A}_{jt}\| \Big\} \cup \bigcup_{\substack{i\in\alpha \\ j\in\beta}} \Big\{ z \in \mathbf{C} [\|(\boldsymbol{A}_{ii} - z\boldsymbol{I}_{n_i})^{-1}\|^{-1} - \sum_{t\in\alpha, t\neq i} \|\boldsymbol{A}_{it}\|][\|(\boldsymbol{A}_{jj} - z\boldsymbol{I}_{n_j})^{-1}\|^{-1} - \sum_{t\in\beta, t\neq j} \|\boldsymbol{A}_{jt}\|] \leqslant \sum_{t\in\beta} \|\boldsymbol{A}_{it}\| \sum_{t\in\alpha} \|\boldsymbol{A}_{jt}\| \Big\} =$$
$$\{4.2361, -0.2361\} \cup \{z \mid \eta \leqslant \|\boldsymbol{A}_{23}\| = 11.0454\} \cup \{z \mid \eta \leqslant \|\boldsymbol{A}_{32}\| = 9.2711\} \cup$$
$$\{z \mid \eta(\eta - \|\boldsymbol{A}_{23}\|) \leqslant (\|\boldsymbol{A}_{12}\| + \|\boldsymbol{A}_{13}\|) \|\boldsymbol{A}_{21}\| = 106.8340\} \cup$$
$$\{z \mid \eta(\eta - \|\boldsymbol{A}_{32}\|) \leqslant (\|\boldsymbol{A}_{12}\| + \|\boldsymbol{A}_{13}\|) \|\boldsymbol{A}_{31}\| = 161.7594\} =$$
$$\{4.2361, -0.2361\} \cup \{z \mid \eta \leqslant 11.0454\} \cup \{z \mid \eta \leqslant 17.2417\} \cup \{z \mid \eta \leqslant 18.1725\} = \{4.2361, -0.2361\} \cup \{z \mid \eta \leqslant 18.1725\} =$$
$$\{4.2361, -0.2361\} \cup \{z \mid \min\{|2+\sqrt{5}-z|, |2-\sqrt{5}-z|\} \leqslant 18.1725\} =$$
$$\{z \in \mathbf{C}: |2+\sqrt{5}-z| \leqslant 18.1725\} \cup \{z \in \mathbf{C}: |2-\sqrt{5}-z| \leqslant 18.1725\}.$$

显然 $G^{(2)} \subset G^{(3)} \subset G^{(1)}$.

例 3　设

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

将 $\boldsymbol{A}$ 分块同例 2. 令 $f_i(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})) = \sum_{j\neq i} \|\boldsymbol{A}_{ij}\|$, $i = 1, 2, 3$. $\alpha = \{1\}$, $\beta = \{2, 3\}$, 取 $\|\cdot\|$ 为矩阵的 2-范数, 则

$$\|(A_{11}-zI_{n_1})^{-1}\| = \|(A_{22}-zI_{n_2})^{-1}\| = \|(A_{33}-zI_{n_3})^{-1}\| = \max\left\{\frac{1}{|2+\sqrt{5}-z|}, \frac{1}{|2-\sqrt{5}-z|}\right\},$$

且

$$\|A_{12}\| = 8.1231,\quad \|A_{13}\| = 9.3246;$$
$$\|A_{21}\| = 8.1231,\quad \|A_{23}\| = 11.0454;$$
$$\|A_{31}\| = 9.2711,\quad \|A_{32}\| = 9.2711.$$

与例 2 类似, 我们可以计算出

$$G^{(1)} = \{z\in\mathbf{C}: |2+\sqrt{5}-z| < 19.1685\} \cup \{z\in\mathbf{C}: |2-\sqrt{5}-z| < 19.1685\},$$
$$G^{(2)} = \{z\in\mathbf{C}: |2+\sqrt{5}-z| < 18.8527\} \cup \{z\in\mathbf{C}: |2-\sqrt{5}-z| < 18.8527\},$$
$$G^{(3)} = \{z\in\mathbf{C}: |2+\sqrt{5}-z| < 18.5257\} \cup \{z\in\mathbf{C}: |2-\sqrt{5}-z| < 18.5257\}.$$

显然 $G^{(3)} \subset G^{(2)} \subset G^{(1)}$.

致谢 作者非常感谢审稿人提出的宝贵意见.

[参 考 文 献]

[1] Feingold D G, Varga R S. Block diagonally dominant matrices and generalization of the gerschgorin circle theorem[J]. Pacific J Math, 1962, **12**(4): 1241-1250.

[2] 黄廷祝, 游兆永. 矩阵的 G-分块对角占优性[J]. 工程数学学报, 1993, **10**(3): 75-80.

[3] 游兆永, 姜宗乾. 矩阵块对角占优性[J]. 西安交通大学学报, 1984, **18**(3): 123-125.

[4] 黄廷祝, 黎稳. 块 H-矩阵与块矩阵的谱[J]. 应用数学和力学, 2002, **23**(2): 217-220.

[5] Berman A, Plemmons R. Nonnegative Matrices in the Mathematical Science[M]. New York: Academic Press, 1979.

[6] CHEN Gong-ning. Some generalization of diagonal dominance associated with G-functions[J]. Linear Algebra Appl, 1983, **55**: 169-180.

Note on “Block H-Matrices and Spectrum of Block Matrices”

LIU Jian-zhou, HUANG Ze-jun

(Department of Mathematics & Computational Science, Xiangtan University, Xiangtan, Hunan 411105, P. R. China)

Abstract: Some results of “Block H-matrices and spectrum of block matrices” are consummated. Furthermore, a new bound for eigenvalues of block matrices was given and some examples are given to show the advantages of this new result.

Key words: G-function; block matrix; eigenvalue