

微重力环境下充液球腔非线性 耦合动力学研究*

岳宝增

(北京理工大学 理学院 力学系, 北京 100081)

(陈立群推荐)

摘要: 采用球坐标系描述球腔中的液体动力学特性并建立一种轴对称贮腔类液刚耦合系统动力学模型. 采用模态展开方法分析了微重环境下球形贮箱中的液体晃动问题, 给出了球形贮箱内液体晃动速度势函数和波高函数的 Gauss 超几何级数解析表达式. 采用变分原理推导了系统动力学系模型, 利用 Galerkin 方法对变分方程进行特征频率分析. 运用 Lagrange 方法及非线性动力学方法导出了微重力环境下贮箱中液体与航天器结构耦合的动力学方程组, 并对该方程组进行了数值计算, 绘出了非线性耦合充液系统自由度随时间的变化历程.

关键词: 微重力; 充液系统; 耦合动力学; 液体晃动; 航天器

中图分类号: V415.4 **文献标识码:** A

引 言

在建立航天器动力学模型中, 常常假定某一非线性子系统的动力学行为能被一线性模型代替, 在研究航天器贮腔中液体晃动问题时, 就采用了上述思想. 虽然液体晃动问题从本质上说是一非线性问题, 但过去无论在理论分析或是在实验方面, 都采用晃动的等效力学模型法来预测耦合充液航天器的动力学行为. 关于建立线性模型的方法有很多文献报导^[1-13]. 所有关于液体晃动问题的线性分析都基于以下共同假设: 即液体自由液面运动的幅度要远远小于容器的特征尺寸. 因此线性耦合航天器模型只有在外部扰动很小或航天器的振动频率远离液体晃动频率时才有效. 对大多数充液量情况中液体晃动相似于一非线性软弹簧(基频随着晃动的幅值增加而降低), 在大幅晃动情况下, 显现出更加复杂的液体谐波运动. 贮腔的横向运动不再仅仅产生液体的横向平面运动, 此时还将产生与横向运动相耦合的面外模态运动, 进而会形成具有单一周期的旋转运动、多周期的旋转运动、混沌周期运动. 分析表明, 对于不同的重力环境下, 在考虑了液体运动的表面张力后, 将会观察到更加复杂的液体非线性运动. 虽然非耦合情况下的液体非线性晃动也许可以预测耦合系统中液体子系统的动力学行为, 但必须认识到, 不能把非耦合情况下的液体非线性晃动动力学行为叠加到线性航天器动力学行为上并以此来确定液体-航天器耦合系统的动力学行为. 正因为如此, 当涉及到有限幅液体非线性晃

* 收稿日期: 2007-06-21; 修订日期: 2008-07-03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10572022; 10772026)

作者简介: 岳宝增(1962—)男, 河南人, 博士, 教授(E-mail: bzyue@sohu.com).

动问题时,就必须发展耦合模型来预测航天器运动的动力学行为。

本文分析了微重力下球形容器内液体的晃动.给出了用液体表面位移的特征模态表示的速度势函数和液体表面位移的解析表达式,建立了航天器在单方向与球形腔内液体晃动进行耦合的动力学模型.然后运用 Lagrange 方法及非线性动力学的基本知识,导出了微重力下贮箱中液体与航天器结构耦合的动力学方程组,并对该方程组进行了数值计算,绘出了系统各自由度随时间的变化历程,并对数值结果进行了初步分析。

1 充液航天器液刚耦合动力学模型

本节所研究的球形贮箱内液刚耦合动力学系统如图 1 所示,由于问题的复杂性,我们只考察航天器在 x 方向与球形腔内液体的非线性动力学耦合问题。

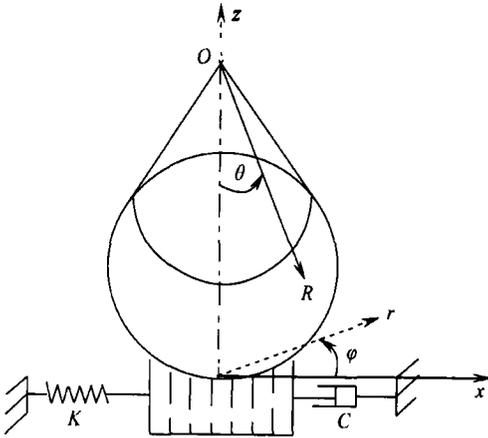


图 1 球形贮箱内液刚耦合动力学模型

引入球坐标系 (φ, r, θ) 并假设液体自由液面位移 ζ 沿着 R - 方向. 原点 O 选在某一圆锥的顶点,该圆锥与球腔壁相切于新月形静止自由液面与球腔壁的接触线处. 在所采用的球面坐标系下,静自由液面 M 、受扰自由液面 F 以及球腔壁面 W 可分别由下面的表达式表示:

$$\begin{aligned} M: R &= R_M(\theta); \\ F: R &= R_F(\theta, \varphi, t) = \\ &R_M(\theta) + \zeta(\theta, \varphi, t); \\ W: R &= R_W(\theta). \end{aligned}$$

耦合系统中贮箱内液体运动动能

$$T_l = \frac{1}{2} \rho \iiint_V \dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}} dV, \tag{1}$$

上式中

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}_m + \nabla \phi$$

为液体质点的绝对速度,其中集中质量 M 对液体的牵连速度为 $\dot{\mathbf{R}}_m = \dot{X}i$.

液体关于贮箱的相对速度为

$$\begin{aligned} \nabla \phi &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial R} \sin \theta \cos \varphi + \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \cos \theta \cos \varphi - \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \sin \varphi \right) i + \\ &\left(\frac{\partial \phi}{\partial R} \sin \theta \sin \varphi + \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \cos \theta \sin \varphi - \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \cos \varphi \right) j + \\ &\left(\frac{\partial \phi}{\partial R} \cos \theta - \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \sin \theta \right) k, \end{aligned}$$

将上列 3 项代入式(1)得

$$T_l = T_{l_1} + T_{l_2} + T_{l_3}, \tag{2}$$

式中牵连项

$$T_{l_1} = \frac{1}{2} m \dot{X}^2. \tag{3}$$

为了比较方便地求出耦合项 T_{l_2} , 令 $\psi = \dot{X}x$, 则有: $\nabla \psi = \dot{\mathbf{R}}_m$, 运用矢量场 Green 第 1 公式可得

$$T_{l_2} = \rho \iiint_V \nabla \psi \cdot \nabla \phi dV = \rho \left(\iint_{S_w} \psi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial n} dS + \iint_F \psi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial n} dF \right). \tag{4}$$

将液体表面运动学条件 $\partial\phi/\partial n = (\partial\zeta/\partial t)\cos\gamma_F$ 以及^[12]

$$\begin{aligned}\cos\gamma_F &= \mathbf{N}_F \cdot \mathbf{e}_R = R_F \sin\theta / [(R_F^2 + R_{F\theta}^2)\sin^2\theta + R_{F\varphi}^2]^{1/2}, \\ dF &= \{R_F / [(R_F^2 + R_{F\theta}^2)\sin^2\theta + R_{F\varphi}^2]^{1/2}\} d\theta d\varphi.\end{aligned}$$

代入式(4),得

$$T_{l_2} = \rho \iint_F \dot{X} \cdot \frac{\partial\zeta}{\partial t} \cos\gamma_F dF = \rho \int_0^\theta \int_0^{2\pi} \dot{X} \cdot \frac{\partial\zeta}{\partial t} R_F^3 \sin^2\theta \cos\theta d\varphi d\theta. \quad (5)$$

将 $R_F = R_M + \zeta$ 及 $\zeta = c_1(t)\theta_1(\theta)\cos\varphi + c_2(t)\theta_2(\theta)\cos 2\varphi + c_3(t)\theta_3(\theta)$ 代入式(5),得

$$\begin{aligned}T_{l_2} &= \dot{X} [l_1 \dot{c}_1(t)c_1(t)^2 + l_2 \dot{c}_2(t)c_1(t) + l_3 \dot{c}_1(t)c_2(t) + \\ &\quad l_4 \dot{c}_3(t)c_1(t) + l_5 \dot{c}_1(t)c_3(t)],\end{aligned} \quad (6)$$

其中, $c_1(t)$ 、 $c_2(t)$ 、 $c_3(t)$ 为液体晃动模型的无量纲广义坐标,同时为方便,将 $c_0(t)$ 记为 $c_3(t)$, l_i 为一系列积分表达式,具体内容可参考文献[12].

由 Green 公式,液体动能的相对项为

$$T_{l_3} = \frac{1}{2} \rho \iiint_V \nabla\phi \cdot \nabla\phi dV = \frac{1}{2} \rho \iint_F \phi \frac{\partial\phi}{\partial n} dF. \quad (7)$$

将液体表面运动学条件 $\partial\phi/\partial n = (\partial\zeta/\partial t)\cos\gamma_F$, 以及

$$\begin{aligned}\cos\gamma_F &= \mathbf{N}_F \cdot \mathbf{e}_R = R_F \sin\theta / [(R_F^2 + R_{F\theta}^2)\sin^2\theta + R_{F\varphi}^2]^{1/2}, \\ dF &= \{R_F / [(R_F^2 + R_{F\theta}^2)\sin^2\theta + R_{F\varphi}^2]^{1/2}\} d\theta d\varphi.\end{aligned}$$

代入式(7),得

$$\begin{aligned}T_{l_3} &= h_1 a_1 \dot{c}_1(t) + h_2 b_1 \dot{c}_1(t) + h_3 a_1 \dot{c}_1(t)c_1(t)^2 + h_4 b_1 \dot{c}_1(t)c_1(t)^2 + \\ &\quad h_5 a_1 c_1(t)\dot{c}_2(t) + h_6 a_1 c_2(t)\dot{c}_1(t) + h_7 a_2 c_1(t)\dot{c}_1(t) + h_8 b_1 \dot{c}_2(t)c_1(t) + \\ &\quad h_9 b_1 \dot{c}_1(t)c_2(t) + h_{10} b_2 \dot{c}_1(t)c_1(t) + h_{11} a_2 \dot{c}_2(t) + h_{12} b_2 \dot{c}_2(t) + \\ &\quad h_{13} a_1 c_1(t)\dot{c}_3(t) + h_{14} a_1 \dot{c}_1(t)c_3(t) + h_{15} a_3 \dot{c}_1(t)c_1(t) + \\ &\quad h_{16} b_1 c_1(t)\dot{c}_3(t) + h_{17} b_1 \dot{c}_1(t)c_3(t) + h_{18} b_3 \dot{c}_1(t)c_1(t) + \\ &\quad h_{19} a_3 \dot{c}_3(t) + h_{20} b_3 \dot{c}_3(t) + h_{21} a_3 \dot{c}_3(t)c_3(t),\end{aligned} \quad (8)$$

其中, h_i 、 a_i 、 b_i 为一系列积分表达式,具体内容可参考文献[12].

在耦合系统中,贮箱内液体势能由两部分组成,即重力场中的位势能 U_G 与表面张力势能 U_σ .

$$U = U_G + U_\sigma.$$

取液体静平衡位置为零势能位,则有

$$\begin{aligned}U_G &= \iiint_V \rho g R \cos\theta dV = \iiint_V \rho g R^3 \cos\theta \sin\theta dR d\theta d\varphi = \\ &\quad \rho g \int_0^\theta \int_0^{2\pi} \int_{R_F}^{R_M} R^3 \sin\theta \cos\theta dR d\theta d\varphi = \\ &\quad \frac{1}{8} \rho g \int_0^\theta \int_0^{2\pi} (R_F^4 - R_M^4) \sin 2\theta d\theta d\varphi.\end{aligned} \quad (9)$$

将 $R_F = R_M + \zeta$ 代入上式,得

$$\begin{aligned}U_G &= \frac{1}{8} \rho g \int_0^\theta \int_0^{2\pi} (4R_M^3 \zeta + 6R_M^2 \zeta^2 + 4R_M \zeta^3 + \zeta^4) \sin 2\theta d\theta d\varphi = \\ &\quad c_3(t)k_1 + c_1(t)^2 k_2 + c_2(t)^2 k_3 + c_3(t)^2 k_4 +\end{aligned}$$

$$c_1(t)^2 c_2(t) k_5 + c_1(t)^2 c_3(t) k_6 + c_1(t)^4 k_7, \quad (10)$$

其中, k_i 为一系列积分表达式, 具体内容可参考文献[12].

在上述零势能位基础上, 表面张力势能为

$$U_\sigma = -\frac{\sigma}{2} \iint_F h K_1 dF, \quad (11)$$

其中, h 为沿液体平衡面法向的扰动, 即

$$h = \zeta \cos \gamma_M = \zeta R_M (R_M^2 + R_{M\theta}^2)^{-1/2}. \quad (12)$$

K_1 为由于液面运动所引起的中曲率扰动量, 即

$$K_1 = K' - K = \frac{1}{2} (\operatorname{div} N_F - \operatorname{div} N_M), \quad (13)$$

其中, K' 为扰动液面的中曲率, K 为静液面的中曲率, N_F 为受扰液面的单位法向量, N_M 为静液面的单位法向量, 而

$$N_F = (\mathbf{e}_R R_F \sin \theta - \mathbf{e}_\theta R_{F\theta} \sin \theta - \mathbf{e}_\varphi R_{F\varphi}) / \sqrt{(R_F^2 + R_{F\theta}^2) \sin^2 \theta + R_{F\varphi}^2}, \quad (14)$$

$$N_M = (\mathbf{e}_R R_M - \mathbf{e}_\theta R_{M\theta}) / \sqrt{R_M^2 + R_{M\theta}^2}. \quad (15)$$

由式(14), 得

$$\begin{aligned} \operatorname{div} N_F = R_F^{-1} \left\{ R_F \frac{\partial}{\partial R} (N_F \cdot \mathbf{e}_R) + 2(N_F \cdot \mathbf{e}_R) + \frac{\partial}{\partial \theta} (N_F \cdot \mathbf{e}_\theta) + \right. \\ \left. \frac{1}{\tan \theta} (N_F \cdot \mathbf{e}_\theta) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_F \cdot \mathbf{e}_\varphi) \right\} = \\ R_F^{-1} [(R_F^2 + R_{F\theta}^2) \sin^2 \theta + R_{F\varphi}^2]^{-3/2} [\sin^3 \theta (2R_F^3 + 3R_F R_{F\theta}^2 - R_F^2 R_{F\theta}) + \\ \sin \theta \{ (3R_F - R_{F\theta}) R_{F\varphi}^2 + 2R_{F\theta} R_{F\varphi} R_{F\theta\varphi} - (R_F^2 + R_{F\theta}^2) R_{F\varphi\varphi} \} - \\ \cos \theta \sin^2 \theta (R_F^2 + R_{F\theta}^2) R_{F\theta} - 2 \cos \theta \cdot R_{F\theta} R_{F\varphi}^2]. \end{aligned} \quad (16)$$

将 $R_F = R_M + \zeta$ 代入式(16), 忽略非线性项, 可将 $\operatorname{div} N_F$ 表示成 ζ 和它的微分的形式:

$$\operatorname{div} N_F = \{ S_{0M}(\theta) + \zeta S_{1M}(\theta) + \zeta_\theta S_{2M}(\theta) + \zeta_{\theta\theta} S_{3M}(\theta) + \zeta_{\varphi\varphi} S_{4M}(\theta) \}, \quad (17)$$

其中, $S_{0M}(\theta)$ 、 $S_{1M}(\theta)$ 、 $S_{2M}(\theta)$ 、 $S_{3M}(\theta)$ 、 $S_{4M}(\theta)$ 的具体表达式可参考文献[12].

由式(15)得到

$$\operatorname{div} N_M = R_M^{-1} (R_M^2 + R_{M\theta}^2)^{-3/2} [2R_M^3 + 3R_M R_{M\theta}^2 - \\ R_{M\theta}^2 R_{M\theta\theta} - R_{M\theta} (R_M^2 + R_{M\theta}^2) \cot \theta],$$

即有 $\operatorname{div} N_M = S_{0M}(\theta)$. 因而有

$$K_1 = \frac{1}{2} \{ \zeta S_{1M}(\theta) + \zeta_\theta S_{2M}(\theta) + \zeta_{\theta\theta} S_{3M}(\theta) + \zeta_{\varphi\varphi} S_{4M}(\theta) \},$$

所以

$$U_\sigma = -\frac{\sigma}{4} \iint_F \zeta [\zeta S_{1M}(\theta) + \zeta_\theta S_{2M}(\theta) + \zeta_{\theta\theta} S_{3M}(\theta) + \\ \zeta_{\varphi\varphi} S_{4M}(\theta)] R_M (R_M^2 + R_{M\theta}^2)^{-1/2} dF.$$

又由于

$$dF = R_F [(R_F^2 + R_{F\theta}^2) \sin^2 \theta + R_{F\varphi}^2]^{1/2} d\theta d\varphi \approx \\ R_M (R_M^2 + R_{M\theta}^2)^{1/2} \sin \theta d\theta d\varphi,$$

所以

$$U_\sigma = -\frac{\sigma}{4} \int_0^{\bar{\theta}} \int_0^{2\pi} \zeta [\zeta S_{1M}(\theta) + \zeta_\theta S_{2M}(\theta) + \zeta_{\theta\theta} S_{3M}(\theta) + \zeta_{\varphi\varphi} S_{4M}(\theta)] R_M^2 \sin\theta d\theta d\varphi. \quad (18)$$

将 $\zeta = c_1(t)\theta_1(\theta)\cos\varphi + c_2(t)\theta_2(\theta)\cos 2\varphi + c_3(t)\theta_3(\theta)$, 其中, $\theta_1(\theta)$ 、 $\theta_2(\theta)$ 、 $\theta_3(\theta)$ 为具有不同周向波数 m ($m = 0, 1, 2$) 的基阶晃动模态, 代入式(18), 得

$$U_\sigma = q_1 c_1^2(t) + q_2 c_2^2(t) + q_3 c_3^2(t),$$

其中, q_i 的具体内容可参考文献[12].

耦合系统中弹簧-质量 M 子系统的动能、势能分别为

$$T_M = \frac{1}{2} M \dot{X}^2, \quad U_k = \frac{1}{2} k X^2.$$

整个系统的 Lagrange 函数应为

$$L = T_M + T_{l_1} + T_{l_2} + T_{l_3} - U_k - U_G - U_\sigma. \quad (19)$$

将有关表达式代入上式, 则得到 L 关于 X 、 $a_i(t)$ 、 $b_i(t)$ 及 $c_i(t)$ 的表达式, 即

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} (M + m) \dot{X}^2 + \dot{X} [l_1 \dot{c}_1(t) c_1(t)^2 + l_2 \dot{c}_2(t)^2 c_1(t) + l_3 \dot{c}_1(t) c_2(t) + \\ & l_4 \dot{c}_3(t) c_1(t) + l_5 \dot{c}_1(t) c_3(t)] - \frac{1}{2} k X^2 + h_1 a_1 \dot{c}_1(t) + \\ & h_2 a_1 \dot{c}_1(t) c_1(t)^2 + h_3 a_1 \dot{c}_1(t) c_1(t)^2 + h_4 b_1 \dot{c}_1(t) c_1(t)^2 + h_5 a_1 c_1(t) \dot{c}_2(t) + \\ & h_6 a_1 c_2(t) \dot{c}_1(t) + h_7 a_2 c_1(t) \dot{c}_1(t) + h_8 b_1 \dot{c}_2(t) c_1(t) + h_9 b_1 \dot{c}_1(t) c_2(t) + \\ & h_{10} b_2 \dot{c}_1(t) c_1(t) + h_{11} a_2 \dot{c}_2(t) + h_{12} b_2 \dot{c}_2(t) + h_{13} a_1 c_1(t) \dot{c}_3(t) + \\ & h_{14} a_1 \dot{c}_1(t) c_3(t) + h_{15} a_3 \dot{c}_1(t) c_1(t) + h_{16} b_1 c_1(t) \dot{c}_3(t) + \\ & h_{17} b_1 \dot{c}_1(t) c_3(t) + h_{18} b_3 c_1(t) \dot{c}_1(t) + h_{19} a_3 \dot{c}_3(t) + \\ & h_{20} b_3 \dot{c}_3(t) + h_{21} a_3 c_3(t) \dot{c}_3(t) - [c_3(t) k_1 + c_1(t)^2 k_2 + c_2(t)^2 k_3 + \\ & c_3(t)^2 k_4 + c_1(t)^2 c_2(t) k_5 + c_1(t)^2 c_3(t) k_6 + c_1(t)^4 k_7] - \\ & [q_1 c_1^2(t) + q_2 c_2^2(t) + q_3 c_3^2(t)]. \end{aligned} \quad (20)$$

由 $a_i(t)$ 、 $b_i(t)$ 与 $c_i(t)$ 之间的关系, 最后可得到 L 关于 X 、 $c_i(t)$ 及它们的导数的表达式。 $a_i(t)$ 、 $b_i(t)$ 与 $c_i(t)$ 之间的关系可参考文献[12]。 从而有

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} (M + m) \dot{X}^2 + \dot{X} [l_1 \dot{c}_1(t) c_1(t)^2 + l_2 \dot{c}_2(t) c_1(t) + l_3 \dot{c}_1(t) c_2(t) + \\ & l_4 \dot{c}_3(t) c_1(t) + l_5 \dot{c}_1(t) c_3(t)] - \frac{1}{2} k X^2 + (m_1 n_1 h_1 + n_1 h_2) \dot{c}_1(t)^2 + \\ & (m_1 n_1 h_3 + n_1 h_4) \dot{c}_1(t)^2 c_1(t)^2 + (m_1 n_1 h_5 + m_2 n_2 h_7 + \\ & n_1 h_8 + n_2 h_{10}) c_1(t) \dot{c}_1(t) \dot{c}_2(t) + (m_1 n_1 h_6 + n_1 h_9) \dot{c}_1(t)^2 c_2(t) + \\ & (m_2 n_2 h_{11} + n_2 h_{12}) \dot{c}_2(t)^2 + (m_1 n_1 h_{13} + n_1 h_{16} + \\ & n_3 h_{18} + m_3 n_3 h_{15}) c_1(t) \dot{c}_1(t) \dot{c}_3(t) + (m_1 n_1 h_{14} + n_1 h_{17}) \dot{c}_1(t)^2 c_3(t) + \\ & (m_3 n_3 h_{19} + n_3 h_{20}) \dot{c}_3(t)^2 + m_3 n_3 h_{21} c_3(t) \dot{c}_3(t)^2 - \\ & [c_3(t) k_1 + c_1(t)^2 k_2 + c_2(t)^2 k_3 + c_3(t)^2 k_4 + c_1(t)^2 c_2(t) k_5 + \\ & c_1(t)^2 c_3(t) k_6 + c_1(t)^4 k_7] - [q_1 c_1^2(t) + q_2 c_1^2(t) + q_3 c_3^2(t)]. \end{aligned} \quad (21)$$

耦合系统中弹簧-质量 M 结构子系统的耗散函数 R_s 为

$$R_s = \frac{1}{2} c \dot{X}^2. \quad (22)$$

将式(21)、(22)代入 Lagrange 方程,得到以下系统动力学方程

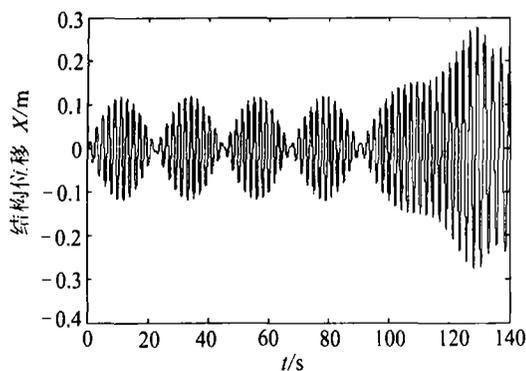
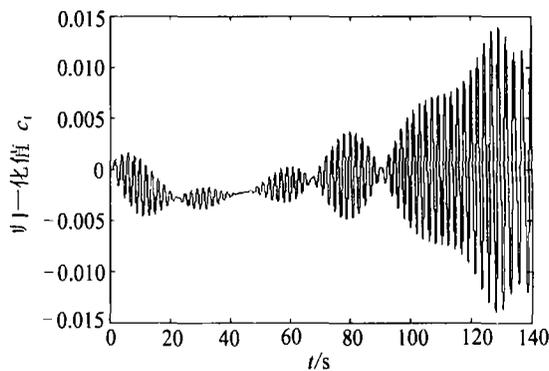
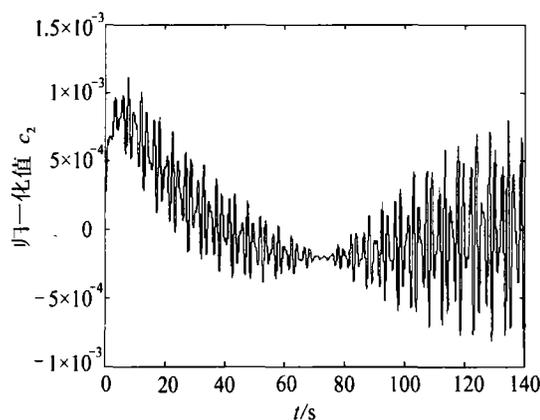
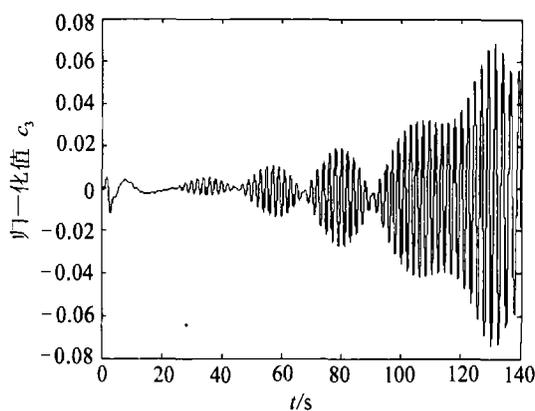
$$\left\{ \begin{aligned} &(M + m)\ddot{X} + c\dot{X} + (d_1 m_1 + d_2)n_1 \dot{c}_1(t) + kX = F_X, \\ &(d_1 m_1 + d_2)n_1 \ddot{X} + [2(m_1 n_1 h_1 + n_1 h_2) + 2(m_1 n_1 h_3 + n_1 h_4)c_1(t)^2 + \\ &\quad 2(m_1 n_1 h_6 + n_1 h_9)c_2(t) + 2(m_1 n_1 h_{14} + n_1 h_{17})c_3(t)]\ddot{c}_1(t) + \\ &\quad (m_1 n_1 h_5 + m_2 n_2 h_7 + n_1 h_8 + n_2 h_{10})c_1(t)\ddot{c}_2(t) + \\ &\quad (m_1 n_1 h_{13} + n_1 h_{16} + n_3 h_{18} + m_3 n_3 h_{15})c_1(t)\ddot{c}_3(t) + \\ &\quad 2(m_1 n_1 h_3 + n_1 h_4)\dot{c}_1(t)^2 + 2(m_1 n_1 h_6 + n_1 h_9)\dot{c}_1(t)\dot{c}_2(t) + \\ &\quad 2(m_1 n_1 h_{14} + n_1 h_{17})\dot{c}_1(t)\dot{c}_3(t) + 2k_2 c_1(t) + 2k_5 c_1(t)c_2(t) + \\ &\quad 2k_6 c_1(t)c_3(t) + 4k_7 c_1(t)^3 + 2q_1 c_1(t) = 0, \\ &(m_1 n_1 h_5 + m_2 n_2 h_7 + n_1 h_8 + n_2 h_{10})c_1(t)\ddot{c}_1(t) + 2(m_2 n_2 h_{11} + \\ &\quad n_2 h_{12})\ddot{c}_2(t) + (m_1 n_1 h_5 + m_2 n_2 h_7 + n_1 h_8 + n_2 h_{10} - m_1 n_1 h_6 - \\ &\quad n_1 h_9)\dot{c}_1(t)^2 + 2k_3 c_2(t) + k_5 c_1(t)^2 + 2q_2 c_2(t) = 0, \\ &(m_1 n_1 h_{13} + n_1 h_{16} + n_3 h_{18} + m_3 n_3 h_{15})c_1(t)\ddot{c}_1(t) + [2(m_3 n_3 h_{19} + \\ &\quad n_3 h_{20}) + 2m_3 n_3 h_{21} c_3(t)]\ddot{c}_3(t) + [(m_1 n_1 h_{13} + n_1 h_{16} + n_3 h_{18} + \\ &\quad m_3 n_3 h_{15}) - (m_1 n_1 h_{14} + n_1 h_{17})]\dot{c}_1(t)^2 + m_3 n_3 h_{21} \dot{c}_3(t)^2 + \\ &\quad k_1 + 2k_4 c_3(t) + k_6 c_1(t)^2 + 2q_3 c_3(t) = 0. \end{aligned} \right. \quad (23)$$

2 数值结果

不难看到,对于式(23)这样复杂的动力学微分方程组,要通过分析的方法获得一些深入的认识是相当困难的,因此寻求数值求解途径就成为当然选择. 考察液固耦合项,可以看到它们均以加速度项的形式出现,这表明该耦合系统实质上是在惯性力意义下实现耦合的. 进一步考察液体晃动各自由度方程,我们发现,3个自由度的晃动模态在广义位移、广义速度及广义加速度意义上均存在耦合项,模态之间互相带动,相互牵制作用十分明显. 如果说广义加速度代表了模态晃动的惯性特征,那么加速度项系数随广义位移而变化的特点及惯性项之间的耦合正好反映了液体晃动过程中质量不断地、大量地迁移的特征.

以下首先给出待仿真系统的有关参数:结构质量 $M = 9\,800$ kg,液体质量 $m = 3\,920$ kg,结构阻尼系数 $c = 612.5$ N·s/m, $B_0 = 10$,球腔半径 $r = 1.0$ m,弹簧刚度 $k = 147\,610$ N/m. 外激励 $F_X = 8\,500 \sin 3t$,积分步长为 0.01 s,系统自由度随时间的变化如图2~图5所示.

从数值仿真结果可以看出,充液耦合系统具有强非线性特征. 结构运动具有明显的拍振现象,随着时间变量的增加,结构振动幅值剧烈增大(当时间 $t > 100$ s时,尤为明显——如图2所示). 周向波数为0及1时的液体晃动模态较2阶模态对耦合系统动力学特性有更加明显的影响. 在实际航天工程中,周向波数为0及1的晃动模态对航天器姿态动力学及控制具有重要影响;前者产生轴向的晃动力而后者产生面外及俯仰晃动力矩. 数值结果还表明,奇数阶液体晃动模态较偶数阶液体晃动模态呈现更加强烈非线性特性(见图3、4).

图2 结构位移 X 的时间变化历程图3 广义坐标 c_1 的变化时间历程图4 广义坐标 c_2 的时间变化图5 广义坐标 c_3 的变化时间历程

3 结 论

本文对液-刚非线性耦合系统解析研究,采用特征模态叠加方法推导了液-刚耦合系统的特征函数,并得到了耦合系统的 Lagrange 函数.利用自由液面的非线性势能函数,将表面张力效应引入到系统的数学模型.本文方法对复杂充液耦合系统的建模具有重要意义.结果表明:液体模态和结构模态具有耦合特征,高阶模态对耦合系统具有明显效应,在航天器的总体设计、建模以及实施姿态控制时必须予以重视.

[参 考 文 献]

- [1] Moiseev N N, Rumjantsev V V. *Dynamics Stability of Bodies Containing Fluid*[M]. In: Abramson H N, Ed. New York: Springer-Verlag, 1968.
- [2] Utsumi M. Low-gravity propellant slosh analysis using spherical coordinates[J]. *J Fluid Mech*, 1998, 12(1):57-83.
- [3] Schilling U, Siekmann J. Numerical study of equilibrium capillary surfaces under low gravitational conditions[J]. *Ingenieur-Archiv*, 1981, 60(2):176-182.
- [4] YUE Bao-zeng. Nonlinear phenomena of three-dimensional liquid sloshing in micro-gravity environment[J]. *Chinese Science Bulletin*, 2006, 51(20):2425-2431.
- [5] Yeh G G K. Free and forced oscillations of a liquid in an axisymmetric tank at low gravity environments[J]. *J Appl Mech*, 1996, 34(1):23-28.
- [6] 岳宝增. 三维液体大幅晃动与液弹耦合动力学研究[D]. 博士学位论文. 北京:清华大学, 1998.

- [7] Peterson Lee D, Crawly Edward F, Hansman R John. Nonlinear fluid slosh coupled to the dynamics of a spacecraft[J]. *AIAA Journal*, 1989, 27(9):1230-1240.
- [8] Van Schoor M C, Crawley E F. Nonlinear forced-response characteristics of contained fluids in microgravity[J]. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1995, 32(3):521-532.
- [9] Casademunt Jaume, ZHANG Wen-bin, Vinals Jorge, et al. Stability of a fluid surface in a microgravity environment[J]. *AIAA Journal*, 1993, 31(11):2027-2032.
- [10] Yoshimatsu K, Funakoshi M M. Surface waves in a square container due to resonant horizontal oscillations[J]. *Journal of the Physical Society of Japan*, 2001, 70(2):394-406.
- [11] Utsumi M. Low-gravity sloshing in an axisymmetrical container excited in the axial direction[J]. *Journal of Mechanics*, 2000, 67(2):344-354.
- [12] 李云翔. 微重力下充液航天器液-刚耦合非线性动力学研究[D]. 硕士学位论文. 北京:北京理工大学, 2004.
- [13] YUE Bao-zeng. Numerical study of three-dimensional liquid free surface dynamics[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2006, 22(2):120-125.

Nonlinear Coupling Dynamics of Liquid Filled Spherical Container in Microgravity

YUE Bao-zeng

(*Department of Mechanics, School of Science, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, P. R. China*)

Abstract: Nonlinear coupled dynamics of liquid-filled spherical container in microgravity is investigated. The governing equations of the low-gravity liquid sloshing in a convex axisymmetrical container subjected to lateral excitation was obtained by variational principle and solved by a modal analysis method. The variational formulas were transformed into a frequency equation in the form of a standard eigenvalue problem by the Galerkin method, in which admissible functions for the velocity potential and the liquid free surface displacement were determined analytically in terms of the Gauss hypergeometric series. The coupled dynamic equations of the liquid-filled container were derived using Lagrange's method, and are numerically solved. The time histories of the modal solutions were obtained by numerical simulations.

Key words: microgravity; liquid-filled system; coupling dynamics; liquid sloshing; spacecraft