

# 含曲线裂纹复合圆柱体的扭转断裂分析\*

潘天妮, 王银邦

(中国海洋大学 工程学院, 山东 青岛 266100)

(本刊编委王银邦来稿)

**摘要:** 研究含任意曲线裂纹的复合圆柱体的 Saint-Venant 扭转, 将内外材料的交界面视为一边界, 将问题划归为内、外边界和裂纹上的积分方程的求解. 提出了新的边界元数值方法, 分别对含有直线裂纹和曲折裂纹的典型问题进行了数值计算, 并与文献中数据结果进行了比较, 证明了该文方法的正确性和有效性.

**关键词:** Saint-Venant 扭转; 复合柱体; 曲线裂纹; 边界积分方程; 应力强度因子  
**中图分类号:** O346.1      **文献标识码:** A

## 引 言

现代工程结构的发展方向之一是大跨, 高耸, 重载, 要求结构能在恶劣条件下工作, 且能满足施工技术的工业化要求. 复合柱体的优势在于可利用不同性质的两种或多种材料进行组合, 以发挥其各自优点, 达到扬长避短的目的, 从而能很好的满足现代工程结构的要求. 因而近年来在重力式海洋平台结构、工业厂房、房屋建筑、桥梁和地下等结构中得到广泛应用, 受到有关设计和工程技术人员的青睐. 复合柱体除了具有比一般柱体承载力高, 塑性和韧性好, 施工方便和经济效果好等优点外, 还根据组合的材料和方式的不同而存在各自的特点, 具有良好的发展应用前景<sup>[1]</sup>.

在地震等自然灾害的影响下, 会使结构产生扭转、弯曲、剪切等破坏. 因此, 扭转断裂的影响是不可忽视的<sup>[2-3]</sup>. 带有直线裂纹复合柱的扭转问题已用边界元法进行过研究<sup>[4-6]</sup>. 本文研究含有曲线裂纹复合柱的扭转断裂问题, 通过使用分步积分技巧导出了新的边界积分方程, 其积分核只具有  $1/r$  阶的奇异性. 对含有直线裂纹和折线裂纹的圆截面复合柱体的典型问题进行了数值计算, 并与文献已有数据进行比较, 证明此法的正确性和有效性.

## 1 基本公式

考虑由两种不同材料组成的圆柱体(见图 1). 外部柱体  $\Omega_1$  的外边界为  $S_1$ , 剪切模量和 Poisson 比分别为  $G_1$  和  $\nu_1$ , 包含曲线裂纹  $\Gamma_k (k = 1, 2, \dots, n)$ . 内部柱体  $\Omega_2$  的材料界面为  $S_2$ ,

\* 收稿日期: 2007-09-15; 修订日期: 2008-07-07

基金项目: 国家高技术研究发展计划资助项目(2007AA09Z317)

作者简介: 潘天妮(1982—), 女, 山东青岛人, 硕士(E-mail: veico@126.com);

王银邦(1956—), 男, 甘肃人, 教授, 博士, 博士生导师(联系人. Tel: + 86-532-85901684; E-mail: wangyb@ouc.edu.cn).

材料常数为  $G_2$  和  $\nu_2$ , 不包含裂纹. 已知柱体受扭矩  $T$  作用.

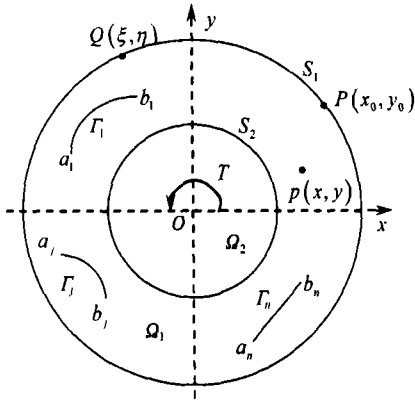


图 1 裂纹复合圆柱的截面几何

复合材料柱中的各个材料组成的柱体在其内部都是匀质的, 因而对于复合材料柱体的 Saint-Venant 扭转可用匀质柱体扭转的通解进行研究.

1.1 材料界面  $S_2$  上的基本方程

单独考虑外部柱体, 设材料界面  $S_2$  的正方向为顺时针方向, 则外部材料柱体在边界  $S_2$  上的位移和面力为<sup>[7-8]</sup>

$$\begin{cases} u^+ = -\alpha yz, \\ v^+ = \alpha xz, \\ w^+ = \alpha \varphi^+(x, y), \\ Z_N^+ = l^+ \tau_{zx}^+ + m^+ \tau_{zy}^+ = \end{cases} \quad (1)$$

$$G_1 \alpha \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^+ - l^+ y + m^+ x \right], \quad (2)$$

其中  $\varphi$  为扭转函数,  $\alpha$  为扭率.

对于内部柱体, 设在其内不包含裂纹, 则在边界  $S_2$  上, 其位移和面力为<sup>[7-8]</sup>

$$u^- = -\alpha yz, \quad v^- = \alpha xz, \quad w^- = \alpha \varphi^-(x, y), \quad (3)$$

$$Z_N^- = l^- \tau_{zx}^- + m^- \tau_{zy}^- = G_2 \alpha \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^- - l^- y + m^- x \right]. \quad (4)$$

对于内外交界  $S_2$  上同一点的位移和面力必须满足连续性条件, 即  $u^+ = u^-, v^+ = v^-, w^+ = w^-, Z_N^+ = -Z_N^-$ , 整理可以得到

$$\varphi^+(x, y) = \varphi^-(x, y), \quad (5)$$

$$G_1 \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^+ - l^+ y + m^+ x \right] = -G_2 \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^- - l^- y + m^- x \right]. \quad (6)$$

1.2 新的边界积分方程

在复合柱体的 Saint-Venant 扭转问题中, 令  $P(x_0, y_0)$  为源点,  $Q(\xi, \theta)$  为边界和裂纹上的积分点.

记  $\partial \varphi / \partial n = q, l^+ = -l^- = l, m^+ = -m^- = m$ , 由式(6)可得到

$$G_1 q^+(P) + G_2 q^-(P) = (G_1 - G_2) H(P), \quad (7)$$

其中  $H(P) = y_0 l^+(P) - x_0 m^+(P), P = (x_0, y_0) \in S_2$ .

对于外部材料柱体, 其在边界  $S_2$  上的新的边界积分方程为<sup>[9-12]</sup>

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} q^+(P) = & \int_{S_1} \left[ q(Q) \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial n(P)} - \frac{\partial \varphi(Q)}{\partial s(Q)} \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial s(P)} \right] ds(Q) - \\ & \int_{\Gamma} \frac{\partial \Delta \varphi(Q)}{\partial s(Q)} \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial s(P)} ds(Q) + \\ & \int_{S_2} \left[ q^+(Q) \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial n(P)} - \frac{\partial \varphi^+(Q)}{\partial s(Q)} \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial s(P)} \right] ds(Q) \quad (P \in S_2). \end{aligned} \quad (8)$$

对于内部材料柱体, 不存在裂纹, 其在边界  $S_2$  上的新的边界积分方程为

$$\frac{1}{2} q^-(P) = - \int_{S_2} \left[ \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial n(P)} q^-(Q) + \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial s(P)} \frac{\partial \varphi^-(Q)}{\partial s(Q)} \right] ds(Q) \quad (P \in S_2). \quad (9)$$

我们令

$$F(Q) = \frac{\partial \varphi(Q)}{\partial s(Q)} \quad (Q \in S_1 \cup S_2); \quad F(Q) = \frac{\partial \Delta \varphi(Q)}{\partial s(Q)} \quad (Q \in \Gamma),$$

将式(8)和(9)代入式(7)可得如下的材料界面边界积分方程:

$$\begin{aligned} & \int_{S_1} \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial s(P)} F(Q) ds(Q) + \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial s(P)} F(Q) ds(Q) + \\ & \frac{G_1 + G_2}{G_1} \int_{S_2} \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial s(P)} F(Q) ds(Q) - 2 \int_{S_2} \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial n(P)} q^+(Q) ds(Q) = \\ & \int_{S_1} \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial n(P)} q(Q) ds(Q) - \frac{G_1 - G_2}{G_1} \int_{S_2} \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial n(P)} H(Q) ds(Q) - \\ & \frac{G_1 - G_2}{2G_1} H(P) \quad (P \in S_2). \end{aligned} \quad (10)$$

对于外部材料柱体,传统的边界积分公式为<sup>[8]</sup>

$$\begin{aligned} \varphi(p) = & \int_{S_1} [\varphi^*(p, Q)q(Q) - \varphi(Q)q^*(p, Q)] ds(Q) - \\ & \int_{\Gamma} q^*(p, Q)\Delta\varphi(Q) ds(Q) + \\ & \int_{S_2} [\varphi^*(p, Q)q^+(Q) - \varphi^+(Q)q^*(p, Q)] ds(Q) \quad (p \in \Omega_1). \end{aligned} \quad (11)$$

上式两端同时对  $x, y$  求偏导数并组合,并令  $p(x, y)$  趋于边界  $S_2$  上的点  $P$ , 可以求得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi^+(P)}{\partial s(P)} = & \int_{S_1} \left[ \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial s(P)} q(Q) + \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial n(P)} \frac{\partial \varphi(Q)}{\partial s(Q)} \right] ds(Q) + \\ & \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial n(P)} \frac{\partial \Delta \varphi(Q)}{\partial s(Q)} ds(Q) + \\ & \int_{S_2} \left[ \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial s(P)} q^+(Q) + \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial n(P)} \frac{\partial \varphi^+(Q)}{\partial s(Q)} \right] ds(Q) \quad (P \in S_2). \end{aligned} \quad (12)$$

同理,对于内部材料柱,可以得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi^-(P)}{\partial s(P)} = & \int_{S_2} \left[ \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial s(P)} q^-(Q) - \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial n(P)} \frac{\partial \varphi^-(Q)}{\partial s(Q)} \right] ds(Q) \\ & (P \in S_2). \end{aligned} \quad (13)$$

由于当  $P \in S_2$  时  $\varphi^+(P) = \varphi^-(P)$ , 所以沿  $S_2$  切线方向的方向导数相等,即  
 $(\partial \varphi^+(P))/(\partial s(P)) = (\partial \varphi^-(P))/(\partial s(P))$ .

注意到式(12)和(13),可以求得材料界面上的第2个边界积分方程为

$$\begin{aligned} & \int_{S_1} \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial n(P)} F(Q) ds(Q) + \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial n(P)} F(Q) ds(Q) + \\ & 2 \int_{S_2} \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial n(P)} F(Q) ds(Q) + \frac{G_2 + G_1}{G_2} \int_{S_2} \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial s(P)} q^+(Q) ds(Q) = \\ & - \int_{S_1} \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial s(P)} q(Q) ds(Q) + \frac{G_1 - G_2}{G_2} \int_{S_2} \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial s(P)} H(Q) ds(Q) \\ & (P \in S_2). \end{aligned} \quad (14)$$

当  $P \in S_1$  或  $P \in \Gamma$  时,按一般柱体扭转可得到边界积分方程为<sup>[9,12]</sup>

$$\int_{S_1} \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial s(P)} F(Q) ds(Q) + \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial s(P)} F(Q) ds(Q) +$$

$$\int_{s_2} \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial s(P)} F(Q) ds(Q) - \int_{s_2} \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial n(P)} q^+(Q) ds(Q) = -\frac{1}{2} q(P) + \int_{s_1} \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial n(P)} q(Q) ds(Q) \quad (P \in S_1), \quad (15)$$

$$\int_{s_1} \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial s(P)} F(Q) ds(Q) + \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial s(P)} F(Q) ds(Q) + \int_{s_2} \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial s(P)} F(Q) ds(Q) - \int_{s_2} \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial n(P)} q^+(Q) ds(Q) = -q^+(P) + \int_{s_1} \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial n(P)} q(Q) ds(Q) \quad (P \in \Gamma). \quad (16)$$

未知函数  $F(Q)$  还应满足位移单值性条件

$$\begin{cases} \int_{s_j} F(Q) ds(Q) = 0 & (j = 1, 2), \\ \int_{\Gamma_k} F(Q) ds(Q) = 0 & (k = 1, 2, \dots, n). \end{cases} \quad (17)$$

将式(10)、(14)~(16)联立并结合式(17)建立的积分方程组闭合,可进行求解.

## 2 抗扭刚度 $D$ 和应力强度因子 $K_{\text{III}}$ 的计算

对于复合柱体,扭转刚度

$$D = T/\alpha = D_1 + D_2, \quad (18)$$

其中

$$\frac{D_1}{G_1} = \int_{s_1+s_2} [n_2(Q)\xi + n_1(Q)\eta] \xi \eta ds(Q) + \frac{1}{2} \int_{s_1+s_2+\Gamma} (\xi^2 + \eta^2) F(Q) ds(Q), \quad (19)$$

$$\frac{D_2}{G_2} = - \int_{s_2} [n_2(Q)\xi + n_1(Q)\eta] \xi \eta ds(Q) - \frac{1}{2} \int_{s_2} (\xi^2 + \eta^2) F(Q) ds(Q). \quad (20)$$

在位移单值性条件下求得边界积分方程组的解  $F(Q)$  后,就可直接进行扭转刚度  $D$  的计算.

在裂纹尖端引进局部极坐标  $(\rho, \theta)^{[13]}$ , 并定义Ⅲ型应力强度因子为

$$K_{\text{III}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} [\sqrt{2\pi\rho} \tau_{\theta z}(\rho, 0)]. \quad (21)$$

在位移单值性条件下求得边界积分方程的解  $F(Q)$  后,裂纹尖端的应力强度因子  $K_{\text{III}}$  可按以下公式直接计算:

$$\begin{cases} K_{\text{III}}(a_j) = -\frac{G_1 \alpha}{2} \lim_{\rho \rightarrow a_j} [\sqrt{2\pi | Q - a_j |} F(Q)] \\ K_{\text{III}}(b_j) = -\frac{G_1 \alpha}{2} \lim_{\rho \rightarrow b_j} [\sqrt{2\pi | Q - b_j |} F(Q)] \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (22)$$

其中  $a_j, b_j$  分别为第  $j$  条裂纹的初始端点和末端端点.

## 3 边界元数值方法

以上所推得的边界积分方程组适合位移单值条件的解析解一般很难求得,所以我们用数值的方法进行求解.将普通边界、裂纹边界和内外材料交界线分别分成  $M + N + C$  个线性单

元<sup>[14-15]</sup>,即

$$S_1 = \bigcup_{j=1}^M L_j, \Gamma = \bigcup_{j=1+M}^{M+N} L_j, S_2 = \bigcup_{j=1+N+M}^{M+N+C} L_j,$$

每个线性单元被映射到区间  $-1 \leq \zeta \leq 1$ ,形函数为  $N_1(\zeta) = (1 - \zeta)/2, N_2(\zeta) = (1 + \zeta)/2$ ,作自变量变换

$$Q = (\xi, \eta) = (\xi^{e1}, \eta^{e1})N_1(\zeta) + (\xi^{e2}, \eta^{e2})N_2(\zeta), \quad (|\zeta| \leq 1, Q \in L_e). \quad (23)$$

普通边界  $S_1$  和内外材料交界  $S_2$  上的单元扭转函数密度的插值函数分别取为

$$q(Q) = q_1^e N_1(\zeta) + q_2^e N_2(\zeta) \quad (24)$$

$$F(Q) = F_1^e N_1(\zeta) + F_2^e N_2(\zeta) + A_K \quad (Q \in S_K; K = 1, 2). \quad (25)$$

$$H(Q) = H_1^e N_1(\zeta) + H_2^e N_2(\zeta) \quad (26)$$

裂纹  $\Gamma$  上的单元扭转函数间断密度的插值函数取为

非裂尖单元

$$F(Q) = F_1^e N_1(\zeta) + F_2^e N_2(\zeta); \quad (27)$$

起始裂尖单元 ( $\zeta = -1$ )

$$F(Q) = \frac{F_1^e}{\sqrt{N_2(\zeta)}} + (F_2^e - F_1^e)N_2(\zeta); \quad (28)$$

末端裂尖单元 ( $\zeta = +1$ )

$$F(Q) = (F_2^e - F_1^e)N_1(\zeta) + \frac{F_2^e}{\sqrt{N_1(\zeta)}}. \quad (29)$$

代入应力强度因子公式(21)可得

$$K_{III}(a_j) = -\frac{G_1 \alpha}{2} \sqrt{2\pi l_e} F_1^e, K_{III}(b_j) = -\frac{G_1 \alpha}{2} \sqrt{2\pi l_e} F_2^e. \quad (30)$$

闭合的积分方程组离散后涉及奇异元和非奇异元上积分的计算,在奇异元上的积分可解析计算<sup>[10]</sup>,非奇异元上的积分可用 Gauss-Legendre 求积公式数值计算.

### 4 数值算例

含有曲线裂纹的复合圆柱体的扭转问题(见图 1),本文已简化为边界积分方程(10)、(14)~(17)的求解,并建议了边界元数值计算方法.为了证明本文方法的有效性,本节给出含有直线裂纹或曲折裂纹复合圆柱体扭转问题的两个具体算例.

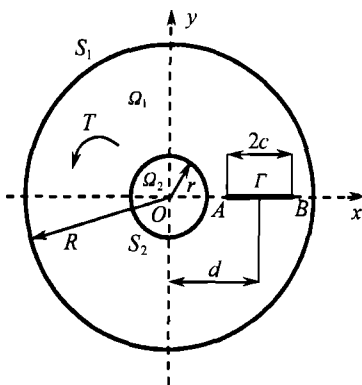


图 2 含直线裂纹复合圆柱的扭转

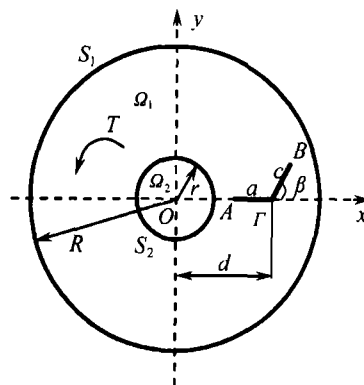


图 3 含曲折裂纹复合圆柱的扭转

#### 4.1 含有直线裂纹的复合柱体

对于图 2 所示带有直线裂纹复合圆柱体的扭转问题,用本文方法计算的无量纲扭转刚度

$$D^* = D_1^* + (G_2/G_1)D_2^*,$$

其中

$$D^* = D/((\pi/2)G_1R^4), D_1^* = D_1/((\pi/2)G_1R^4), D_2^* = D_2/((\pi/2)G_2R^4)$$

和无量纲应力强度因子  $K_{III}^* = K_{III}/(G_1\alpha R \sqrt{\pi c})$  随内、外柱体剪切模量比值的變化列于表 1(计算时取  $d/R = 0.4, c/R = 0.1$ ). 当  $G_2/G_1 = 1.0$  时,由表 1 可见本文的结果与文献[10]上对含有直线裂纹圆柱体扭转问题的结果基本吻合,表明本文的方法是有效的.

表 1 直裂纹复合圆柱体  $D^*$  和  $K_{III}^*$  随着  $G_2/G_1$  的变化 ( $r/R = 0.1$ )

$G_2/G_1$	$D^*$	$K_{III}^*(A)$	$K_{III}^*(B)$
0.50	0.985 160	-0.353 0	0.453 7
0.97	0.996 716	-0.351 9	0.452 3
0.98	0.996 725	-0.352 2	0.451 8
0.99	0.996 732	-0.352 0	0.452 1
1.00	0.996 752	-0.352 1	0.452 0
	0.996 752 <sup>[10]</sup>	-0.352 7 <sup>[10]</sup>	0.453 0 <sup>[10]</sup>
1.01	0.996 758	-0.352 1	0.451 9
1.02	0.996 760	-0.352 0	0.452 0
1.03	0.996 780	-0.352 6	0.451 2
10.00	1.019 936	-0.351 7	0.449 9

#### 4.2 含有折线裂纹的复合柱体

分析图 3 所示的带有折线裂纹的复合圆柱体的扭转问题,  $\beta$  为折线角度. 用本文方法计算得到的无量纲扭转刚度  $D^*$  和无量纲应力强度因子  $K_{III}^* = K_{III}/(G_1\alpha R \sqrt{\pi(a+c)})$  的计算结果列于表 2, 计算时取  $G_2/G_1 = 0.9, r/R = 0.1, a/R = 0.3, c/R = 0.1, d/R = 0.6$ . 由表中结果可见, 裂纹越靠近外边界, 所对应的扭转刚度越小, 应力强度因子越大, 当折线角度  $\beta = 0$  时, 扭转刚度最小, 而应力强度因子则达到最大, 也就是柱体最不安全.

表 2 折线裂纹复合圆柱体  $D^*$  和  $K_{III}^*$  随着  $\beta$  的变化

$\beta$	$D^*$	$K_{III}^*(A)$	$K_{III}^*(B)$
$-\pi/2$	0.993 874 8	-0.376 180 2	0.291 484 7
$-\pi/3$	0.984 869 1	-0.396 083 5	0.454 182 1
$-\pi/4$	0.984 335 0	-0.404 546 1	0.522 113 9
$-\pi/6$	0.983 073 9	-0.410 700 7	0.576 340 8
0	0.979 041 4	-0.414 153 8	0.624 715 6
$\pi/6$	0.980 366 9	-0.411 830 4	0.574 209 2
$\pi/4$	0.981 297 0	-0.404 461 0	0.522 376 4
$\pi/3$	0.983 269 5	-0.404 323 3	0.441 791 6
$\pi/2$	0.986 918 9	-0.375 555 1	0.291 725 7

## 5 结 论

本文对带有曲线裂纹的复合圆柱体的扭转问题进行了分析, 通过对柱体内不同材料交界

面上的位移和应力的分析,结合已有的传统边界积分方程,建立了适合带曲线裂纹复合柱体的新边界积分方程,建议了边界元数值计算方法。通过对含有直线裂纹的复合圆柱体扭转问题的计算,并与文献上已有的数据进行比较,证明了本文方法的正确性。同时对含有折线裂纹的复合圆柱体进行了数值计算,进一步证明了本文方法的有效性。

### [参 考 文 献]

- [1] 陶忠,于清. 新型组合结构柱[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [2] 张敏政. 近年地震震害的几点启示[J]. 工程抗震, 2001(1): 11-15.
- [3] 张宪恩. 地震能产生扭波吗[J]. 四川建筑, 2000, 20(4): 51.
- [4] 汤任基, 乐金朝. 含有裂纹和夹杂的复合柱体的扭转[J]. 力学学报, 1992, 24(3): 350-360.
- [5] 马稚青, 汤任基. 带裂纹组合柱的扭转[J]. 上海力学, 1992, 13(1): 15-21.
- [6] YUE Jin-chao, TANG Ren-ji. Integral equation method for the torsion of a composite cylinder with crack and inclusion[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1996, 55(5): 763-775.
- [7] 钱伟长, 叶开沅. 弹性力学[M]. 北京: 科学出版社, 1956.
- [8] 汤任基. 裂纹柱的扭转理论[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1996.
- [9] 黎在良, 王元汉, 李廷芥. 断裂力学中的边界数值方法[M]. 北京: 地震出版社, 1996.
- [10] 王银邦, 陆孜子. 含曲线裂纹圆柱扭转问题的新边界元法[J]. 应用数学和力学, 2005, 26(12): 1387-1393.
- [11] 云天铨. 积分方程及其在力学中的应用[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 1990.
- [12] TANG Ren-ji, WANG Yin-bang. On the problem of crack system with an elliptic hole[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1982, 2(1): 47-57.
- [13] Chen Y Z, Liu X Y, Chen R S. Stress intensity factor for cracked torsion triangle bar[J]. *International Journal of Fracture*, 1996, 80(1): R19-R21.
- [14] 郑建军, 刘兴业, 周欣竹. 边界元法及其在结构分析中的应用[M]. 合肥: 安徽科学技术出版社, 2006.
- [15] Brebbia C A. *The Boundary Element Method for Engineers*[M]. London: Pentech Press, 1978.

## Fracture Analysis for Torsion Problems of a Composite Cylinder With Curvilinear Cracks

PAN Tian-wei, WANG Yin-bang

(College of Engineering, Ocean University of China, Qingdao, Shandong 266100, P. R. China)

**Abstract:** The Saint-Venant torsion problems of a composite cylinder with curvilinear cracks were investigated. By means of considering the bimaterial interface as a boundary of outer bar or inner one, the problem was reduced to solving the boundary integral equations on crack, external boundary and interface. Using the new boundary element method, some typical torsion problems of a composite cylinder involving a straight or kinked crack were calculated. The obtained results were compared with the literature data to prove the validity and applicability of the present method.

**Key words:** Saint-Venant torsion; composite cylinder; curvilinear cracks; boundary integral equation; stress intensity factor