

功能梯度板柱面弯曲的弹性力学解*

杨 博^{1,2}, 丁皓江¹, 陈伟球¹

(1. 浙江大学 土木工程系, 杭州 310027;
2. 浙江林学院 土木工程系, 浙江 临安 311300)

(我刊编委丁皓江来稿)

摘要: 利用推广后的 Main 和 Spencer 功能梯度板理论,研究了功能梯度矩形板在均布荷载作用下的柱面弯曲问题。采用该理论中的位移展开公式,并且材料参数沿板厚方向可以任意连续变化,但将材料由各向同性推广到正交各向异性,以及由不考虑板的横向荷载作用发展到受横向均布荷载作用。假设板在 y 方向无限长,从而得到了一个从弹性力学理论出发的正交各向异性功能梯度板在横向均布荷载作用下柱面弯曲问题的板理论。通过算例分析,讨论了边界条件和梯度变化程度对功能梯度板静力响应的影响。

关键词: 功能梯度板; 柱面弯曲; 弹性力学解

中图分类号: O343.1 **文献标识码:** A

引 言

功能梯度材料是一种新型非均匀复合材料,其组分材料的体积含量在空间上呈光滑和连续变化,保证应力连续分布,从而避免传统层合材料的应力集中和界面脱离等问题。在工程应用中,还可以通过优化方法有针对性地改变各组分材料体积含量的空间分布规律,进而优化结构内部应力的分布。

静力弯曲问题是功能梯度材料板分析中的一个基本问题。如 Reddy 等人^[1]通过建立一阶剪切变形板理论解和经典板理论解之间的关系,由经典板理论解直接得到了各向同性功能梯度圆板的轴对称弯曲解;Cheng 和 Beta^[2]基于三维弹性理论,给出了固支各向同性功能梯度椭圆板在机械和热荷载作用下弯曲问题的渐进解;Bian 等人^[3]利用 Soldatos 板理论并结合状态空间法得到了单跨和多跨正交各向异性功能梯度矩形板,在任意边界条件下柱面弯曲问题的解析解;Chi 和 Chung^[4-5]利用经典板理论,得到了四边简支各向同性功能梯度板弯曲问题的级数解;Li 等人^[6-7]用应力函数法得到了横观各向同性功能梯度圆板受纯弯曲或轴对称横向荷载作用时的弹性力学解。

* 收稿日期: 2008-06-30; 修订日期: 2008-07-03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10472102;10725210;10432030)

作者简介: 杨博(1979—),男,宁夏灵武人,讲师,博士生(E-mail: bo_young@163.com);

丁皓江(1934—),男,江苏常州人,教授,博士生导师(E-mail: dinghj@zju.edu.cn);

陈伟球(1969—),男,江苏吴江人,教授,博士生导师(联系人.Tel: + 86-571-87952267; Fax: + 86-571-87952165; E-mail: chenwq@zju.edu.cn).

特别要指出的是, Mian 和 Spencer^[8]基于三维弹性理论,对上下表面无应力的各向同性功能梯度板导出了一组二维控制方程,材料参数在厚度方向可以任意变化. 利用复变函数理论, England^[9]将 Mian 和 Spencer 建立的理论推广到了在板表面受双调和函数的压力分布情形,但是,推导过程复杂,且没有给出有限尺寸不同边界条件矩形板的解析分析.

本文从 Mian 和 Spencer 建立的理论^[8]出发,将材料由各向同性推广到正交各向异性,并考虑在板上表面受均布荷载作用,进而得到了功能梯度矩形板柱面弯曲时的弹性力学解. 通过算例分析,发现边界条件和梯度变化程度对功能梯度板静力响应有显著的影响.

1 柱面弯曲问题的控制方程

考虑一个等厚度板,坐标系 xy 平面与板中面重合, $0 \leq x \leq l$, $-h/2 \leq z \leq h/2$, $-\infty < y < \infty$. 在均布荷载 q 作用下板处于柱面弯曲状态, u 和 w 分别表示 x 方向和 z 方向的位移分量, σ_{xx} 、 τ_{xz} 和 σ_{zz} 分别表示应力分量,位移和应力均与坐标 y 无关.

弹性力学平衡方程为

$$\sigma_{xx,x} + \tau_{xz,z} = 0, \quad \tau_{xz,x} + \sigma_{zz,z} = 0. \quad (1)$$

正交各向异性材料的应力和位移关系为

$$\begin{cases} \sigma_{xx}(x, z) = c_{11}u_{,x} + c_{13}w_{,z}, \\ \sigma_{zz}(x, z) = c_{13}u_{,x} + c_{33}w_{,z}, \\ \tau_{xz}(x, z) = c_{55}(u_{,z} + w_{,x}), \end{cases} \quad (2)$$

式中, c_{ij} 为材料的弹性常数,对于功能梯度材料, $c_{ij} = c_{ij}(z)$.

寻求式(1)和(2)如下形式的解

$$\begin{cases} u(x, z) = \bar{u}(x) + F\bar{u}_{,xx} + A\bar{w}_{,x} + B\bar{w}_{,xxx}, \\ w(x, z) = \bar{w}(x) + G\bar{u}_{,x} + C\bar{w}_{,xx} + D, \end{cases} \quad (3)$$

式中, $A = A(z)$, $B = B(z)$, $C = C(z)$, $D = D(z)$, $F = F(z)$, $G = G(z)$ 均为待定函数.

将式(3)代入式(2),得

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = (c_{11} + c_{13}G')\bar{u}_{,x} + (c_{11}A + c_{13}C')\bar{w}_{,xx} + \\ \quad c_{11}F\bar{u}_{,xxx} + c_{11}B\bar{w}_{,xxxx} + c_{13}D', \\ \sigma_{zz} = (c_{13} + c_{33}G')\bar{u}_{,x} + (c_{13}A + c_{33}C')\bar{w}_{,xx} + \\ \quad c_{13}F\bar{u}_{,xxx} + c_{13}B\bar{w}_{,xxxx} + c_{33}D', \\ \tau_{xz} = c_{55}[(A' + 1)\bar{w}_{,x} + (F' + G)\bar{u}_{,xx} + (B' + C)\bar{w}_{,xxx}]. \end{cases} \quad (4)$$

将式(4)代入式(1),并令

$$[c_{55}(A' + 1)]' = 0, \quad (5)$$

$$(c_{13} + c_{33}G')' = 0, \quad (6)$$

$$c_{55}(A' + 1) + (c_{13}A + c_{33}C')' = 0, \quad (7)$$

$$c_{11} + c_{13}G' + [c_{55}(F' + G)]' = c_{55}\kappa_1, \quad (8)$$

$$c_{11}A + c_{13}C' + [c_{55}(B' + C)]' = c_{55}\kappa_2, \quad (9)$$

$$\bar{u}_{,xxx} = \kappa_3, \quad (10)$$

$$\bar{w}_{,xxxx} = \kappa_4, \quad (11)$$

式中上标“'”表示对变量 z 求导数, κ_1 、 κ_2 、 κ_3 和 κ_4 为任意常数. 于是式(1)简化为

$$\kappa_1 \bar{u}_{,xx} + \kappa_2 \bar{w}_{,xxx} = 0, \quad (12)$$

$$[c_{55}(F' + G) + (c_{13}F)']\kappa_3 + [c_{55}(B' + C) + (c_{13}B)']\kappa_4 + (c_{33}D')' = 0. \quad (13)$$

由式(10)、(11)和(12)可得

$$\kappa_1 \kappa_3 + \kappa_2 \kappa_4 = 0. \quad (14)$$

积分式(11)和(12),得

$$\bar{w}(x) = \frac{1}{24}\kappa_4 x^4 + \frac{1}{6}C_1 x^3 + \frac{1}{2}C_2 x^2 + C_3 x + C_4, \quad (15)$$

$$\bar{u}(x) = \frac{1}{6}\kappa_3 x^3 - \frac{1}{2}\frac{\kappa_2}{\kappa_1}C_1 x^2 + C_5 x + C_6, \quad (16)$$

式中 $C_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ 为积分常数,由周边边界条件确定.

现考虑柱面弯曲板上下表面的边界条件. 假设在 $z = h/2$ 处, $\sigma_{zz} = 0, \tau_{zx} = 0$; 在 $z = -h/2$ 处, $\sigma_{zz} = -q, \tau_{zx} = 0$.

如果将 σ_{zz} 和 τ_{zx} 的表达式代入上述边界条件,可得到如下形式的边界条件:

$$A' \left(\pm \frac{h}{2} \right) + 1 = 0, \quad (17)$$

$$c_{13} \left(\pm \frac{h}{2} \right) + c_{33} \left(\pm \frac{h}{2} \right) G' \left(\pm \frac{h}{2} \right) = 0, \quad (18)$$

$$F' \left(\pm \frac{h}{2} \right) + G \left(\pm \frac{h}{2} \right) = 0, \quad (19)$$

$$B' \left(\pm \frac{h}{2} \right) + C \left(\pm \frac{h}{2} \right) = 0, \quad (20)$$

$$c_{13} \left(\pm \frac{h}{2} \right) A \left(\pm \frac{h}{2} \right) + c_{33} \left(\pm \frac{h}{2} \right) C' \left(\pm \frac{h}{2} \right) = 0, \quad (21)$$

$$c_{13} \left(-\frac{h}{2} \right) \left[\kappa_3 F \left(-\frac{h}{2} \right) + \kappa_4 B \left(-\frac{h}{2} \right) \right] + c_{33} \left(-\frac{h}{2} \right) D' \left(-\frac{h}{2} \right) = -q, \quad (22)$$

$$c_{13} \left(\frac{h}{2} \right) \left[\kappa_3 F \left(\frac{h}{2} \right) + \kappa_4 B \left(\frac{h}{2} \right) \right] + c_{33} \left(h/2 \right) D' \left(\frac{h}{2} \right) = 0. \quad (23)$$

如果令 \bar{u} 和 \bar{w} 为板中面的位移,即 $\bar{u}(x) = u(x, 0), \bar{w}(x) = w(x, 0)$, 则由式(3)得

$$A(0) = 0, B(0) = 0, C(0) = 0, D(0) = 0, F(0) = 0, G(0) = 0. \quad (24)$$

积分式(5)~(9)和(13),并利用边界条件(17)~(24)和关系式(14),就可以完全确定函数 $A(z), B(z), C(z), D(z), F(z), G(z)$ 的表达式以及常数 $\kappa_i (i = 1, 2, 3, 4)$. 由于篇幅有限,这里略去详细推导过程.

2 轴力、弯矩、剪力和周边边界条件

利用应力表达式(4),并注意到 $A(z) = -z$,可写出板的轴力 N_x ,弯矩 M_x 和剪力 Q_x 的表达式:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz = N_1 \bar{u}_{,x} + N_3 \bar{w}_{,xx} + N_5 \bar{u}_{,xxx} + N_7 \bar{w}_{,xxxx} + N_0, \quad (25)$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz = M_1 \bar{u}_{,x} + M_3 \bar{w}_{,xx} + M_5 \bar{u}_{,xxx} + M_7 \bar{w}_{,xxxx} + M_0, \quad (26)$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zx} dz = Q_1 \bar{u}_{,xx} + Q_2 \bar{w}_{,xxx}, \quad (27)$$

式中

$$\begin{cases} N_1 = \int_{-h/2}^{h/2} (c_{11} + c_{13}G')dz, N_3 = \int_{-h/2}^{h/2} (c_{11}A + c_{13}C')dz, \\ N_5 = \int_{-h/2}^{h/2} c_{11}Fdz, N_7 = \int_{-h/2}^{h/2} c_{11}Bdz, N_0 = \int_{-h/2}^{h/2} c_{13}D' dz, \\ M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} z(c_{11} + c_{13}G')dz, M_3 = \int_{-h/2}^{h/2} z(c_{11}A + c_{13}C')dz, \\ M_5 = \int_{-h/2}^{h/2} c_{11}zFdz, M_7 = \int_{-h/2}^{h/2} c_{11}zBdz, M_0 = \int_{-h/2}^{h/2} c_{13}D'zdz, \\ Q_1 = \int_{-h/2}^{h/2} c_{55}(F' + G)dz, Q_2 = \int_{-h/2}^{h/2} c_{55}(B' + C)dz. \end{cases} \quad (28)$$

现考虑简支(S),固支 1(C1),固支 2(C2)和自由(F)共 4 类周边边界条件,即

S: $\bar{u} = 0, \bar{w} = 0, M_x = 0;$ (29)

C1: $\bar{u} = 0, \bar{w} = 0, \bar{w}_{,x} = 0;$ (30)

C2: $\bar{u} = 0, \bar{w} = 0, u_{,z}|_{z=0} = 0;$ (31)

F: $N_x = 0, M_x = 0, Q_x = 0.$ (32)

3 算例与分析

方便起见,现引入无量纲量 $\bar{W} = \bar{w}E/(qh), \bar{\sigma}_x = \sigma_x/q$ 和 $\bar{\tau}_{xz} = \tau_{xz}/q$.

功能梯度矩形板上表面受均布荷载 $q = 1 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ 作用,取 $l = 1 \text{ m}, h/l = 0.15$,材料参数沿板的厚度方向均为坐标 z 的指数函数,变化规律为

$$C_{ij} = C_{ij}^0 e^{\lambda(z+h/2)/h} \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6),$$

式中, C_{ij}^0 为 $z = -h/2$ 处的材料常数, λ 为梯度指标,反映材料的非均匀程度. 当 $\lambda = 0$ 时为均匀板. 取弹性模量 $E^0 = 100 \text{ GPa}$, Poisson 比 $\nu^0 = 0.29$,可换算得 $C_{11}^0 = C_{33}^0 = 135 \text{ GPa}, C_{12}^0 = C_{13}^0 = 57.7 \text{ GPa}, C_{55}^0 = (C_{11}^0 - C_{12}^0)/2 = 38.65 \text{ GPa}.$

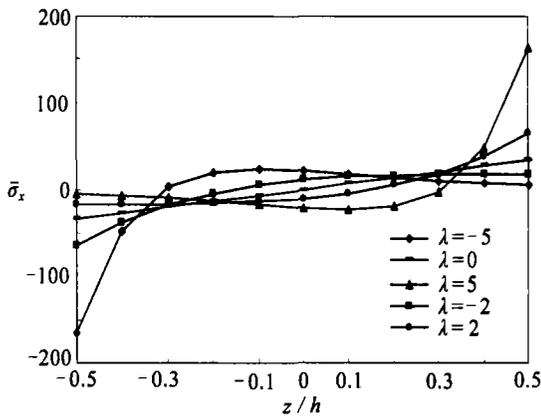


图 1 无量纲正应力 $\bar{\sigma}_x$ (S-S: $x = l/2$)

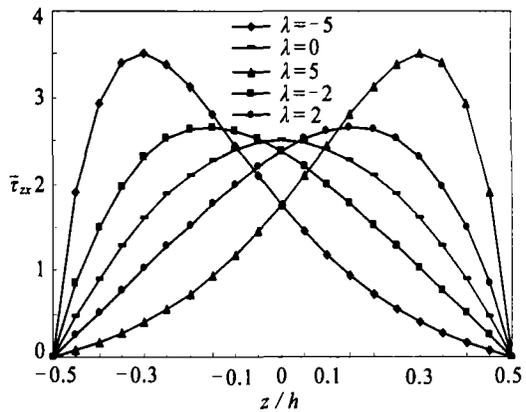


图 2 无量纲剪应力 $\bar{\tau}_{xz}$ (S-S: $x = l/4$)

图 1 给出了 $x = l/2$ 处, λ 取不同值时简支 FGM 板沿厚度方向的无量纲正应力 $\bar{\sigma}_x$. 可以发现当 $\lambda = 0$ 时, $\bar{\sigma}_x$ 沿厚度方向呈近似线性分布,最大拉(压)应力值出现在 $z = h/2(z = -h/2)$ 处. 当 $\lambda < 0$,即 $z = -h/2$ 处刚度最大时,出现在 $z = -h/2$ 处的最大压应力值随着 λ 绝对值的增大而增大. 当 $\lambda > 0$,即 $z = h/2$ 处刚度最大时,出现在 $z = h/2$ 处的最大拉应力值随着 λ 增大而增大.

图 2 给出了 $x = l/4$ 处, λ 取不同值时简支 FGM 板沿厚度方向的无量纲剪应力 $\bar{\tau}_{xz}$. 可以

发现当 $\lambda = 0$ 时, $\bar{\tau}_{zz}$ 沿厚度方向呈抛物线分布, 最大值出现在 $z = 0$ 处, 并且抛物线关于该处对称. 当 $\lambda < 0$, 即 $z = -h/2$ 处刚度最大时, 随着 λ 绝对值的增大, 最大值出现位置向 $z = -h/2$ 处转移. 当 $\lambda > 0$, 即 $z = h/2$ 处刚度最大时, 随着 λ 增大, 最大值出现位置向 $z = h/2$ 处转移.

表 1 $x = l/2$ 处无量纲位移 \bar{w}

| 边界类型 | $\lambda = -5$ | $\lambda = 0$ | $\lambda = 5$ |
|-------|----------------|---------------|---------------|
| S-S | 3 670.76 | 296.35 | 24.06 |
| C1-C1 | 710.66 | 56.19 | 4.79 |
| C2-C2 | 896.53 | 77.85 | 6.04 |
| C1-S | 1 450.68 | 116.23 | 9.60 |
| C2-S | 1 623.55 | 136.33 | 10.76 |
| C1-F | 11 963.76 | 939.92 | 81.29 |
| C2-F | 12 707.23 | 1 026.54 | 86.30 |

表 1 给出了在 $x = l/2$ 处的无量纲挠度 \bar{w} , 考虑了 7 种边界条件和 3 种 λ 取值. 通过比较可以发现无论何种边界条件, 随着 λ 的增大, 板的挠度值在减小. 通过观察材料参数沿厚度方向的变化表达式不难理解, 这是由于随着 λ 增大, 沿厚度方向板的刚度也在相应地增大. 在 7 种类型的板中, C2-F 的挠度值最大, C1-C1 的挠度值最小.

4 结 论

本文将 Mian 和 Spencer 建立的理论推广后, 得到了正交各向异性功能梯度板柱面弯曲问题的弹性力学解, 材料参数沿厚度方向可以任意变化. 计算结果表明, 边界条件和梯度变化程度对功能梯度板柱面弯曲时的响应有显著的影响, 尤其当梯度变化程度较大时, 在板的刚度较大表面附近极易产生应力集中现象. 因此, 工程中可以通过对上述因素的合理设计优化柱面弯曲功能梯度板静力弯曲的力学行为.

由于本文的理论体系没有引入功能梯度板关于应力场和位移场的简化假设, 所以, 本文给出的弹性力学解可以作为基准解, 用以评价在同类板分析中采用的各种近似的弹性板理论以及数值解法.

致谢 本文得到了浙江林学院科研基金资助(2451002036), 特此感谢.

[参 考 文 献]

- [1] Reddy J N, Wang C M, Kitipornchai S. Axisymmetric bending of functionally graded circular and annular plates[J]. *European Journal of Mechanics A-Solids*, 1999, 18(1): 185-199.
- [2] Cheng Z G, Batra R C. Three-dimensional thermoelastic deformations of a functionally graded elliptical plate[J]. *Composites B*, 2000, 31(2): 97-106.
- [3] Bian Z G, Chen W Q, Lim C W, et al. Analytical solutions for single- and multi-span functionally graded plates in cylindrical bending[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, 42(24/25): 6433-6456.
- [4] Chi S H, Chung Y L. Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load—Part I: Analysis[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, 43(13): 3657-3674.

- [5] Chi S H, Chung Y L. Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load—Part II : Numerical results[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, **43**(13): 3675-3691.
- [6] Li X Y, Ding H J, Chen W Q. Pure bending of simply supported circular plate of transversely isotropic functionally graded material[J]. *Journal of Zhejiang University, Science A*, 2006, **7**(8): 1324-1328.
- [7] Li X Y, Ding H J, Chen W Q. Elasticity solutions for a transversely isotropic functionally graded circular plate subject to an axisymmetric transverse load qr^k [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2008, **45**(1): 191-210.
- [8] Mian A M, Spencer A J M. Exact solutions for functionally graded and laminated elastic materials[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1998, **46**(12): 2283-2295.
- [9] England A H. Bending solution for inhomogeneous and laminated elastic plates[J]. *Journal of Elasticity*, 2006, **82**(2): 129-173.

Elasticity Solutions for Functionally Graded Plates in Cylindrical Bending

YANG Bo^{1,2}, DING Hao-jiang¹, CHEN Wei-qiu¹

(1. Department of Civil Engineering, Zhejiang University,

Hangzhou 310027, P. R. China;

2. Department of Civil Engineering, Zhejiang Forestry College,

Lin'an, Zhejiang 311300, P. R. China)

Abstract: The plate theory of functionally graded materials suggested by Mian and Spencer is extended to analyze the cylindrical bending problem of a functionally graded rectangular plate subject to uniform load. The expansion formula for displacements was adopted. While keeping the assumption that the material parameters can vary along the thickness direction in an arbitrary fashion, it was considered orthotropic materials rather than isotropic materials. In addition, the traction-free condition on the top surface was replaced by the condition of uniform load applied on the top surface. The plate theory for the particular case of cylindrical bending was presented by considering an infinite extent in the y -direction. The effects of boundary conditions and material inhomogeneity on the static response of functionally graded plates were investigated through a numerical example.

Key words: functionally graded plates; cylindrical bending; elasticity solutions