

化学反应对竖直平板边界磁流体动力学 微极流体滑流的影响*

R·C·乔德哈瑞, A·K·吉哈

(拉贾斯坦大学 数学系, 斋浦尔 302004, 印度)

(周哲玮推荐)

摘要: 对半无限竖直平板为边界的多孔介质, 研究了传热、传质对微极流体不稳定滑流的影响, 其化学反应是一级均匀的. 均匀磁场垂直作用于可以吸收微极流体的多孔表面, 吸引速度随着时间而变化. 自由流动的速度随着微小扰动而呈指数增大或减小. 采用近似方法获得了微极流体的速度、微转动、温度、浓度的表达式, 还得到了在不同流体特征和流动条件下, 壁面的摩擦系数、耦合应力系数、传热率和传质率.

关键词: 微极流体; 微转动; 化学反应; 滑移流动; 磁流体动力学; 传热和传质

中图分类号: O361.3 文献标识码: A

符号说明

B_0	磁通量密度	C_f	表面摩擦因数
C	浓度	C_m	耦合应力系数
g	重力加速度	C_p	定压比热容
h	折射参数	D	化学分子扩散系数
Gr	Grashof 数	Gr_c	修正的 Grashof 数
k	导热系数	j	单位质量的微极惯性
M	磁场参数	K	多孔介质的渗透系数
L	平均自由程	K_c	化学反应参数
N	模型参数	m_1	Maxwell 反射系数
Nu	Nusselt 数	n	与微转动矢量和剪应力相关的参数
p	压力	u, v	沿着平板和垂直平板方向的速度分量
Pr	Prandtl 数	x, y	分别表示沿着平板和垂直平板方向的距离
Sc	Schmidt 数	U_0	自由流动速度大小
Sh	Sherwood 数	V_0	吸收速度的大小
t	时间	β	涡粘度和动力粘度的比
T	温度	β_c	有浓度流体的体积膨胀系数

* 收稿日期: 2007-03-12; 修订日期: 2008-06-29

基金项目: 新德里 U. G. C. 高级研究基金资助项目

作者简介: R. C. Chaudhary, 印度人(E-mail: rchaudhary@rediffmail.com).

本文原文为英文, 黄锋译, 张禄坤校.

δ	标量常数	β_f	工作流体的体积膨胀系数
α	流体热扩散	γ	自旋梯度粘度
ε	($\ll 1$) 的标量常数	Λ	涡流(微转动)粘性系数
ω	角速度矢量	ν_f	流体旋转运动粘度
θ	无量纲温度	ν	流体运动粘度
ρ	流体密度	μ	流体动力粘度
σ	导电率		

上角标

下角标

()

对 y 的导数

w

壁面条件

*

有量纲量

 ∞

自由流动条件

引 言

Eringen^[1-3]提出的描述一些物理系统的微极流体理论不能满足 Navier-Stokes 方程. 在该微极流体的一般理论中, 速度表达式里添加了 2 个新变量, 从而偏离了 Newton 流体理论. 这些变量描述微极流体颗粒内部原子、分子分布的微转动, 即自旋及微惯性张量. 该理论可以用来解释胶态液体、液晶、聚合物悬浮液、动物血液等流动现象. Ariman 等人^[4]给出了关于微极流体及其应用的卓越综述. Gorla^[5]基于相似变量分析, 讨论了在半无限平板上微极流体流动的稳态传热问题. Rees 和 Pop^[6]研究了微极流体流过竖直光滑平板的自由对流边界层的问题. Singh^[7]运用有限差分法, 研究了无限竖直平板上微极流体的自由对流问题.

在磁场作用下, 导电微极流体通过多孔平板时的流动和传热研究, 在很多工程问题中应用广泛, 引起了许多研究者的兴趣, 它可以应用于磁流体动力学(MHD) 发电机、等离子体研究、核反应堆、石油开采、地热能提取, 以及空气动力学领域中的边界层控制. 此外, 多孔介质的传热问题已经有了数例工程的实际应用, 如原油开采、治理地下水污染及许多其他方面的实际应用, 如生物力学中血液在肺泡壁中的流动, 以及过滤、蒸腾、制冷的问题. Hiremath 和 Pati^[8]研究了, 极性流体通过以恒温竖直平板为边界的多孔介质时, 对自由对流震荡的影响. Helmy^[9]研究了 Newton 流体和极性流体的, 非稳定磁流体动力学的自由对流问题. El-Hakien 等人^[10]研究了在不同的平板温度下, 粘性和 Joule 加热对微极流体磁流体动力学自由对流的影响. El-Amin^[11]研究了具有常吸引力的固定竖直平板上, 微极流体磁流体动力学自由对流和传质流动问题. Kim^[12]研究了以竖直平板为边界的多孔介质中, 微极流体不稳定对流问题, 并在文献 [13] 中将它拓展到具有移动竖直平板边界的磁流体动力学, 传热和传质对微极流体流动的影响.

宏观上, 粘性流体在固体壁面上的边界条件是一个无滑移条件, 也就是说, 流体的速度与固体边界的速度是匹配的, 该结论已经被广泛接受, 然而无滑移条件的宏观流动实验数据仍然有待精确确定, 因为它是建立在没有物理依据的假设上的. 在许多实际应用中, 与固体壁面相邻的颗粒并不常常保持壁面速度, 在壁面上产生一个有限小的切向速度, 造成沿壁面的滑移, 这种流动称为滑移流动, 并且这种影响是不能忽略的. 微极磁流体滑移流动及其传热研究已经有了重要的工程应用, 例如, 发电机、制冷线圈、输电线路、电力变压器、发热元件等. Khandelwal 等人^[14]研究了极性流体通过无限大的多孔光滑平板上的多孔介质时, 渗透率变化对磁流体动力学不稳定滑移流动的影响. Sharma 和 Chaudhary^[15]研究了竖直平板上, 吸引力的变化对不可压缩粘性流体瞬态自由对流滑移流动的影响. Recently Sharma^[16]研究了竖直平板上,

周期性变化的温度及浓度对不稳定自由对流滑移流动的影响.

许多过程中,把传热、传质问题和化学反应结合起来研究,并有着重要意义,因而近年来得到许多特别的关注.在诸如干燥、水体表面蒸发、湿式冷却塔的能量转移和沙漠制冷器中的流体流动问题中,传热和传质过程同时发生.化学反应被认为不是均匀过程,就是非均匀过程.一个均匀的化学反应是按一个给定的相而发生的反应.相反地,一个非均匀的化学反应只是在一个限定的区域或相边界内发生的反应.化学反应中,如果反应的速率与其浓度成正比,则称为一级反应.在许多化学工程中,都是在外加质量与流体之间发生了化学反应,这样的过程在许多工业应用中发生,例如聚合物的生产、陶瓷或玻璃制品的制造以及在食品加工中都会发生^[17]. Das 等人^[18]研究了在恒定热流量和传质量条件下,无限大竖直平板上一级化学反应对突然启动流动的影响. Muthucumarswamy 和 Ganesan^[19]、Muthucumarswamy^[20]研究了一级均匀化学反应对无限大竖直平板上流动的影响.最近 Kandasamy 等人^[21]讨论了考虑一级化学反应,沿着有吸收/喷射作用的热源或浓度的楔形范围内的传热和传质的影响.本文研究一级均匀化学反应对竖直平板上微极磁流体滑移流动的影响.我们还考虑了以平均速度流动的自由流体,因叠加作用而随时间呈指数变化.

1 数学描述

本文考虑一个以半无限竖直平板为边界的多孔介质中,微极流体的二维滑流问题. x 轴沿多孔平板,向上为正, y 轴正交于 x 轴.基于半无限平面假设,流动变量仅是 t 和 y 的函数.为了推导此条件下该问题的基本方程,作如下假设:

- 1) 流动是不稳定层流,且磁场垂直于平板;
- 2) 流体是粘性不可压缩并具有恒定物理特性的导电流体;
- 3) 假设磁 Reynolds 数足够小,以至其诱导的磁场可以忽略;
- 4) 能量方程中的粘性耗散影响不计;
- 5) 扩散物质和流体之间存在一级化学反应;
- 6) 同时假设在没有电压存在的没有电场存在.

在上述假设基础上引入无量纲量,流动的控制方程如下(方程的推导过程详见附录 A):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (1 + \epsilon e^{\alpha y}) \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{dU_{\infty}}{dt} + (1 + \beta) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + Gr \theta + Gr_c C + N(U_{\infty} - u) + 2\beta \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - (1 + \epsilon e^{\alpha y}) \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - (1 + \epsilon e^{\alpha y}) \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} - (1 + \epsilon e^{\alpha y}) \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{1}{Sc} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - K_c C, \quad (4)$$

其中 $N = \left[M + \frac{1}{K} \right]$, $\eta = \frac{\mu J^*}{\gamma} = \frac{2}{2 + \beta}$.

相应的边界条件为

$$y = 0 \text{ 时, } u = 1 + h \frac{\partial u}{\partial y}, \theta = 1, \omega = -n \frac{\partial \omega}{\partial y}, C = 1. \quad (5)$$

$$y \rightarrow \infty \text{ 时, } u \rightarrow U_{\infty}, \theta \rightarrow 0, \omega \rightarrow 0, C \rightarrow 0. \quad (6)$$

其中, u 是 x 方向的速度, Gr 是 Grashoff 数, Gr_c 是修正的 Grashoff 数, K 是多孔介质的渗透率, B_0 磁通量密度, J^* 是微极惯性密度, ω 是角速度矢量在 $x-y$ 平面法向的分量, γ 是自旋梯度粘度, K_c 是化学反应参数.

2 问题的解

为了降低上述偏微分方程组转变为无量纲常微分方程组的阶次, 现将平移速度、微转动、温度和浓度作如下替换:

$$u = u_0(y) + \varepsilon e^{\delta y} u_1(y) + O(\varepsilon^2), \quad (7)$$

$$\omega = \omega_0(y) + \varepsilon e^{\delta y} \omega_1(y) + O(\varepsilon^2), \quad (8)$$

$$\theta = \theta_0(y) + \varepsilon e^{\delta y} \theta_1(y) + O(\varepsilon^2), \quad (9)$$

$$C = C_0(y) + \varepsilon e^{\delta y} C_1(y) + O(\varepsilon^2), \quad (10)$$

将方程(7)~(10)代入方程(1)~(4), 忽略高阶项 $O(\varepsilon^2)$, 得到方程对 $(u_0, \omega_0, \theta_0, C_0)$ 和 $(u_1, \omega_1, \theta_1, C_1)$ 如下:

$$(1 + \beta) u_0'' + u_0' - Nu_0 = -N - Gr\theta_0 - Gr_c C_0 - 2\beta \omega_0', \quad (11)$$

$$(1 + \beta) u_1'' + u_1' - (N + \delta) u_1 = - (N + \delta) - Gr\theta_1 - Gr_c C_1 - 2\beta \omega_1' - A u_0', \quad (12)$$

$$\omega_0'' + \eta \omega_0' = 0, \quad (13)$$

$$\omega_1'' + \eta \omega_1' - \delta \eta \omega_1 = -A \eta \omega_0', \quad (14)$$

$$\theta_0'' + Pr \theta_0' = 0, \quad (15)$$

$$\theta_1'' + Pr \theta_1' - Pr \delta \theta_1 = -A \eta \theta_0', \quad (16)$$

$$C_0'' + Sc C_0' - K_c Sc C_0 = 0, \quad (17)$$

$$C_1'' + Sc C_1' - (\delta + K_c) Sc C_1 = -A Sc C_0', \quad (18)$$

其中, 上标“'”表示对 y 求导数.

相应的边界条件可以写成

$$\begin{cases} y = 0 \text{ 时} \\ u_0 = 1 + h \frac{\partial u_0}{\partial y}, \quad u_1 = h \frac{\partial u_1}{\partial y}, \quad \omega_0 = -n u_0', \\ \omega_1 = -n u_1', \quad \theta_0 = 1, \quad \theta_1 = 0, \quad C_0 = 1, \quad C_1 = 0. \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} y \rightarrow \infty \text{ 时} \\ u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad \omega_0 = 0, \quad \omega_1 = 0, \\ \theta_0 = 0, \quad \theta_1 = 0, \quad C_0 = 0, \quad C_1 = 0. \end{cases} \quad (20)$$

方程(12)~(18)满足边界条件(19)和(20)的解为

$$u_0(y) = 1 + B_6 e^{-h_1 y} - a_2 e^{-Pr y} - a_3 e^{-h_6 y} + a_4 e^{-\eta y}, \quad (21)$$

$$u_1(y) = 1 + d_{14} e^{-h_2 y} - d_{11} e^{-h_3 y} + d_{11} e^{-Pr y} - d_{12} e^{-h_6 y} + d_{4e} e^{-h_4 y} + d_{5e} e^{-h_5 y} - d_{13} e^{-\eta y} + d_{7e} e^{-h_1 y}, \quad (22)$$

$$\omega_0(y) = B_1 e^{-\eta y}, \quad (23)$$

$$\omega_1(y) = B_2 e^{-h_3 y} - (A \eta / \delta) e^{-\eta y}, \quad (24)$$

$$\theta_0(y) = e^{-Pr y}, \quad (25)$$

$$\theta_1(y) = (APr / \delta) (e^{-h_3 y} - e^{-Pr y}), \quad (26)$$

$$C_0(y) = e^{-h_6 y}, \quad (27)$$

$$C_1(y) = B_4(e^{-h_6 y} - e^{-h_4 y}), \tag{28}$$

以上常数在附录 B 中给出.

3 结果与讨论

不可压缩的微极流体, 通过多孔介质中半无限大竖直平板时, 其磁流体动力学对流及传质问题的公式已经在前节得到, 在不同参数值下, 数值地计算微极流体的平移速度、微转动、温度、浓度经过边界层后的分布. 当前研究中, 选择了 $t = 1, \delta = 0.01, \varepsilon = 0.01$ 和 $A = 0.5$ 时, $n, \beta, Sc, M, Gr, Gr_c, K, K_c, Pr$ 和 h 在图示的范围内变化.

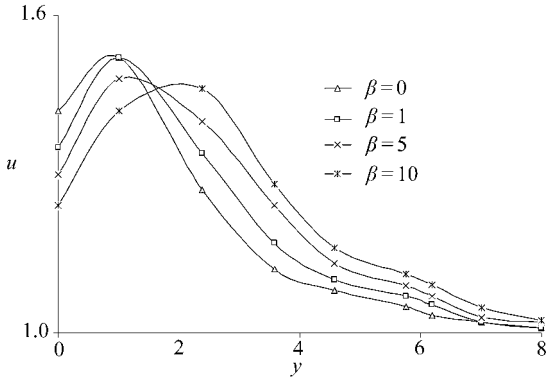


图 1(a) 当 $n = 0.5, Sc = 1, M = 2, K = 2, K_c = 2, Gr = 2, Gr_c = 2, Pr = 1, h = 0.4, A = 0.5, t = 1$ 时, 速度 u 随 β 的变化

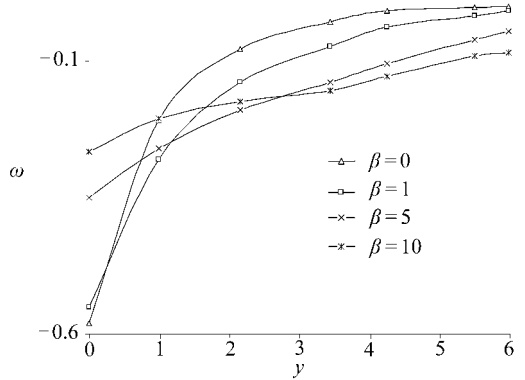


图 1(b) 当 $M = 2, K = 2, K_c = 2, Gr = 2, Gr_c = 2, Pr = 1, h = 0.4, A = 0.5, t = 1, n = 0.5, Sc = 1$ 时, 微转动 ω 随 β 的变化

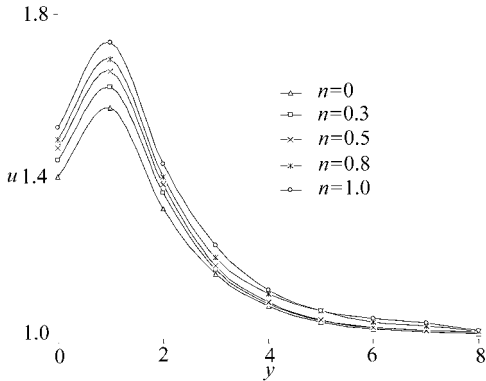


图 2(a) 当 $\beta = 0.5, Sc = 1, M = 2, K = 2, K_c = 2, Gr = 2, Gr_c = 2, Pr = 1, h = 0.4, A = 0.5, t = 1$ 时, 速度 u 随 n 的变化

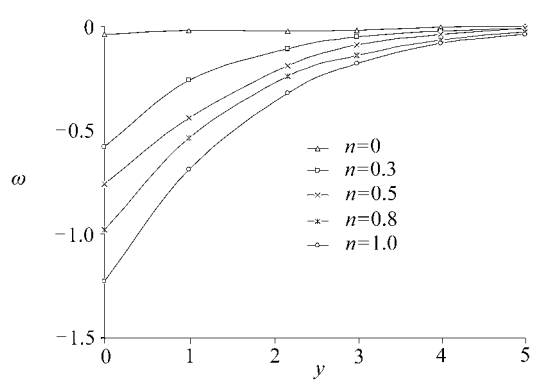


图 2(b) 当 $\beta = 0.05, Sc = 1, M = 2, K = 2, K_c = 2, Gr = 2, Gr_c = 2, Pr = 1, h = 0.4, A = 0.5, t = 1$ 时, 微转动 ω 随 n 的变化

越过边界层, 粘度比 (β) 对平移速度、微转动分布的影响如图 1(a)、图 1(b) 所示. 注意到, 在靠近平板区域, 平移速度分布随 β 增大而减速, 然后回归到对应的自由流动的速度. 同时, 当参数 β 增大时, 微转动幅度在平板上增大, 然后在远离平板的区域减小. 图 2(a)、图 2(b) 表明, 参数 n 对平移速度和微转动分布的影响涉及到微转动矢量和剪应力, 可以发现平移速度随着参数 n 值的增大而增大, 而微转动幅度则随着 n 值的增大而减小.

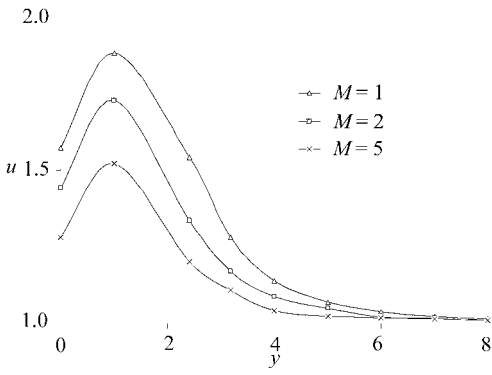


图 3(a) 当 $\beta = 0.5, n = 0.5, Sc = 1, M = 2, K = 2, K_c = 2, Gr = 2, Gr_c = 2, Pr = 1, h = 0.4, A = 0.5, t = 1$ 时, 速度 u 随 M 的变化

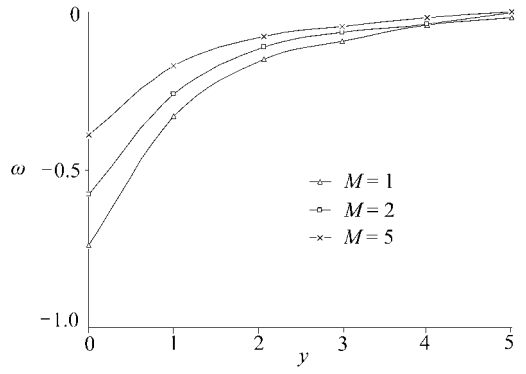


图 3(b) 当 $\beta = 0.5, n = 0.05, Sc = 1, K = 2, K_c = 2, Gr = 2, Gr_c = 2, Pr = 1, h = 0.4, A = 0.5, t = 1$ 时, 微转动 ω 随 M 的变化

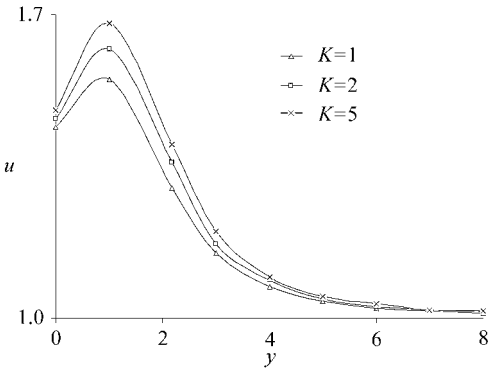


图 4(a) 当 $\beta = 0.5, n = 0.5, Sc = 1, M = 2, K_c = 2, Gr = 2, Gr_c = 2, Pr = 1, h = 0.4, A = 0.5, t = 1$ 时, 速度 u 随 K 的变化

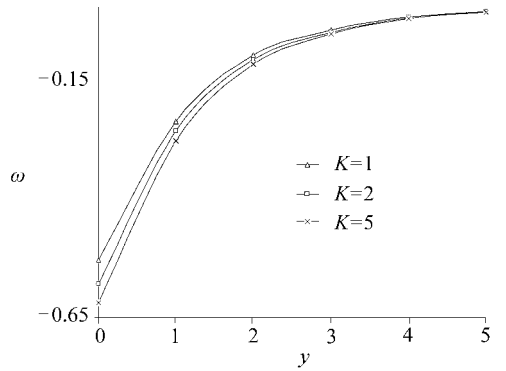


图 4(b) 当 $\beta = 0.05, n = 0.05, Sc = 1, M = 2, K_c = 2, Gr = 2, Gr_c = 2, Pr = 1, h = 0.4, A = 0.5, t = 1$ 时, 微转动 ω 随 K 的变化

对不同数值的磁场参数 M , 平移速度和微转动分布曲线绘制在图 3(a)、图 3(b) 上. 图中可以发现, 参数 M 增大时, 越过边界层的速度分布减小; 而参数 M 减小时, 多孔平板上的微转动幅度减小. 渗透系数 K 变化时, 越过边界层的平移速度和微转动分布如图 4(a)、图 4(b) 所示. 平移速度随着渗透系数 K 的增大而增大, 微转动幅度随着 K 的增大而减小. 图 5(a)、图 5(b) 描述了折射参数 h 变化时平移速度和微转动的变化情况. 可以发现, 平板附近的平移速度随着 h 的增大而增大, 远离平板后便开始减小; 结果还显示, 微转动幅度也是随着参数 h 值的增大而增大. 当 $K_c = 0, h = 0$ 时, 本文得到的平移速度和微转动分布与 Kim^[13] 得到的结果相比较, 吻合程度较 Kim^[13] 的结果更优.

图 6(a)、图 6(b) 给出了平移速度和微转动随 Prandtl 数 (Pr) 的变化情况. 结果显示, Pr 值增大时平移速度减小, 而微转动幅度增大. 图 7(a)、图 7(b) 阐述了化学反应参数 (K_c) 变化时越过边界层的平移速度及微转动分布的变化情况. 可以看出, 平移速度在生成反应中 ($K_c < 0$) 增大, 在破坏反应中 ($K_c > 0$) 减小, 而微转动分布的情况与平移速度的相反. Grashof 数 (Gr) 及修正的 Grashof 数 (Gr_c) 变化时对平移速度和微转动分布的影响分别在图 8(a)、图 8

(b)及图 9(a)、图 9(b)中给出. 可以发现, Gr 或 Gr_c 增大时, 平移速度增大, 而微转动幅度减小. 在这里, Gr 的正值对应于自然对流表面的冷却. 另外, 曲线还显示速度峰值在靠近多孔平板壁面, 随着 Gr 或 Gr_c 增大而迅速增大, 然后趋于自由流动的速度. 对于不同的 Schmidt 数 Sc , 平移速度和微转动分布的变化曲线绘制在图 10(a)、图 10(b)上. 明显发现, Sc 值增大时平移速度减小, 而且在多孔平板上的微转动幅度是随着 Sc 值的增大而增大.

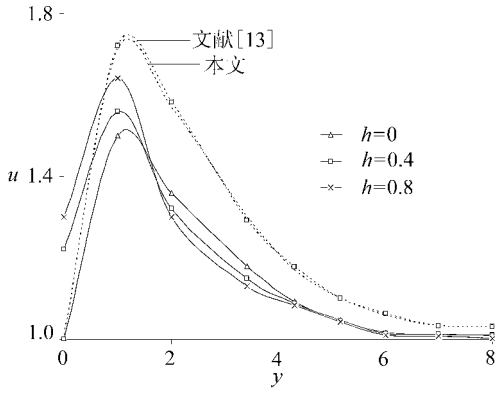


图 5(a) 当 $\beta = 0.5, n = 0.5, Sc = 1, M = 2, K_c = 2, Gr = 2, Gr_c = 2, Pr = 1, K = 2, A = 0.5, t = 1$ 时, 速度 u 随 h 的变化

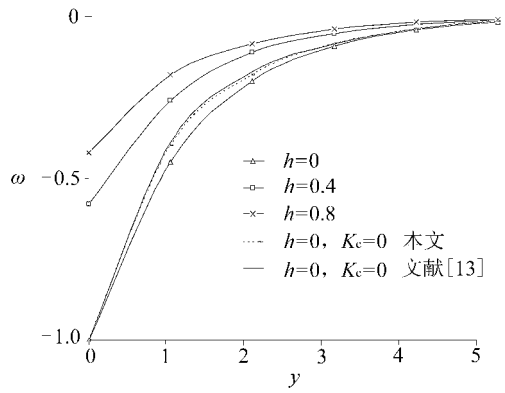


图 5(b) 当 $\beta = 0.05, n = 0.05, Sc = 1, M = 2, K_c = 2, Gr = 2, Gr_c = 2, Pr = 1, K = 2, A = 0.5, t = 1$ 时, 微转动 ω 随 h 的变化

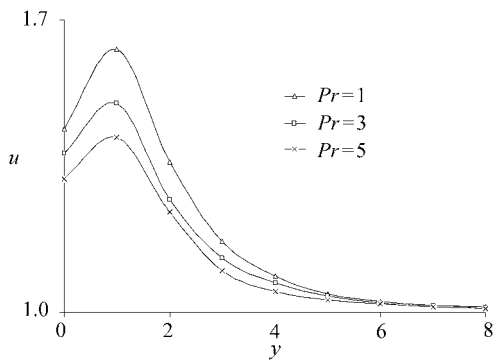


图 6(a) 当 $\beta = 0.5, n = 0.5, Sc = 1, M = 2, K_c = 2, Gr = 2, Gr_c = 2, h = 0.4, K = 2, A = 0.5, t = 1$ 时, 速度 u 随 Pr 的变化

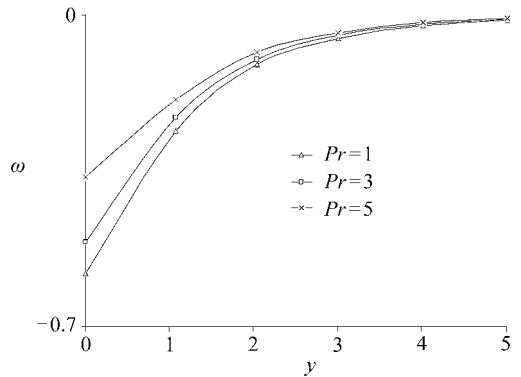


图 6(b) 当 $\beta = 0.05, n = 0.05, Sc = 1, M = 2, K_c = 2, Gr = 2, Gr_c = 2, h = 0.4, K = 2, A = 0.5, t = 1$ 时, 微转动 ω 随 Pr 的变化

温度分布随 Prandtl 数 Pr 变化而变化的曲线示于图 11(a)上. 结果表明, Pr 值增大时, 热边界层的厚度减小, 并且热边界层温度分布更均匀. 原因是, 较小的 Pr 值等效于较大的热传导率, 因此热量从热的表面上扩散的速度, 比较大 Pr 值时的速度快, 所以边界层越厚, 热传导率越小. 当 $Pr = 1$ 时, 数值计算结果与 Kim^[13] 相一致. 图 11(b) 显示, 浓度分布随 Schmidt 数 Sc 的变化情况. 图中揭示 Sc 值的增大导致了浓度的减小, 这是因为较小的 Sc 值等效于化学分子扩散速度的增大. 当 $Sc = 0.7, K_c = 0$ 时, 浓度分布与 Kim^[13] 得到的结果相一致. 浓度分布随化学反应参数变化的情况在图 12(a) 中给出, 图中浓度的下降是因为化学反应参数值的增大, 表明化学反应极大地改变了扩散速率.

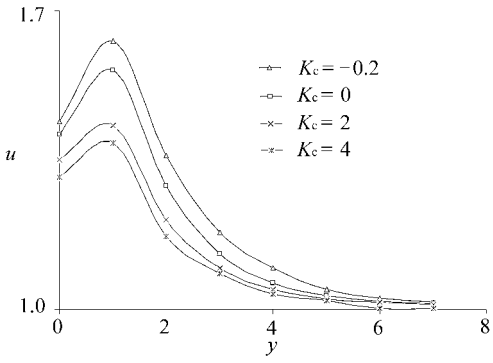


图 7(a) 当 $\beta = 0.5, n = 0.5, Sc = 1, M = 2, Pr = 1, Gr = 2, Gr_c = 2, h = 0.4, K = 2, A = 0.5, t = 1$ 时, 速度 u 随 K_c 的变化

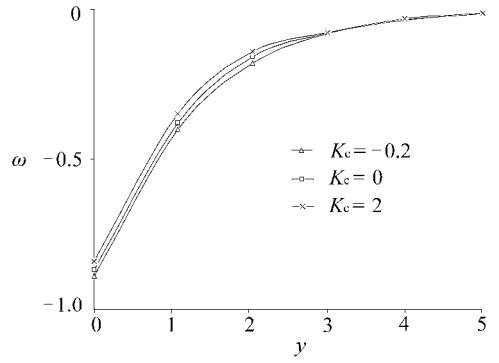


图 7(b) 当 $\beta = 0.05, n = 0.05, Sc = 1, M = 2, Pr = 1, Gr = 2, Gr_c = 2, h = 0.4, K = 2, A = 0.5, t = 1$ 时, 微转动 ω 随 K_c 的变化

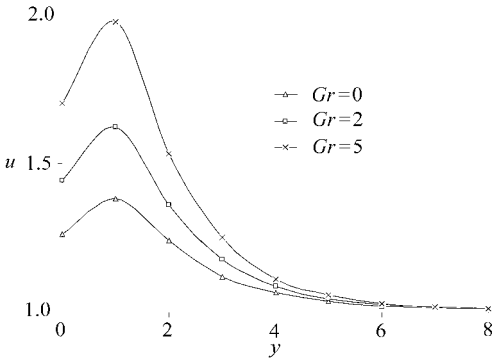


图 8(a) 当 $\beta = 0.5, n = 0.5, Sc = 1, M = 2, Pr = 1, K_c = 2, Gr_c = 2, h = 0.4, K = 2, A = 0.5, t = 1$ 时, 速度 u 随 Gr 的变化

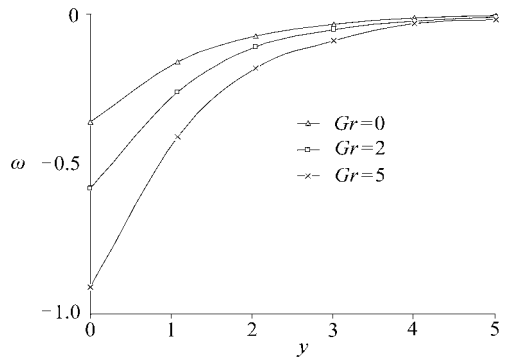


图 8(b) 当 $\beta = 0.05, n = 0.05, Sc = 1, M = 2, Pr = 1, K_c = 2, Gr_c = 2, h = 0.4, K = 2, A = 0.5, t = 1$ 时, 微转动 ω 随 Gr 的变化

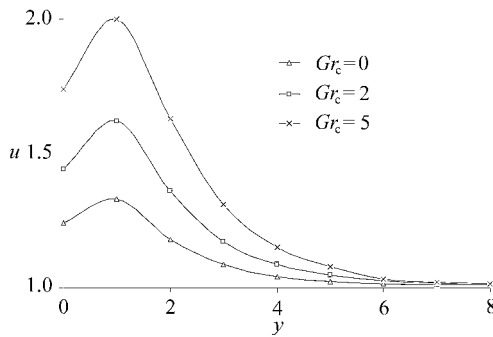


图 9(a) 当 $\beta = 0.5, n = 0.5, Sc = 1, M = 2, Pr = 1, K_c = 2, Gr = 2, h = 0.4, K = 2, A = 0.5, t = 1$ 时, 速度 u 随 Gr_c 的变化

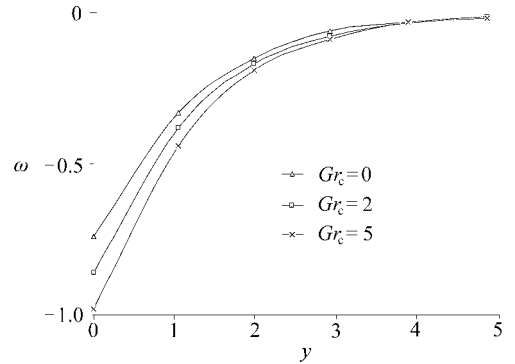


图 9(b) 当 $\beta = 0.05, n = 0.05, Sc = 1, M = 2, Pr = 1, K_c = 2, Gr = 2, h = 0.4, K = 2, A = 0.5, t = 1$ 时, 微转动 ω 随 Gr_c 的变化

若给定边界层的速度场, 则可以计算壁面上的摩擦系数 (C_f):

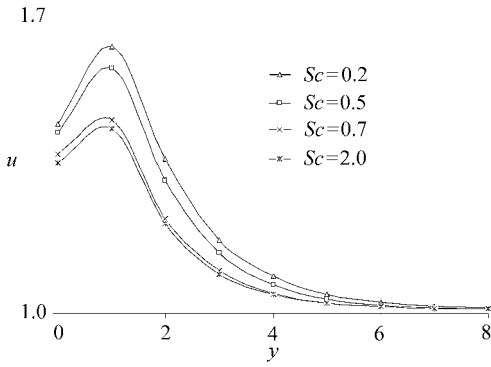


图 10(a) 当 $\beta = 0.5, n = 0.5, Gr_c = 2, M = 2, Pr = 1, K_c = 2, Gr = 2, h = 0.4, K = 2, A = 0.5, t = 1$ 时, 速度 u 随 Sc 的变化

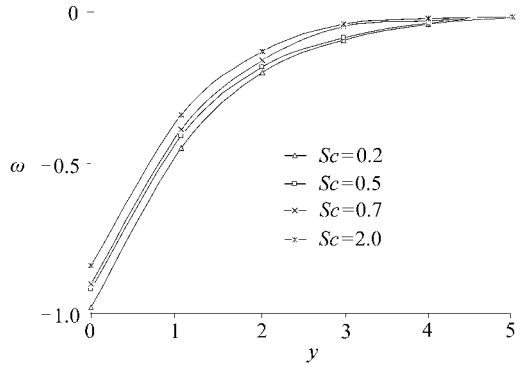


图 10(b) 当 $\beta = 0.05, n = 0.05, Gr_c = 2, M = 2, Pr = 1, K_c = 2, Gr = 2, h = 0.4, K = 2, A = 0.5, t = 1$ 时, 微转动 ω 随 Sc 的变化

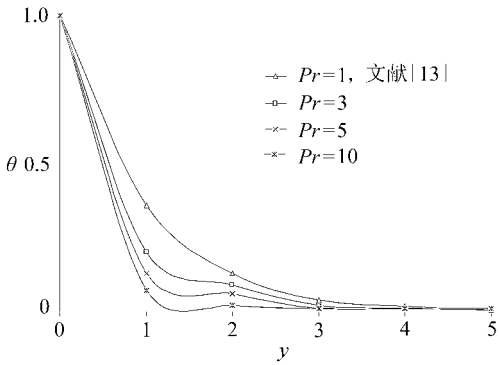


图 11(a) 当 $\beta = 0.5, n = 0.5, Gr_c = 2, M = 2, Sc = 1, K_c = 2, Gr = 2, h = 0.4, K = 2, A = 0.5, t = 1$ 时, 温度 θ 随 Pr 的变化

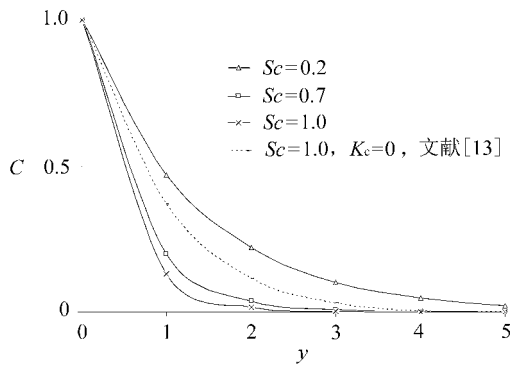


图 11(b) 当 $\beta = 0.5, n = 0.5, Gr_c = 2, M = 2, Pr = 1, K_c = 2, Gr = 2, h = 0.4, K = 2, A = 0.5, t = 1$ 时, 浓度 C 随 Sc 的变化

$$\tau_\omega = (\mu + \Lambda) \left. \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} + \Lambda \omega^* \Big|_{y^*=0} \quad (29)$$

$$C_f = \frac{2T_w^*}{\rho U_0 V_0} = 2 \left[1 + (1 - n) \beta \right] u'(0), \quad (30)$$

平板上耦合应力系数 (C_m) 为

$$C_\omega = \gamma \left. \frac{\partial \omega^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0}, \quad (31)$$

$$C_m = \frac{M_w}{\mu U_0} = \left[1 + \frac{\beta}{2} \right] w'(0). \quad (32)$$

在粘性流体动力学中,并不十分在意速度与温度场,但对物体与流体之间的热量交换却需特别关注.

用 Nusselt 数给出的传热率如下:

$$Nu = \frac{q_w^* \nu}{K U_0^* (T_w^* - T_\infty^*)},$$

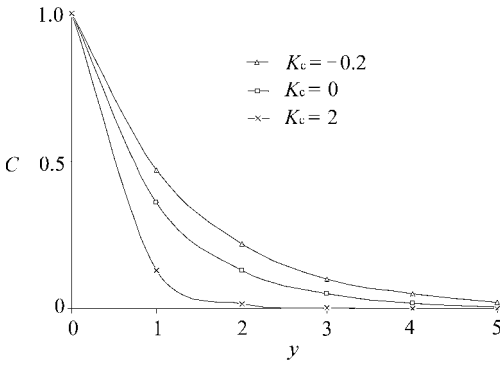


图 12(a) 当 $\beta = 0.5, n = 0.5, Gr_c = 2, M = 2, Pr = 1, Sc = 1, Gr = 2, h = 0.4, K = 2, A = 0.5, t = 1$ 时, 浓度 C 随 K_c 的变化

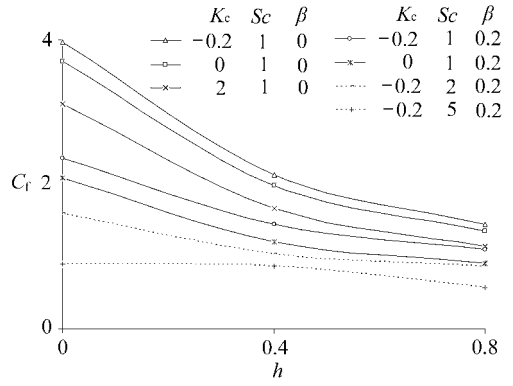


图 12(b) 当 $n = 0.5, Gr_c = 2, M = 2, Pr = 1, Gr = 2, K = 2, A = 0.5, t = 1$ 时, 表面摩擦因数 C_f 随 h 的变化

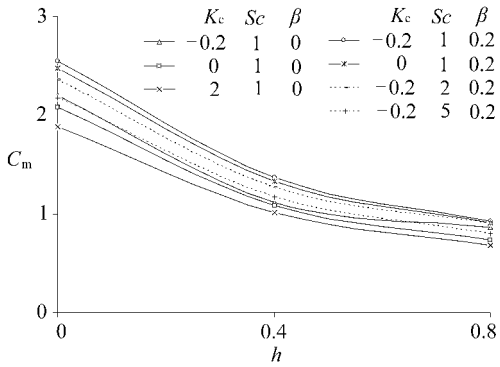


图 13(a) 当 $n = 0.5, Gr_c = 2, M = 2, Pr = 1, Gr = 2, K = 2, A = 0.5, t = 1$ 时, 耦合应力系数 C_m 随 h 的变化

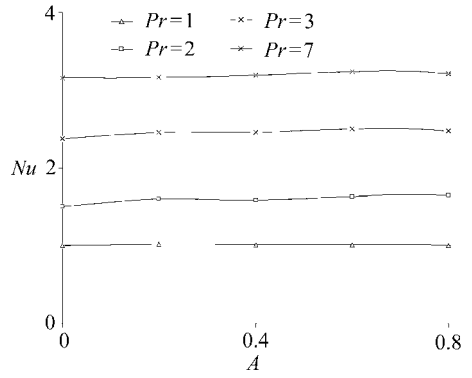


图 13(b) 当 $n = 0.5, Gr_c = 2, M = 2, Gr = 2, K = 2, h = 0.4, t = 1, Sc = 1, K_c = 2$ 时, 传热率 Nu 随 A 的变化

其中 $q_w^* = -K \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big|_{y=0}$

以无量纲形式给出的传热率如下:

$$Nu = - \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

传质率为

$$J^* (\text{扩散通量}) = - \rho D \frac{\partial C^*}{\partial y^*} \Big|_{y^*=0}$$

大家知道的传质系数 Sherwood 数 Sh 为

$$Sh = \frac{J^* v}{U_0 \rho D (C_w^* - C_\infty^*)} = - \frac{\partial C}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

图 12(b) 显示, 表面摩擦系数随折射参数 h 的变化情况, 当参数 β, Sc 或 K_c 增大时, 表面摩擦因数减小. 壁面耦合应力系数随参数 h 的变化

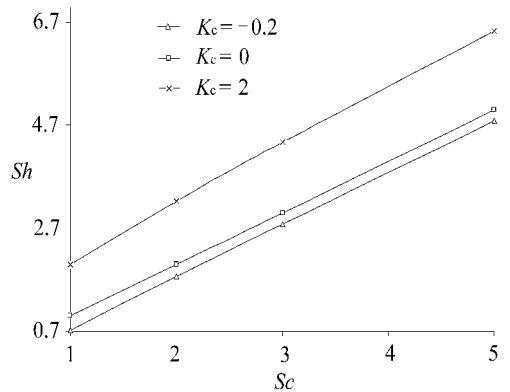


图 14 当 $n = 0.5, Gr_c = 2, M = 2, Pr = 1, Gr = 2, K = 2, A = 0.5, t = 1$ 时, 传质率 Sh 随 Sc 的变化

情况在图 13(a) 中显示, 图中表明, 当 K_c 或 Sc 增大时耦合应力系数减小, 而当 β 增大时壁面耦合应力系数增大. 图 13(b) 阐述了对不同 Prandtl 数, 表面传热系数 Nu 随吸收速度参数 A 的变化情况. 可以发现, 多孔平板的表面传热系数随着 Prandtl 数值的增大而增大. 图 14 显示了传质率随化学反应参数的变化情况, 表明传质率随着 K_c 或 Sc 的增大而增大.

致谢 衷心感谢审稿人所提供非常有价值的意见, 作者之一 Abhay Kumar Jha 十分感激新德里 U. G. C. 提供的高级研究基金资助.

附录 A

考虑一个以半无限大竖直平板为边界的多孔介质中, 在横向磁场作用下的微极流体自由对流的滑流问题. 沿着多孔平板向上方向取为 x^* 轴正向, y^* 轴与之正交. 基于半无限平面假设, 流动变量仅是 t^* 和 y^* 的函数. 在上述条件下, 直角坐标系下的控制方程如下:

连续方程

$$\frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0. \tag{A1}$$

线动量方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + (V_+ V_-) \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + g\beta_f(T^* - T_\infty^*) + g\beta_c(C^* - C_0^*) - \\ & \frac{\gamma u^*}{K^*} - \frac{\sigma}{\rho} B_0^2 u^* + 2V_r \frac{\partial \omega^*}{\partial y^*}. \end{aligned} \tag{A2}$$

角动量方程

$$\rho J^* \left(\frac{\partial \omega^*}{\partial t^*} + v^* \frac{\partial \omega^*}{\partial y^*} \right) = \gamma \frac{\partial^2 \omega^*}{\partial y^{*2}}. \tag{A3}$$

能量方程

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \alpha \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}. \tag{A4}$$

传质方程

$$\frac{\partial C^*}{\partial t^*} + v^* \frac{\partial C^*}{\partial y^*} = D^* \frac{\partial^2 C^*}{\partial y^{*2}} - K_c^* C^*. \tag{A5}$$

动量方程(A2)右边第3项表示浮力的影响, 第5项为体基线性阻力, 即 Darcy 项, 第6项是 MHD 项. Darcy 耗散项可以被忽略是因为其与粘性耗散项是属同一量级. 传质方程(A5)右边第2项表示流体与组分浓度之间均匀的一级化学反应. 假设自由流动速度 U_∞^* 遵循指数小扰动规则. 基于上述假定, 适当的边界条件为

$$y^* = 0 \text{ 时: } u^* = U_0 + L_1^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*}, T^* = T_w^*, w^* = -n \frac{\partial u^*}{\partial y^*}, C^* = C_w^*, \tag{A6}$$

$$y^* \rightarrow \infty \text{ 时: } u^* \rightarrow U_\infty^* = U_0(1 + \epsilon e^{\delta^* t^*}), T^* \rightarrow T_\infty^*, \omega^* \rightarrow 0, C^* \rightarrow C_\infty^* \tag{A7}$$

其中, $L_1^* = ((2 - m_1)/m_1)L^*$, L^* 为平均自由程, m_1 为 Maxwell 反射系数, ϵ 和 δ^* 远小于 1. 微转动变量 ω^* 的边界条件描述了它和表面应力的关系. 方程中, 参数 n 是一个 0 到 1 之间的数, 它与微转动矢量及其相关的剪应力有关. $n = 0$ 时, 对应颗粒的密度足够大, 以至于微粒单元接近壁面而无法旋转. $n = 0.5$ 表示弱浓度, $n = 1$ 表示湍流边界层流动(见文献[22]).

从连续方程(A1)中, 正交于平板的吸引可表示为

$$v^* = -V_0(1 + \epsilon A e^{\delta^* t^*}), \tag{A8}$$

其中, A 是正实常数, ϵA 远小于 1, V_0 表示吸引速度的大小, 是一个非零的正常数. 外边界层方程(A2)得到

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} = \frac{\partial U_\infty^*}{\partial t^*} + \frac{\gamma}{K^*} U_\infty^* + \frac{\sigma}{\rho} B_0^2 U_\infty^*. \tag{A9}$$

引入无量纲量如下:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 u = \frac{u^*}{U_0}, v = \frac{v^*}{V_0}; y = \frac{V_0 y^*}{\nu}, U_\infty = \frac{U_\infty^*}{U_0}, \omega = \frac{\nu}{U_0 V_0} \omega^*, t = \frac{t^* V_0^2}{\nu}, \\
 \theta = \frac{T_w^* - T_\infty^*}{T_w^* - T_\infty^*}, C = \frac{C_w^* - C_\infty^*}{C_w^* - C_\infty^*}, \delta = \frac{\delta^* \nu}{V_0^2}, K = \frac{K^* V_0^2}{\nu^2}, J = \frac{V_0^2 J^*}{\nu^2}, \\
 M = \frac{\sigma B_0^2 \nu}{\rho V_0^2} \text{ 是磁场参数,} \\
 Gr = \frac{\nu \beta_f g (T_w^* - T_\infty^*)}{U_0^2 V_0^2} \text{ 是 Grashof 数,} \\
 Gr_c = \frac{\nu \beta_c g (C_w^* - C_\infty^*)}{V_0^2 U_0} \text{ 是修正的 Grashof 数,} \\
 Pr = \frac{\nu C_p}{K} = \frac{\nu}{\alpha} \text{ 是 Prandtl 数,} \\
 Sc = \frac{\nu}{D^*} \text{ 是 Schmidt 数,} \\
 h = \frac{V_0 L^*}{\nu} \text{ 是折射参数,} \\
 K_c = \frac{K_c^* \nu}{V_0^2} \text{ 是化学反应参数.}
 \end{array} \right. \quad (A10)$$

另外, 自旋梯度粘度 γ 给出了粘性系数和微惯性间的关系, 定义为

$$\gamma = \left(\mu + \frac{1}{2} \Lambda \right) J^* = \mu J^* \left(1 + \frac{1}{2} \beta \right), \quad \beta = \frac{\Lambda}{\mu}, \quad (A11)$$

其中, β 表示有量纲粘度比, Λ 是旋转粘性系数或涡流粘性系数.

考虑到方程(A8)~(A11), 控制方程(A2)~(A5)变为下列无量纲形式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (1 + \epsilon A e^{\delta y}) \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{dU_\infty}{dt} + (1 + \beta) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + Gr \theta + Gr_c C + N(U_\infty - u) + 2\beta \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad (A12)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - (1 + \epsilon A e^{\delta y}) \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, \quad (A13)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - (1 + \epsilon A e^{\delta y}) \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}, \quad (A14)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} - (1 + \epsilon A e^{\delta y}) \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{1}{Sc} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - K_c C, \quad (A15)$$

其中 $N = \left(M + \frac{1}{K} \right)$, $\eta = \frac{\mu J^*}{\gamma} = \frac{2}{2 + \beta}$.

边界条件(A6)和(A7)以下列无量纲形式给出:

$$y = 0 \text{ 时: } u = 1 + h \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \theta = 1, \quad \omega = -n \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad C = 1, \quad (A16)$$

$$y \rightarrow \infty \text{ 时: } u \rightarrow U_\infty, \quad \theta \rightarrow 0, \quad \omega \rightarrow 0, \quad C \rightarrow 0. \quad (A17)$$

附录 B

$$h_1 = \frac{1}{2(1 + \beta)} [1 + \sqrt{1 + 4N(1 + \beta)}] J, \quad h_2 = \frac{1}{2(1 + \beta)} [1 + \sqrt{1 + 4(N + \delta)(1 + \beta)}] J,$$

$$h_3 = \frac{Pr}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4\delta}{Pr}} \right], \quad h_4 = \frac{Sc}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4(\delta + K_c)}{Sc}} \right],$$

$$h_5 = \frac{\eta}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4\delta}{\eta}} \right], \quad h_6 = \frac{Sc}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4K_c}{Sc}} \right],$$

$$a_2 = \frac{Gr}{(1 + \beta) Pr^2 - Pr - N}, \quad a_3 = \frac{Gr_c}{(1 + \beta) h_6^2 - h_6 - N}, \quad a_4 = \frac{2\beta \eta B_1}{(1 + \beta) \eta^2 - \eta - N}$$

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \left[\frac{n}{1 - (2\beta\eta^2 n) / ((1 + \beta)\eta^2 - \eta - N)} \right] [B_6 h_1 + a_2 Pr + a_3 h_4 + \eta a_4], \\
 B_2 &= \frac{1}{(1 - h_5 x_5 n)} \left[n \left(t_4 t_5 + Pr d_2 + h_6 d_4 + h_1 d_7 + Pr d_8 + h_4 d_9 - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. t_4 t_6 - d_1 h_3 - h_4 d_3 - \eta h_6 \right) + \frac{A\eta}{\delta} \right], \\
 B_4 &= \frac{ASch_6}{h_6^2 - Sch_6 - (\delta + K_c) Sc}, \\
 B_6 &= \frac{1}{(1 + hh_1)} [1 + a_2(Prh + 1) + a_3(1 + hh_4) + a_4(1 + \eta h)], \\
 d_1 &= \frac{GrAPr}{\delta \left\{ (1 + \beta) h_3^2 - h_3 - (N + \delta) \right\}}, \quad d_2 = \frac{GAPr}{\delta \left\{ (1 + \beta) Pr^2 - Pr - (N + \delta) \right\}}, \\
 d_3 &= \frac{Gr_c B_4}{(1 + \beta) h_6^2 - h_6 - (N + \delta)}, \quad d_4 = \frac{Gr_c B_4}{(1 + \beta) h_4^2 - h_4 - (N + \delta)}, \\
 d_5 &= \frac{2\beta B_2 h_5}{(1 + \beta) h_5^2 - h_5 - (N + \delta)}, \quad d_6 = \frac{2\beta \eta^2}{\delta \left\{ (1 + \beta) \eta^2 - \eta - (N + \delta) \right\}}, \\
 d_7 &= \frac{Ah_1 B_6}{(1 + \beta) Pr^2 - Pr - (N + \delta)}, \quad d_8 = \frac{Aa_2 Pr}{(1 + \beta) Pr^2 - Pr - (N + \delta)}, \\
 d_9 &= \frac{Aa_3 h_6}{(1 + \beta) Pr^2 - Pr - (N + \delta)}, \quad d_{10} = \frac{Aa_4 \eta}{(1 + \beta) \eta^2 - \eta - (N + \delta)}, \\
 d_{11} &= d_2 - d_8, \quad d_{12} = d_3 + d_9, \quad d_{13} = d_6 - d_{10}, \quad d_{14} = t_4(t_5 - t_6), \\
 t_4 &= \frac{1}{hh_2 + 1}, \quad t_5 = d_1(hh_3 + 1) - d_{11}(1 + hPr) + d_{12}(hh_4 + 1), \\
 t_6 &= d_5(hh_5 + 1) - d_4(hh_6 + 1) + d_{13}(h\eta + 1) - d_7(hh_1 + 1) - 1, \\
 x_5 &= \frac{2\beta h_5}{(1 + \beta)^2 h_5^2 - h_5 - (N + \delta)}.
 \end{aligned}$$

[参 考 文 献]

[1] Eringen A C. Simple microfluids[J]. Internat J Engng Sci, 1964, 2(2): 205– 217.

[2] Eringen A C. Theory of micropolar fluids[J]. J Math Mech, 1966, 16(1): 1– 18.

[3] Eringen A C. Theory of Termomicrofluids[J]. J Math Anal Appl, 1972, 38(9): 480– 496.

[4] Ariman T, Turk M A, Sylvester N D. Microcontinuum fluid mechanics—a review[J]. Internat J Engng Sci, 1973, 11(8): 905– 930.

[5] Gorla R S R. Mixed convection in a micropolar fluid from a vertical surface with uniform heat flux[J]. Internat J Engng Sci, 1992, 30(3): 349– 358.

[6] Rees D A S, Pop I. Free convection boundary layer flow of a micropolar fluid from a vertical flat plate[J]. IMAJ Appl Math, 1998, 61(2): 179– 197.

[7] Singh Ajay Kumar. Numerical solution of unsteady free convection flow of an incompressible micropolar fluid past an infinite vertical plate with temperature gradient dependent heat source[J]. J Energy Heat and Mass Transfer, 2002, 24: 185– 194.

[8] Hiremath P S, Patil P M. Free convection effects on oscillatory flow of couple stress field through a porous medium[J]. Acta Mech, 1993, 98(1/4): 143– 158.

[9] Helmy K A. MHD unsteady free convection flow past a vertical porous plate[J]. ZAMM, 1998, 78(4): 255– 270.

[10] El- Hakiem M A, Mohammadein A A, El- Kabeir, et al. Joule heating effects on magnetohydrodynamic free convection flow of a micropolar fluid[J]. Internat Comm Heat Mass Tran, 1999, 26(2): 219– 227.

[11] El- Anin M F. Magnetohydrodynamic free convection and mass transfer flow in micropolar fluid with constant suction[J]. J Magn Mater, 2001, 234(3): 567– 574.

- [12] Kim Y J. Unsteady convection flow of micropolar fluids past a vertical plate embedded in a porous medium[J]. *Acta Mech*, 2001, **148**(1/4): 105– 116.
- [13] Kim Y J. Heat and mass transfer in MHD micropolar flow over a vertical moving plate in a porous medium[J]. *Trans Porous Media*, 2004, **56**(1): 17– 37.
- [14] Khandelwal K Anil, Gupta Poonam, Jain N C. Effects of couple stresses on the flow through a porous medium with variable permeability in slip flow regime[J]. *Ganita*, 2003, **54**(2): 203– 212.
- [15] Sharma P K, Chaudhary R C. Effect of variable suction on transient free convective viscous incompressible flow past a vertical plate with periodic temperature variations in slip flow regime[J]. *Emirates Journal of Engineering Research*, 2003, **8**(2): 33– 38.
- [16] Sharma P K. Influence of periodic temperature and concentration on unsteady free convective viscous incompressible flow and heat transfer past a vertical plate in slip– flow regime[J]. *Mathematics*, 2005, **8**(1): 51– 62.
- [17] Cussler E L. *Diffusion Mass Transfer in Fluid Systems* [M]. 2nd Ed. Cambridge, U K: Cambridge University Press, 1998.
- [18] Das U N, Deka R K, Soundalgekar V M. Effects of mass transfer on flow past an impulsively started infinite vertical plate with constant heat flux and chemical reaction[J]. *Forschung im Ingenieurwesen Engineering Research Co*, 1994, **60**(10): 284– 287.
- [19] Muthucumaraswamy R, Ganesan P. First order chemical reaction on flow past an impulsively started vertical plate with uniform heat and mass flux[J]. *Acta Mech*, 2001, **147**(1/4): 45– 57.
- [20] Muthucumaraswamy R. Effects of a chemical reaction on moving isothermal vertical surface with suction[J]. *Acta Mech*, 2002, **155**(1/2): 65– 70.
- [21] Kandasamy R, Periasamy K, Prashu Sivagnana K K. Effects of chemical reaction, heat and mass transfer along wedge with heat source and concentration in the presence of suction or injection[J]. *Internat J Heat Mass transfer*, 2005, **48**(7): 1388– 1394.
- [22] Rees D A S, Bassom A P. The Blasius boundary layer flow of micropolar fluid[J]. *Internat Engng Sci*, 1996, **34**(1): 113– 124.

Effects of Chemical Reaction on MHD Micropolar Fluid Flow Past a Vertical Plate in Slip– Flow Regime

R. C. Chaudhary, Abhay Kumar Jha

(Department of Mathematics, University of Rajasthan, Jaipur – 302004, Indian)

Abstract: Heat and mass transfer effects on unsteady flow of a micropolar fluid through a porous medium bounded by a semi– infinite vertical plate in slip– flow regime was studied, taking into account the homogeneous chemical reaction of first order. A uniform magnetic field acts perpendicular to the porous surface which absorbs the micropolar fluids with a suction velocity varying with time. The free stream velocity follows an exponentially increasing or decreasing small perturbation law. Using approximate method the expression for the velocity microrotation, temperature and concentration were obtained. Also the results of the skin friction coefficient, the couple stress coefficient, the rate of heat and mass transfer at the wall were presented with various values of fluid properties and flow conditions.

Key words: micropolar fluid; microrotation; chemical reaction; slip– flow; magnetohydrodynamics; heat and mass transfer