

非线性动力系统的自适应 显式 Magnus 数值方法*

李文成¹, 邓子辰^{2,3}

(1. 西北工业大学 理学院, 西安 710072;

2. 西北工业大学 力学与土建学院, 西安 710072;

3. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116023)

(岳珠峰推荐)

摘要: 基于最近发展的矩阵李群上非线性微分方程的显式 Magnus 展式, 给出了非线性动力系统的有效的数值算法, 并且在数值求解过程中具有自适应的步长控制特点, 可以显著地提高计算效率. 最后, 通过非线性动力系统典型问题 Duffing 方程和强刚性的 Van der Pol 方程以及非线性振子的 Hamilton 方程的数值实验来说明方法的有效性.

关键词: 非线性动力系统; Hamilton 系统; 数值方法; 步长控制

中图分类号: O322; O241 文献标识码: A

引 言

考虑如下非线性微分方程的初值问题

$$Y' = A(t, Y) Y, Y(t_0) = Y_0 \in G, \quad (1)$$

其中, G 是矩阵李群, 矩阵函数 $A: \mathbf{R}_+ \times G \rightarrow \mathfrak{g}$, \mathfrak{g} 为相应的李代数. 该方程在诸如刚体动力学系统, 连续系统的 Liapunov 指数计算 ($G \equiv \text{SO}(n)$), Hamilton 力学 ($G \equiv \text{Sp}(n)$) 以及量子力学 ($G \equiv \text{SU}(n)$) 中具有广泛的应用. 事实上, 任何矩阵李群 G 上的微分方程都可以表示成方程 (1) 的形式. 因此, 寻求保持该类动力系统结构特性的有效的几何积分算法, 具有重要的研究价值.

Magnus 展式^[1]曾经是构造线性常微分方程的分析逼近解的重要途径, 近年来, Iserles 和 Nørsett^[2]利用根树理论分析 Magnus 展式的特点, 构造并发展了线性微分方程数值解法的实用递归数值算法理论. 该算法不仅在离散微分方程的同时保持方程的定性性质, 如不变性和几何结构等^[3-4], 而且由于保持了微分方程的重要特性, 使得数值逼近更加精确, 更加稳定. 目前, 几类基于 Magnus 展式的算法已经得到发展和完善, 无论在计算精度, 还是计算效率上比传统的微分方程的数值算法都具有较大的优势^[5]. 然而, 该类算法主要是针对自治的线性微分

* 收稿日期: 2008-01-24; 修订日期: 2008-07-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10632030; 10572119); 大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室开放基金资助项目

作者简介: 李文成(1978-), 男, 宁夏人, 讲师, 博士(E-mail: wenchengli@nwpu.edu.cn);

邓子辰(联系人, Tel: +86-29-88492157; E-mail: dweifan@nwpu.edu.cn).

方程而言,即,其矩阵函数 A 仅依赖于时间 t . 如何将该类几何积分算法推广到形如式(1)的非线性微分方程是具有挑战性的问题,也是很多人试图尝试的难题. 目前,主要有两类方法,其一是 Zanna 基于配置法给出的 Magnus 方法^[6],但在计算效率上相对分裂方法和复合方法而言尚待提高;其二是 Blanes 和 Moan^[7]以及 Zhang 和 Deng^[8-9]等给出的针对某些非线性微分方程的基于修正模式的 Magnus 展式的数值方法. 最近 Casas 和 Iserles^[10]则发展了非线性的 Magnus 展式并基于此给出了非线性微分方程(1)的显式 Magnus 方法. 本文基于非线性的 Magnus 展式,给出了具有自适应步长控制的显式 Magnus 算法,并考虑了其在非线性动力系统和非线性哈密顿系统的应用.

1 非线性微分方程的非线性 Magnus 展式

类似线性微分方程的 Magnus 展式^[2],首先将方程(1)的解表示成如下形式:

$$Y(t) = e^{\Omega(t)} Y_0, \quad (2)$$

其中, Ω 满足如下微分方程的初值问题:

$$\dot{\Omega} = d \exp^{-1}_{\Omega} (A(t, e^{\Omega} Y_0)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} ad^k_{\Omega} A(t, e^{\Omega} Y_0), \quad \Omega(0) = \mathbf{0}, \quad (3)$$

其中, $(B_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ 是 Bernoulli 函数,并且有

$$\frac{B_k}{k!} = \left\{ 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{12}, 0, -\frac{1}{720}, 0, \frac{1}{3024}, 0, -\frac{1}{120960}, 0, \dots \right\},$$

$$ad^m_{\Omega} A = [\Omega, ad^m_{\Omega} A], \quad m \geq 0, \quad ad^0_{\Omega} A = A.$$

对于非线性微分方程(1), Ω 的非线性 Magnus 展式可以由 Picard 迭代得到

$$\begin{aligned} \Omega^{(0)}(t) &= \mathbf{0}, \\ \Omega^{m+1}(t) &= \int_0^t d \exp^{-1}_{\Omega^{(m)}(s)} A(s, e^{\Omega^{(m)}(s)} Y_0) ds = \\ &= \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} ad^k_{\Omega^{(m)}(s)} A(s, e^{\Omega^{(m)}(s)} Y_0) ds, \quad m \geq 0. \end{aligned}$$

又考虑到 $\Omega^{[k]}$, $k > 1$ 的幂级数展式是 $\Omega(t)$ 的一定阶精度 $O(t^m)$ 的逼近,保留 $\Omega^{[k]}$ 的所有小于 $O(t^m)$ 的逼近项,同时忽略高阶项,将上面的 $d \exp^{-1}$ 算子的无穷展式以恰当的方式截断,从而得到显式的逼近展式. 不妨,令

$$\begin{cases} \Omega^{(1)}(t) = \int_0^t A(s, Y_0) ds, \\ \Omega^m(t) = \sum_{k=0}^{m-2} \frac{B_k}{k!} \int_0^t ad^k_{\Omega^{(m-1)}(s)} A(s, e^{\Omega^{(m-1)}(s)} Y_0) ds, \quad m \geq 2. \end{cases} \quad (4)$$

此外,通过计算可以发现 $\Omega^{[m]}(t)$ 为 Ω 的线性微分方程 $\dot{Y} = A(t) Y$ 的 Magnus 展式的前 m 项,所以,可以将式(4)看作非线性微分方程(1)的显式 Magnus 展式. 该展式的逼近阶满足如下 Casas 和 Iserles 的定理^[10]:

定理 1 若 $\Omega(t)$ 是微分方程初值问题(3)的解析解, $\Omega^{[m]}(t)$ 是由式(4)迭代所得逼近解,则有

$$\Omega(t) - \Omega^{[m]}(t) = O(t^{m+1})$$

即,若 $\Omega^{[m]}(t)$ 代入式(2),则 $Y^{[m]}(t)$ 为非线性微分方程(1)的解的显式逼近解,并且其精度可以达到 $O(t^{m+1})$.

2 非线性微分方程的数值算法

2.1 非线性微分方程的数值格式

为了说明由显式 Magnus 展式(4)构造数值方法的思路,首先给出二阶数值格式,然后考虑四阶格式

二阶格式 该情形相当于式(4)中 $m = 2$, 所以

$$\begin{aligned}\Omega^{[1]}(t) &= \int_0^t \mathbf{A}(s, \mathbf{Y}_0) ds, \\ \Omega^{[2]}(t) &= \int_0^t \mathbf{A}(s, e^{\Omega^{[1]}(s)} \mathbf{Y}_0) ds.\end{aligned}$$

如果使用一阶的 Euler 逼近, $\Omega^{[1]}(h) = h\mathbf{A}(0, \mathbf{Y}_0) + O(h^2)$, 同时, 对 $\Omega^{[2]}$ 使用梯形公式离散, 则有

$$\Omega^{[2]}(h) = \frac{h}{2} \mathbf{A}(0, \mathbf{Y}_0) + \mathbf{A}(h, e^{\Omega^{[1]}(h)} \mathbf{Y}_0) + O(h^3),$$

则可得一个显式二阶格式:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 \equiv \frac{h}{2} \mathbf{A}(0, \mathbf{Y}_0) + \mathbf{A}(h, e^{h\mathbf{A}(0, \mathbf{Y}_0)} \mathbf{Y}_0) = \Omega^{[2]} + O(h^3), \\ \mathbf{Y}_1 = e^{\mathbf{v}_1} \mathbf{Y}_0. \end{cases} \quad (5)$$

此外, 若对 $\Omega^{[2]}$ 用中点公式离散, 则可得另一个二阶格式:

$$\mathbf{v}_2 \equiv h \mathbf{A}\left[\frac{h}{2}, e^{(h/2)\mathbf{A}(0, \mathbf{Y}_0)} \mathbf{Y}_0\right] = \Omega^{[2]}(h) + O(h^3), \quad \mathbf{Y}_1 = e^{\mathbf{v}_2} \mathbf{Y}_0. \quad (6)$$

四阶格式 该情形相当于 $m = 4$, 即

$$\begin{aligned}\Omega^{[4]}(t) &= \int_0^t \left[\mathbf{A}_3(s) - \frac{1}{2} [\Omega^{[3]}(s), \mathbf{A}_3(s)] + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{12} [\Omega^{[3]}(s), [\Omega^{[3]}(s), \mathbf{A}_3(s)]] \right] ds, \end{aligned} \quad (7)$$

其中, $\mathbf{A}_3(s) \equiv \mathbf{A}(s, e^{\Omega^{[3]}(s)} \mathbf{Y}_0)$. 用 Simpson 公式逼近 $\Omega^{[4]}(h)$:

$$\begin{aligned}\Omega^{[4]}(h) &= \frac{h}{6} \left[\mathbf{A}_3(0) + 4\mathbf{A}_3\left[\frac{h}{2}\right] + \mathbf{A}_3(h) \right] - \frac{h}{3} \left[\Omega^{[3]}\left[\frac{h}{2}\right], \mathbf{A}_2\left[\frac{h}{2}\right] \right] - \\ &\quad \frac{h}{12} [\Omega^{[3]}(h), \mathbf{A}_2(h)] + \frac{h}{18} \left[\Omega^{[3]}\left[\frac{h}{2}\right], \left[\Omega^{[3]}\left[\frac{h}{2}\right], \mathbf{A}_3\left[\frac{h}{2}\right] \right] \right] + \\ &\quad \frac{h}{72} [\Omega^{[3]}(h), [\Omega^{[3]}(h), \mathbf{A}_3(h)]] + O(h^4), \end{aligned} \quad (8)$$

同时 $\Omega^{[3]}(h)$ 采用三阶精度 $O(h^4)$ 的逼近, 而 $\Omega^{[3]}(h/2)$ 给出直到 $O(h^3)$ 阶的逼近, 则式(8)可得四阶格式.

首先考虑 $\Omega^{[3]}(h)$ 的三阶精度 $O(h^4)$ 的逼近

$$\Omega^{[3]}(t) = \int_0^t \left[\mathbf{A}_2(s) - \frac{1}{2} [\Omega^{[2]}(s), \mathbf{A}_2(s)] \right] ds, \quad (9)$$

其中, $\mathbf{A}_2(s) = \mathbf{A}(s, e^{\Omega^{[2]}(s)} \mathbf{Y}_0)$. 若使用 Simpson 公式逼近(9), 则有

$$\begin{aligned}\Omega^{[3]}(h) &= \frac{h}{6} \left[\mathbf{A}(0, \mathbf{Y}_0) + 4\mathbf{A}_2\left[\frac{h}{2}\right] + \mathbf{A}_2(h) \right] - \\ &\quad \frac{h}{3} \left[\Omega^{[2]}\left[\frac{h}{2}\right], \mathbf{A}_2\left[\frac{h}{2}\right] \right] - \frac{h}{12} [\Omega^{[2]}(h), \mathbf{A}_2(h)] + O(h^4). \end{aligned} \quad (10)$$

同时 $\Omega^{[1]}$ 可以采用 Euler 逼近, $\Omega^{[2]}(h)$ 使用中点公式, 而 $\Omega^{[2]}(h/2)$ 利用梯形公式

$$\Omega^{2j} \left[\frac{h}{2} \right] = \frac{h}{4} \left(A(0, Y_0) + A(h, e^{(h/2)A(0, Y_0)} Y_0) \right) + O(h^3). \quad (11)$$

然后, 将 $\Omega^{3j}(h/2)$ 用类似的方法给出直到 $O(h^3)$ 阶的逼近, 附加两个矩阵函数 A 的计算.

最后, 由式(8)可以得到非线性微分方程的一个四阶数值算法. 令 $t_{n+1} = t_n + h$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \mathbf{0}, \quad k_1 = h A(t_n, Y_n), \quad Q_1 = k_1, \\ u_2 = Q_1/2, \quad k_2 = h A\left(t_n + \frac{h}{2}, e^{u_2} Y_0\right), \quad Q_2 = k_2 - k_1, \\ u_3 = \frac{1}{2} Q_1 + \frac{1}{4} Q_2, \quad k_3 = h A\left(t_n + \frac{h}{2}, e^{u_3} Y_0\right), \quad Q_3 = k_3 - k_2, \\ u_4 = Q_1 + Q_2, \quad k_4 = h A(t_n + h, e^{u_4} Y_0), \quad Q_4 = k_4 - 2k_2 + k_1, \\ u_5 = \frac{1}{2} Q_1 + \frac{1}{4} Q_2 + \frac{1}{3} Q_3 - \frac{1}{24} Q_4 - \frac{1}{48} [Q_1, Q_2], \\ k_5 = h A\left(t_n + \frac{h}{2}, e^{u_5} Y_0\right), \quad Q_5 = k_5 - 2k_2, \\ u_6 = Q_1 + Q_2 + \frac{2}{3} Q_3 + \frac{1}{6} Q_4 - \frac{1}{6} [Q_1, Q_2], \\ k_6 = h A(t_n + h, e^{u_6} Y_0), \quad Q_6 = k_6 - 2k_2 + k_1, \\ v_4 = Q_1 + Q_2 + \frac{2}{3} Q_5 + \frac{1}{6} Q_6 - \frac{1}{6} [Q_1, Q_2 - Q_3 + Q_5 + \frac{1}{2} Q_6], \\ Y_{n+1} = e^{v_4} Y_n. \end{array} \right. \quad (12)$$

上面的算法事实上包含了低阶的方法: 若取 $v_1 = k_1$, 则为一阶格式; 若取 $v_2 = k_2$, 则为二阶格式; 若只计算 u_6 , 则 $v_3 = u_6$ 是三阶格式. 也正因为如此, 在数值积分过程中可以应用步长控制策略.

2.2 自适应步长控制方法

自适应步长控制算法使数值方法更加有效. 其步长的选择基于均匀分布的误差估计. 一般单步方法可以使用两种误差估计, 一是 Embedding 方法, 二是 Richardson 外推方法. 这里, 采用线性的 Embedding 方法^[11], 即使用高阶方法(q 阶)的同时, 为了估计误差, 再使用另外的低阶方法(p 阶).

考虑下面的微分方程的三阶和四阶数值逼近

$$Y_{n+1} = e^{\Omega^{3j}(t)} Y_n, \quad Y_{n+1} = e^{\Omega^{4j}(t)} Y_n. \quad (13)$$

从上节可以知道, 显式的 Magnus 格式的特点适合 Embedding 方法的应用, 即选择 $\Omega^{3j}(t) = v_3$ 作为 Y_{n+1} 的三阶数值逼近解, 而 $\Omega^{4j}(t) = v_4$ 则为四阶数值逼近解. 因此, 在李群上局部误差如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{n+1} - Y_{n+1} = (e^{\Omega^{4j}(t)} - e^{\Omega^{3j}(t)}) Y_n = (I - e^{\Omega^{3j}(t)} e^{-\Omega^{4j}(t)}) Y_{n+1} = \\ \quad \left(I - \exp \left[-\Omega^{3j}(t) - \Omega^{4j}(t) - \frac{1}{2} [\Omega^{3j}(t), \Omega^{4j}(t)] + O(h^5) \right] \right) Y_{n+1} = \\ \quad v_3 + v_4 + \frac{1}{2} [v_3, v_4] Y_{n+1} = O(h^5), \\ E_{\text{local}} = \| Y_{n+1} - Y_{n+1} \| = \left\| \left[v_3 + v_4 + \frac{1}{2} [v_3, v_4] \right] Y_{n+1} \right\|, \end{array} \right. \quad (14)$$

这样的误差估计对于非交换的矩阵非常有效. 首先, 给定绝对误差限 A_T 和相对误差限 R_T . 然后, 在计算过程中如果算法的局部误差满足

$$E_{\text{local}} \leq T(\sigma) := A_T + R_T \|\sigma\|, \quad (15)$$

其中, $\sigma = \|Y_n\|$, 则从 t_n 到 t_{n+1} 当前步长可以采用, 继续计算逼近解 Y_{n+2} 和新的步长

$$h_{\text{new}} = \alpha \max \left[r_{\min}, \min \left[r_{\max}, \left(\frac{T}{E_{\text{local}}} \right)^{1/(p+1)} \right] \right] h_{\text{old}}, \quad (16)$$

其中, p 是低阶方法的阶 ($p = 3$). 其它常数选为 $\alpha \approx 0.9$, $r_{\max} = 2$, $r_{\min} = 0.2$, 将尽可能地减少丢弃的步长情形的发生. 如果条件(15) 不满足, 则该步的计算结果丢弃, 重新选用比较小的步长从 t_n 到 t_{n+1} 尝试着计算.

3 数值实验

3.1 非线性动力系统

问题 1 考虑 Duffing 方程

$$\begin{cases} y'' + (\omega^2 + k^2)y = 2k^2y^3, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = \omega, \end{cases} \quad (17)$$

其中, $\omega > 0$, $0 \leq k < \omega$. 该初值问题的解析解为

$$y(t) = \text{sn}(\omega t; k/\omega), \quad (18)$$

其中, 使用 Jacobi 椭圆函数 $\text{sn}(\cdot)$ 来表示其周期运动. 本文选择的参数为 $\omega = 20$, $k = 0.03$, $t_{\text{end}} = 100$, 步长固定为 $h = 0.15$. 数值实验结果如图 1, 其中, 从上而下, Exact 表示由解析解(18) 得到的精确解; RK4 表示经典的四阶 Runge-Kutta 方法的数值解; EM4 表示四阶显式 Magnus 方法的数值解; GLEEM4 表示四阶显式 Magnus 方法在整个计算区域上的全局误差. 从图中, 可以看到, 在逼近阶是四阶情形下, 显式 Magnus 方法的数值结果明显地优于经典的 Runge-Kutta 方法.

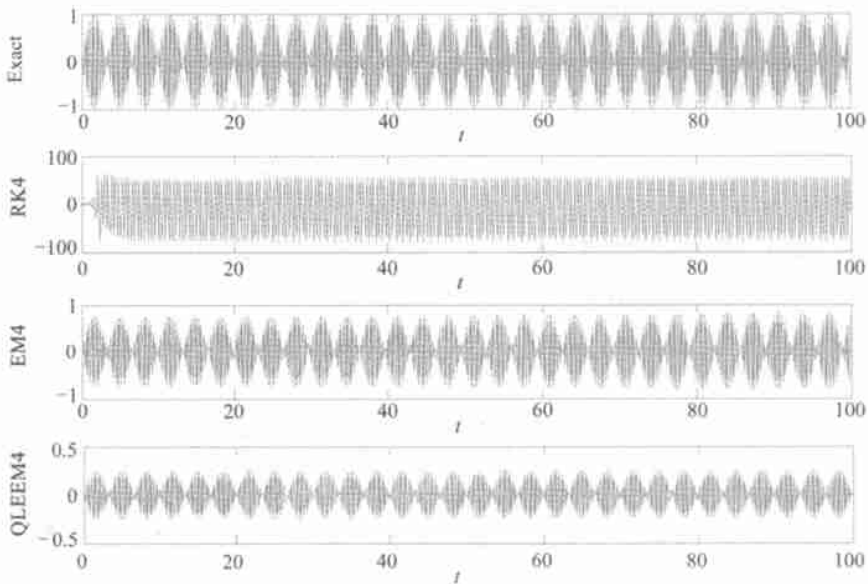


图 1 Duffing 方程的精确解与数值解的误差比较(固定步长 $h = 0.15$)

问题 2 考虑典型的刚性问题 van der Pol 方程, 其描述的是弛豫状态下的振子, 其解从慢

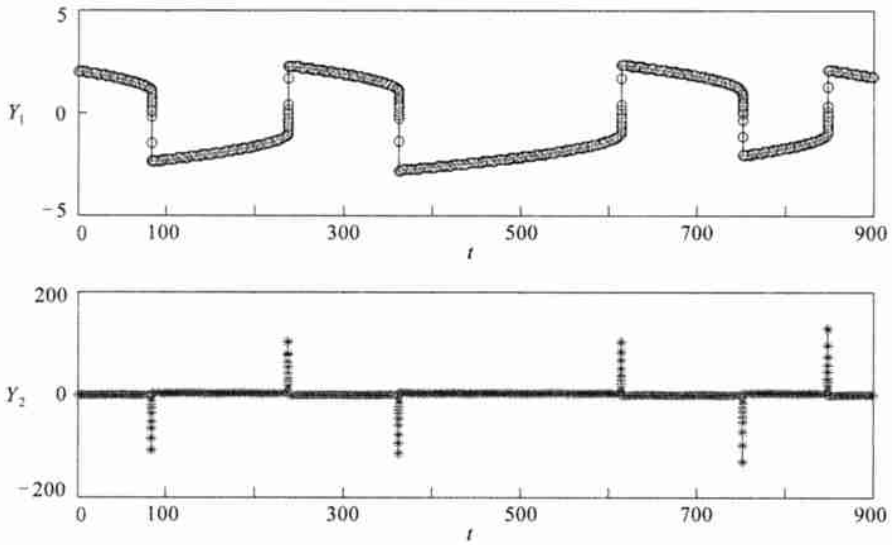


图2 Van der Pol 方程在参数 $v = 100$ 时自适应四阶显式 Magnus 的数值解

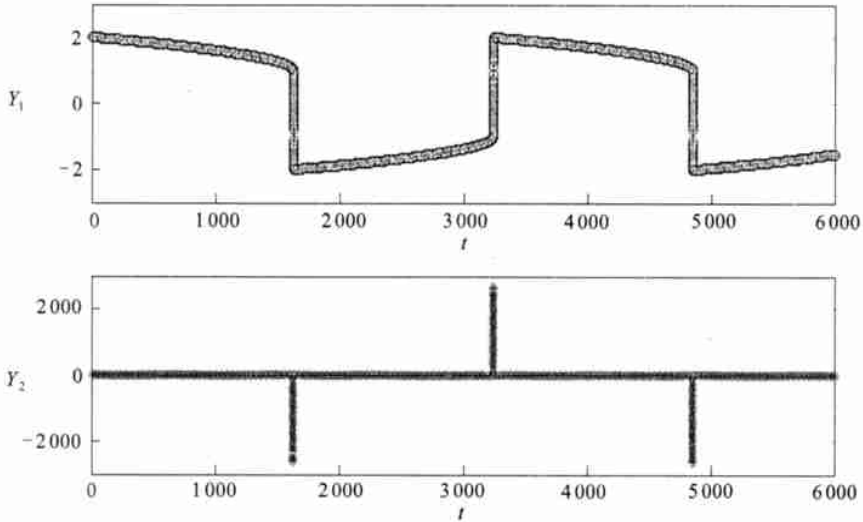


图3 Van der Pol 方程在参数 $v = 2000$ 时自适应四阶显式 Magnus 的数值解

变状态到快变状态, 从强刚性情形到非刚性情形, 交替呈现.

$$\begin{cases} y'' - v \cdot (1 - y^2) y' + y = 0, \\ y(0) = 2, y'(0) = 0. \end{cases} \quad (19)$$

这里, 参数分别取 $v = 100$ 和 $v = 2000$, 后者是非常强的刚性问题. 图2和图3分别是两个参数情形下, $y(t)$ (Y_1) 和 $y'(t)$ (Y_2) 由自适应步长控制的四阶显式 Magnus 方法的数值实验结果, 其中绝对误差限 A_T 为 $1E-2$, 相对误差限 R_T 为 $1E-4$, 积分的时间区域分别为 $[0, 900]$ 和 $[0, 6000]$. 当采用固定步长 $h = 0.2$ 时, RK4 和 EM4 都发生“blows up”现象, 无法计算下去.

3.2 非线性 Hamilton 系统

问题3 考虑非线性的 Hamilton 函数

$$H(p, q) = \frac{1}{2}p^2 + q^2(1 - \cos(q)), \quad (20)$$

并表示成 Hamilton 方程

$$\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}' = A(p, q) \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}, \quad (21)$$

其中

$$A(p, q) = \begin{bmatrix} 0 & -2(1 - \cos(q) - q\sin(q)) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \text{Sp}(2, R), \quad p, q \in R. \quad (22)$$

如图 4 是非线性振子 (21) 的相轨迹图. 图 4(a) 是四阶显式 Magnus 方法 (EM4) 的数值解, 而图 4(b) 是经典的四阶 Runge-Kutta 方法 (RK4) 的数值解. 两种方法都采用固定步长 $h = 0.1$, 计算时间区域 $[0, 5000]$. 但是对于图 4(b) 只给出了 $[0, 300]$ 的计算结果, 再往下计算, 数值结果就已经产生“blows up”现象.

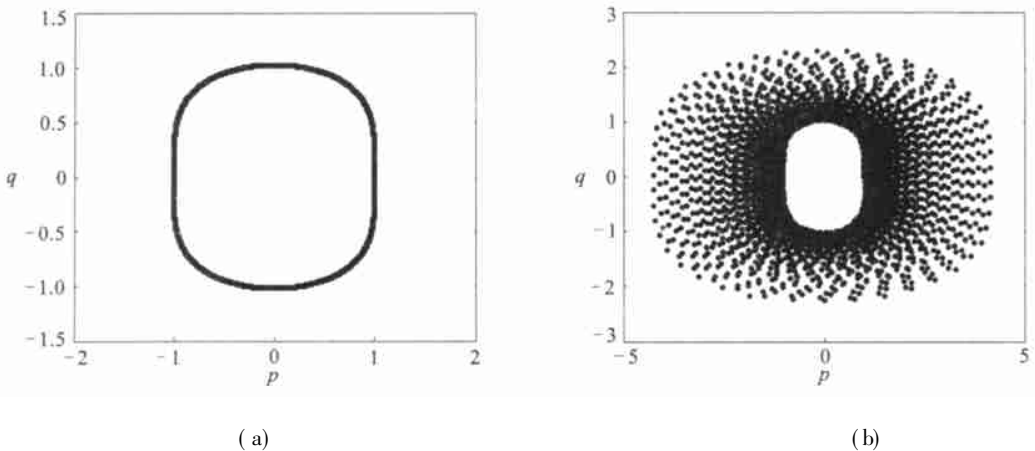


图 4 非线性振子的相轨迹 ((a) 是数值解 EM4, (b) 是 RK4 的计算结果)

4 结 论

本文基于显式 Magnus 展式, 给出了非线性动力系统和非线性 Hamilton 系统的有效数值算法, 并且通过非线性动力系统典型问题 Duffing 方程, 强刚性的 Van der Pol 方程以及非线性振子的 Hamilton 方程的数值实验来说明了方法的有效性. 从数值实验可以看到, 该算法显然优于标准的同阶常微分方程的数值解法, 特别是在长时间计算中更能体现其优势, 此外在自适应控制步长策略下、在刚性问题的处理上, 也初步显示出其较稳定的优点. 在后续的研究中, 将进一步考虑非齐次的非线性系统和高振荡系统.

致谢 作者感谢西北工业大学基础研究基金、西北工业大学青年教师创新基金对本文的资助.

[参 考 文 献]

- [1] Magnus W. On the exponential solution of differential equations for a linear operator[J]. Commun Pure Appl Math, 1954, 7(4): 649–673.
- [2] Iserles A, Nørsett S P. On the solution of linear differential equations in Lie groups[J]. Phil Trans Royal Society A, 1999, 357(1754): 983–1020.
- [3] Hairer E, Lubich C, Wanner G. Geometric Numerical Integration [M]. Berlin: Springer Verlag,

- 2006.
- [4] Iserles A, Munthe- Kaas H Z, Nirsset S P, et al. Lie group methods[J]. *Acta Numerica*, 2000, **9**: 215– 365.
- [5] Blanes S, Casas F, Ros J. High order optimized geometric integrators for linear differential equations[J]. *BIT Numerical Mathematics*, 2002, **42**(2): 262– 284.
- [6] Zanna A. Collocation and relaxed collocation for the Fer and the Magnus expansion[J]. *SIAM J Numer Anal*, 1999, **36**(4): 1145– 1182.
- [7] Blanes S, Moan P C. Splitting methods for non- autonomous Hamiltonian equations[J]. *J Comput Phys*, 2001, **170**(1): 205– 230.
- [8] Zhang S, Deng Z. A simple and efficient fourth- order integrator for nonlinear dynamic system[J]. *Mech Res Commun*, 2004, **31**(2): 221– 228.
- [9] Zhang S, Deng Z. Geometric integration for solving nonlinear dynamic systems based on Magnus series and Fer expansions[J]. *Progress in Natural Science*, 2005, **14**(9): 19– 30.
- [10] Casas F, Iserles A. Explicit Magnus expansions for nonlinear equations[J]. *J Phys A: Math Gen*, 2006, **39**(19): 5445– 5462.
- [11] Iserles A, Marthinsen A, Nirsset S P. On the implementation of the method of Magnus series for linear differential equations[J]. *BIT Numerical Mathematics*, 1999, **39**(2): 281– 304.

Adaptive Explicit Magnus Numerical Method for Nonlinear Dynamical Systems

LI Wen- cheng¹, DENG Zi- chen^{2,3}

(1. School of Science, Northwestern Polytechnical University,
Xi' an 710072, P. R. China;

2. Department of Engineering Mechanics, Northwestern Polytechnical University,
Xi' an 710072, P. R. China;

3. State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment,
Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning, Liaoning 116023, P. R. China)

Abstract: Based on the new explicit Magnus expansion developed for nonlinear equation defined on matrix Lie group, an efficient numerical method was suggested for nonlinear dynamical system. To improve the computational efficiency, the integration step size can be controlled self adaptively. The validity and effectiveness of the method were proved by application to several nonlinear dynamical systems, including Duffing system, Van der Pol system with strong stiffness, and nonlinear Hamiltonian pendulum system

Key words: nonlinear dynamical system; Hamiltonian system; numerical integrator; step size control