

Bogdanov-Takens 系统极限环和同宿轨线及分岔*

黄彪, 刘佳

(中山大学 应用力学与工程系, 广州 510275)

(王彪推荐)

摘要: 讨论 Bogdanov-Takens 系统极限环、同宿轨线及其关于参数分岔的曲线定量分析. 给出这些问题的近似解析表达式的参数增量法; 利用时间变换, 将极限环和同宿轨线表示为广义谐函数的解析表达式; 画出参数与极限环关于振幅稳定性特征指数、极限环与同宿轨线的相图, 以及参数的分岔图等曲线.

关键词: Bogdanov-Takens 系统; 极限环; 同宿轨线; 分岔图; 参数增量法

中图分类号: O322; V215.3⁺4 文献标识码: A

引言

Bogdanov-Takens 系统

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x(x-1) + \lambda(\mu+x)y, \quad (1)$$

极限环的存在性、唯一性和稳定性已有许多研究^[1-5]. 文献[6]研究了 Bogdanov-Takens 奇点的唯一正规形, 文献[7]利用多项式摄动研究了 Bogdanov-Takens Hamilton 函数的极限环, 文献[8]和[9]分别给出 Bogdanov-Takens 系统二次和三次摄动的相关结果. 但极限环及同宿轨线的定量分析仅限于小参数. 对给定 λ 和 μ 值, 方程(1) 环绕奇点(0, 0) 有极限环但环绕鞍点(1, 0) 没有. 而对给定的 λ 和 μ 特定的值, 方程(1) 在无限长时间上存在连接鞍点的同宿轨线. 本文给出方程(1) 在参数 λ 任意大情况下极限环、同宿轨线和分岔曲线的参数增量法. 本法可导出分岔图而不依赖于其他定性结果, 并给出极限环产生和消失的条件. 本法是摄动-增量法^[10]的推广.

1 极限环和同宿轨线的近似表达式

引进如下形式的时间变换

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(\varphi), \quad \omega(\varphi + 2n\pi) = \omega(\varphi), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

其中, φ 是新的时间. 在 φ 的变化域内, 极限环和同宿轨线可假设为下列形式:

$$x = a \cos \varphi + b, \quad y = -a\omega(\varphi) \sin \varphi, \quad (3)$$

* 收稿日期: 2007-09-25; 修订日期: 2008-08-06

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10672193)

作者简介: 黄彪(1950-), 男, 广东人, 副教授, 硕士(联系人, E-mail: huangchb@mail.sysu.edu.cn).

这里, 振幅 $a > 0$ 和偏心距 b 满足 $a + b = s \in (0, 1]$. $s < 1$ 时通常描述极限环, 而 $s = 1$ 时给出 $\varphi = 0$ 时刻经过鞍点 $(1, 0)$ 的同宿轨线. 在 φ 的定义域内, 将式(3)代入式(1), 有

$$-a\omega \frac{d}{d\varphi}(\omega \sin \varphi) = (a \cos \varphi + b)(a \cos \varphi + b - 1) - \lambda(\mu + a \cos \varphi + b)a\omega \sin \varphi. \quad (4)$$

式(4)两边同乘以 $-\sin \varphi$ 并积分, 得

$$\frac{1}{2}(\omega \sin \varphi)^2 = W(a, b, \varphi) + \lambda \int_0^\varphi (\mu + a \cos \varphi + b)\omega \sin^2 \varphi d\varphi, \quad (5)$$

上式中,

$$W(a, b, \varphi) = \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{2}(a+b)^2 - \frac{1}{2}(a \cos \varphi + b)^2 + \frac{1}{3}(a \cos \varphi + b)^3 - \frac{1}{3}(a+b)^3 \right],$$

分别取 $\varphi = \pi, 2\pi$, 有

$$W(a, b, \pi) + \lambda \int_0^\pi (\mu + a \cos \varphi + b)\omega \sin^2 \varphi d\varphi = 0, \quad (6)$$

$$\int_0^{2\pi} (\mu + a \cos \varphi + b)\omega \sin^2 \varphi d\varphi = 0, \quad (7)$$

极限环的稳定性由特征指数 $\gamma = \lambda X/T$ 确定. 这里,

$$\gamma = \int_0^{2\pi} \frac{\mu + a \cos \varphi + b}{\omega(\varphi)} d\varphi, \quad T = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)}. \quad (8)$$

当 $\gamma < 0 (> 0)$ 时极限环稳定(不稳定).

当 $\lambda \approx 0$ 时, 由式(5) ~ (7) 可得零阶近似 $a = a_0, b = b_0, \omega = \omega_0$. 这里,

$$\omega_0(\varphi) = \sqrt{1 - 2b_0 - \frac{2}{3}a_0 \cos \varphi}, \quad b_0 = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{3}a_0^2} \right), \quad (9)$$

$$\mu = \frac{-\int_0^{2\pi} (a_0 \cos \varphi + b_0)\omega_0(\varphi)\sin^2 \varphi d\varphi}{\int_0^{2\pi} \omega_0(\varphi)\sin^2 \varphi d\varphi} = \mu_0(a_0), \quad (10)$$

由 $\omega_0^2(\varphi) \geq 0$ 可得 $0 < a_0 < 3/4$, 式(8)可重写为

$$\gamma_0 = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0(a_0) + a_0 \cos \varphi + b_0}{\omega_0(\varphi)} d\varphi. \quad (11)$$

对 $\lambda \approx 0$ 及 $\lambda = 1$ 和 5 时, 式(10)和(11)给出的曲线见图 1. 图形显示, 在 $a_0 \in (0, 3/4]$ 上, $\mu_0(a_0)$ 是 a_0 的负单调递减函数而 $\gamma_0(a_0) > 0$ 正单调递增. 由式(10)有

$$\mu_0\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{7}. \quad (12)$$

于是, 对小参数 $\lambda > 0 (< 0)$ 有: $-1/7 < \mu_0 < 0$ 时, 系统(1)有唯一不稳定(稳定)极限环; $\mu_0 = -1/7$ 得到同宿轨线的 $a_0, b_0, \omega_0(\varphi)$ 如下:

$$a_0 = \frac{3}{4}, \quad b_0 = \frac{1}{4}, \quad \omega_0(\varphi) = \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|. \quad (13)$$

于是 $\lambda \approx 0$ 时的同宿轨线由下式给出:

$$x = \frac{3}{4} \cos \varphi + \frac{1}{4}, \quad y = -\frac{3}{4} \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| \sin \varphi. \quad (14)$$

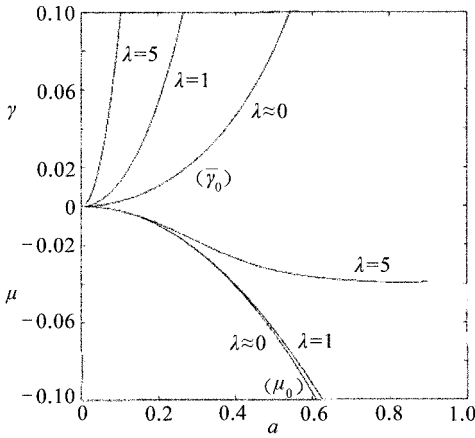


图 1 μ, γ 与 a 的关系曲线

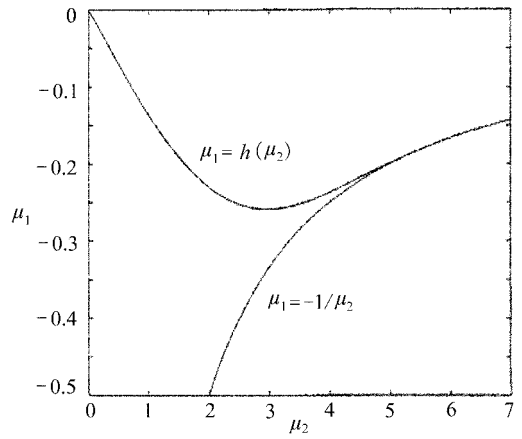


图 2 式(24)所示 $\mu_1 = h(\mu_2)$ 的函数图

2 参数增量法

极限环与同宿轨线位置的现有定量分析方法适用于 λ 为小参数. 现利用参数增量法将这些结果推广到非小参数情形. 相应于 λ_0 或 s_0 的增量 $\Delta\lambda$ 或 Δs , 即

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda, \quad s = s_0 + \Delta s,$$

方程(5)~(7)和 $a + b = s$ 的零阶摄动解 a_0, b_0, μ_0 和 ω_0 和的变化为

$$a = a_0 + \Delta a, \quad b = b_0 + \Delta b, \quad \mu = \mu_0 + \Delta\mu, \quad \omega = \omega_0 + \Delta\omega, \tag{15}$$

在初始状态附近展开式(5)~(7)为 Taylor 级数, 并忽略小增量的所有非线性项, 得到线性增量方程如下:

$$\begin{aligned} &\Delta a \left[\left(\frac{\partial W}{\partial a} \right)_0 + \lambda \int_0^\varphi \omega_0 \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi \right] + \Delta b \left[\left(\frac{\partial W}{\partial b} \right)_0 + \lambda \int_0^\varphi \omega_0 \sin^2 \varphi d\varphi \right] + \\ &\Delta \mu \left[\lambda \int_0^\varphi \omega_0 \sin^2 \varphi d\varphi \right] - \Delta \omega (\omega_0 \sin^2 \varphi) + \lambda \int_0^\varphi (\mu_0 + a_0 \cos \varphi + b_0) \Delta \omega \sin^2 \varphi d\varphi = \\ &\frac{1}{2} (\omega_0 \sin \varphi)^2 - W(a_0, b_0, \varphi) - \lambda \int_0^\varphi (\mu_0 + a_0 \cos \varphi + b_0) \omega_0 \sin^2 \varphi d\varphi, \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} &\Delta a \left[\left(\frac{\partial W}{\partial a} \right)_{0, \pi} + \lambda \int_0^\pi \omega_0 \sin^2 \varphi d\varphi \right] + \Delta b \left[\left(\frac{\partial W}{\partial b} \right)_{0, \pi} + \lambda \int_0^\pi \omega_0 \sin^2 \varphi d\varphi \right] + \\ &\Delta \mu \left[\lambda \int_0^\pi \omega_0 \sin^2 \varphi d\varphi \right] + \lambda \int_0^\pi (\mu_0 + a_0 \cos \varphi + b_0) \Delta \omega \sin^2 \varphi d\varphi = \\ &- W(a_0, b_0, \pi) - \lambda \int_0^\pi (\mu_0 + a_0 \cos \varphi + b_0) \omega_0 \sin^2 \varphi d\varphi, \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} &\Delta a \int_0^{2\pi} \omega_0 \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi + \Delta b \int_0^{2\pi} \omega_0 \sin^2 \varphi d\varphi + \\ &\Delta \mu \int_0^{2\pi} \omega_0 \sin^2 \varphi d\varphi + \int_0^{2\pi} (\mu_0 + a_0 \cos \varphi + b_0) \Delta \omega \sin^2 \varphi d\varphi = \\ &- \int_0^{2\pi} (\mu_0 + a_0 \cos \varphi + b_0) \omega_0 \sin^2 \varphi d\varphi, \end{aligned} \tag{18}$$

$$\Delta a + \Delta b = s - a_0 - b_0, \tag{19}$$

其中, $(\partial W / \partial a)_{0, \pi} = (\partial / \partial a) W(a, b, \varphi)_{a=a_0, b=b_0, \varphi=\pi}$, 而 $(\partial W / \partial b)_{0, \pi}$ 类似. 设以 2π 为周期的函数 ω_0 和 $\Delta\omega$ 其前 M 项 Fourier 展开式满足精度, 即取

$$\omega_0 = P_0 + \sum_{j=1}^M (P_j \cos j \varphi + Q_j \sin j \varphi), \quad (20)$$

$$\Delta \omega = \Delta P_0 + \sum_{j=1}^M (\Delta P_j \cos j \varphi + \Delta Q_j \sin j \varphi). \quad (21)$$

将式(20)、(21)代入方程(16)~(18),按谐波平衡法,可得 Δa 、 Δb 、 $\Delta \mu$ 、 ΔP_j 和 ΔQ_j 为独立变量的线性方程组如下:

$$A_n \Delta a + B_n \Delta b + C_n \Delta \mu + A_{n,0} \Delta P_0 + \sum_{j=1}^M (A_{n,j} \Delta P_j + B_{n,j} \Delta Q_j) = R_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 2M + 3. \quad (22)$$

其中, R_i 、 R_{M+i} 分别是方程(16)右端函数的 Fourier 展开式的余弦和正弦项系数(对所有的 i), 而 $R_{2M+1} \sim R_{2M+3}$ 分别是方程(17)~(19)的右端的相应项. 于是 R_n 是防止增量过程偏离精确解答的余项. 每次求解方程组(22)得到的增量值 Δa 、 Δb 、 $\Delta \mu$ 、 ΔP_j 和 ΔQ_j 与初始值相加而不断修正 a_0 、 b_0 、 μ_0 和 ω_0 , 迭代过程直至对所有的 n 使 $R_n \rightarrow 0$ (实际上只要 $|R_n|$ 小于要求的精度). 由增加增量 $\Delta \lambda$ 直到收敛于 λ 而完成整个增量过程, 利用前一解答作为后一增量过程的初始近似值, 直到获得收敛解. 这一方法可适合于 λ 和 s 是独立参数的情形. 增加固定的 λ 、 s 值以得到不同振幅的极限环直至其极限值即同宿轨线.

3 极限环和同宿轨线的计算

利用参数增量法可得到 λ 值较大时的计算结果. 取 $s_0 = 0.02$, 由方程(9)和(10)算得

$$a_0 = 0.0198, \quad b_0 = 0.0002, \quad \mu_0 = -0.001, \quad \omega_0 = \sqrt{0.9996 - 0.0132 \cos \varphi}, \quad (23)$$

以 $\lambda_0 = 0$ 和 $\Delta \lambda = 0.5$ 代入方程(22), 以式(23)为初始状态, 经 $\Delta \lambda$ 的两次连续增加, 再取 $\Delta s = 0.02$, 经 Δs 的 50 次连续增加, 可得 $\lambda = 0, 1, 5$ 时 μ 和 ν 关于不同极限环振幅 a 的关系曲线 $\mu = \mu(a)$ 、 $\nu = \nu(a)$ 见图 1. 图形显示 $\mu(a)$ 是振幅 a 的单调递减函数; 而 $\nu(a) > 0$ 是单调递增函数. 当 $\lambda < 0$ 时 $\nu(a) < 0$. 因此, 方程(1)当 $\lambda > 0$ (< 0) 有唯一且不稳定(稳定)极限环, 并且当 $a + b = s = 1$ 时形成一个同宿轨线.

表 1 方程(1)同宿轨线的 μ 、 a 和 b 随 λ 变化的值

λ	μ	a	b	λ	μ	a	b
0.25	-0.142389	0.750716	0.249284	3.25	-0.079090	0.840996	0.159004
0.50	-0.140989	0.752848	0.247152	3.50	-0.072071	0.851022	0.148978
0.75	-0.138669	0.756346	0.243654	3.75	-0.065414	0.860682	0.139318
1.00	-0.135456	0.761135	0.238865	4.00	-0.059213	0.869860	0.130140
1.25	-0.131390	0.767115	0.232885	4.25	-0.053532	0.878472	0.121528
1.50	-0.126527	0.774167	0.225833	4.50	-0.048399	0.886471	0.113529
1.75	-0.120947	0.782159	0.217841	4.75	-0.043813	0.893842	0.106158
2.00	-0.114748	0.790945	0.209055	5.00	-0.039747	0.900595	0.099405
2.25	-0.108047	0.800367	0.199633	5.25	-0.036160	0.906761	0.093238
2.50	-0.100979	0.810258	0.189742	5.50	-0.033002	0.912385	0.087614
2.75	-0.093694	0.820445	0.179555	5.75	-0.030221	0.917513	0.082486
3.00	-0.086346	0.830749	0.169251	6.00	-0.027767	0.922196	0.077803

$\lambda = 1$ ($\mu = -0.1204$ 和 -0.135456) 及 $\lambda = 5$ ($\mu = -0.0373$ 和 -0.039747) 时, 极限

环和同宿轨线的相图如图 3、4 所示. 图 3、4 中还给出了稳定极限环的四阶 Runge-Kutta (R-K) 数值积分法的相应结果. 图形显示, 本法与数值法的结果吻合良好.

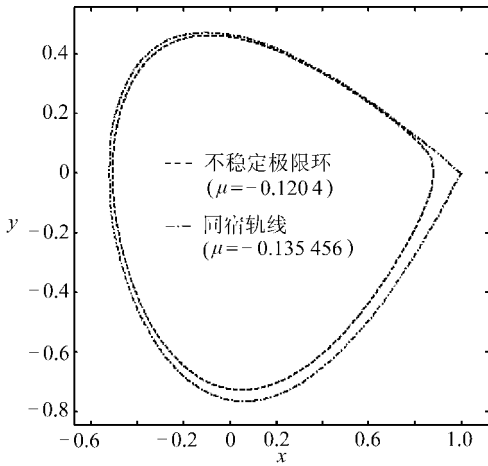


图 3 $\lambda = 1$ 时的极限环和同宿轨线

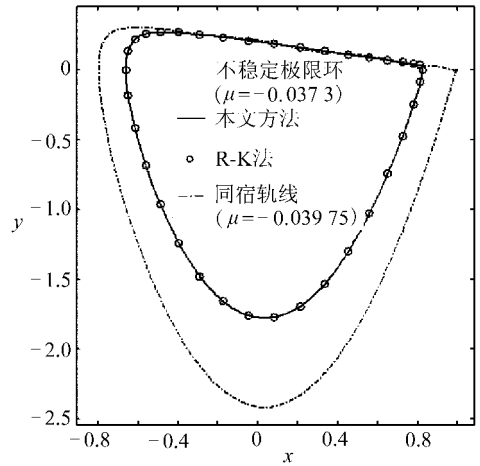


图 4 $\lambda = 5$ 时的极限环和同宿轨线

下面利用参数增量法计算对应不同的 λ 同宿轨线的 μ 值及幅值 a 和偏心距 b . 令 $s_0 = 1$, $\Delta s = 0$, 选取 $\lambda_0 = 0$, $\Delta \lambda = 0.25$, 由式(12)和(13)起步, 经 24 次连续增量, 计算结果见表 1.

分岔曲线可由 $\mu_1 = \lambda\mu$, $\mu_2 = \lambda$ 在 (μ_1, μ_2) 平面上给出如图 2. 这一曲线的 Pad 的近似表达式为

$$\mu_1 = h(\mu_2) = \frac{(-1/7)\mu_2 - m_3\mu_2^3 - m_5\mu_2^5 - m_7\mu_2^7}{1 + m_2\mu_2^2 + m_4\mu_2^4 + m_6\mu_2^6 + m_7\mu_2^8}, \quad (24)$$

式中

$$m_2 = 0.634317 \times 10^{-1}, \quad m_3 = 0.156432 \times 10^{-2}, \quad m_4 = 0.375726 \times 10^{-2}, \\ m_5 = 0.147892 \times 10^{-3}, \quad m_6 = 0.127024 \times 10^{-3}, \quad m_7 = 0.614302 \times 10^{-5}.$$

于是, $h'(0) = -1/7$ 且当 $\mu_2 \rightarrow \infty$ 时, $\mu_1\mu_2 = \mu_2 h(\mu_2) \rightarrow -1$. 本文的结果吻合良好, 例如表 1 中, $\lambda = 6$ 时, $\mu = -0.027767$, 此时 $\mu_1 = \lambda\mu = -0.166602$. 而按式(24)得 $\mu_1 = h(6) = -0.166604$.

可见, 当且仅当 $\mu_1\mu_2 < 0$ 和 $0 < |\mu_1| < |h(\mu_2)|$ 时, 方程(1)有唯一的极限环; 当 $\mu_1 > 0$ (< 0) 时, 极限环稳定(不稳定). 方程(24)中 $\mu_1 = h(\mu_2)$ 时, 方程(1)有一同宿轨线. Pad 近似式(24)、理论结果式(12)和渐进结果 $\mu_1\mu_2 = -1$ ($\mu_2 \rightarrow \infty$) 的数据意义, 参看文献[1]的说明. 于是, 分岔曲线(24)是数值上作整个平面的修正. 本文的方法产生的极限环与同宿轨线的几何形状如图 3、4 所示. 极限环与同宿轨线的近似表达式则由式(3)、(15)、(20)和(21)给出.

致谢 谨以此文深切怀念先师徐兆教授! 是先师生前引领作者涉足本研究领域. 谨值此衷心感谢香港城市大学陈兆莹教授和宗国威教授的支持!

[参 考 文 献]

- [1] Perko L.M. A global analysis of the Bogdanov-Takens system[J]. SIAM J Appl Math, 1992, 52(4): 1172-1192.

- [2] Bogdanov R I. Bifurcation of the limit cycle of a family of plane vector fields[J]. *Selecta Math Soviet*, 1981, **1**: 373– 387.
- [3] Bogdanov R I. Versal deformation of a singularity of a vector field on the plane in the case of zero eigenvalues[J]. *Selecta Math Soviet*, 1981, **1**: 389– 421.
- [4] Takens F. Forced oscillations and bifurcations[J]. *Applications of Global Analysis I*, *Comm Math Inst Rijksuniversitat Utrecht*, 1974, **3**: 1– 59.
- [5] Kuznetsov Y. *Elements of Applied Bifurcation Theory* [M]. Vol **112**. New York: Springer– Verlag, 1995.
- [6] WANG Duo, LI Jing, HUANG Min– hai, et al. Unique normal form of Bogdanov– Takens singularities[J]. *Journal of Differential Equations*, 2000, **163**(1): 223– 238.
- [7] Iliev Iliya D. On the limit cycles available from polynomial perturbations of the Bogdanov– Takens Hamiltonian[J]. *Israel Journal of Mathematics*, 2000, **115**(1): 269– 284.
- [8] 岳喜顺. 后继函数法 Bogdanov– Takens 系统的二次扰动[J]. *应用数学学报*, 2006, **29**(5): 838– 847.
- [9] 丰建文. Bogdanov– Takens 系统的三次齐扰动[J]. *数学杂志*, 2004, **24**(5): 565– 569.
- [10] Chan H S Y, Chung K W, Xu Z A perturbation– incremental method for strongly non– linear oscillators[J]. *Internat J Non – Linear Mech*, 1996, **31**(1): 59– 72.

Limit Cycles and Homoclinic Orbits and Their Bifurcation of the Bogdanov– Takens System

HUANG Cheng– biao, LIU Jia

(Department of Applied Mechanics & Engineering, Sun Yat – sen University,
Guangzhou 510275, P. R. China)

Abstract: The quantitative analysis of limit cycles and homoclinic orbits and the bifurcation curve for the Bogdanov– Takens system were discussed. The parameter incremental method for approximate analytical– expressions of these problems was given. These analytical– expressions of the limit cycle and homoclinic orbit were shown as the generalized harmonic function by employing a time transformation. Some curves for the parameters and the stability characteristic exponent of limit cycle versus amplitude were drawn. And some of the limit cycles and homoclinic orbits phase portraits were plotted. And the relationship curves of parameter μ and λ with amplitude a and the bifurcation diagrams about the parameter were given too. The numerical accuracy of calculation results was good.

Key words: Bogdanov– Takens system; limit cycle; homoclinic orbit; bifurcation diagrams; analytical– expressions; parameter incremental method