

幂律流体边界层方程的近似解析解 和壁摩擦因数的近似值*

苏晓红¹, 郑连存², 蒋 锋^{1,3}

(1. 华北电力大学 数理系, 河北 保定 071003;

2. 北京科技大学 数力系, 北京 100083;

3. 华中科技大学 控制科学与工程系, 武汉 430074)

(周哲玮推荐)

摘要: 对幂率流体层流平板边界层的解析解进行了研究. 对该问题提供了 Adomian 分解方法并且推导出了问题的级数形式的近似解析解, 该近似解析解具有快速收敛性和易于计算性. 对不同的幂率给出了方程的近似解析解和相应的壁摩擦因数近似值, 最后对近似解所推出结果和所得壁摩擦因数与文献中的数值解进行了比较验证, 证实了该文提出的解析近似方法的准确性和可靠性, 说明了该近似解能够应用于提供所研究问题的壁摩擦因数.

关键词: 幂率流体; 非线性边值问题; 解析拆分法

中图分类号: O175:O357 **文献标识码:** A

引 言

近年来, 由于非 Newton 流体流动在工程技术例如热轧、玻璃纤维、造纸、塑料薄膜拉伸、金属和聚合物挤出、拔丝等领域中的应用越来越广泛, 因此非 Newton 流体边界层问题特别是如何预测和计算非 Newton 流体在运动中的行为, 成为科学家非常热心关注的问题. 在自然现象和工业中绝大多数流体流动都是非 Newton 流体, 非 Newton 流体不满足 Newton 流体的基本性质, 其边界层数学模型相对要复杂, 研究起来比 Newton 流体要困难很多. 在流体运动边界层中拖曳力对流体运动状态起着主要作用, 拖曳力即流体运动中的阻力的产生是由于边界层中流体之间有表面摩擦, 边界层中的拖曳力是流体和物体表面特性共同作用的结果^[1]. 通过研究和求解边界层的数学模型计算出流体的拖曳力, 进而确定出流体在运动中的相应行为是研究的热点课题.

Schowalter^[2], Acrivos 等人^[3]首先将边界层理论应用于非 Newton 流体绕流平板问题, 并推导出了边界层问题相似解存在的条件. 后来, Nachman 和 Callegari^[4]通过引入 Crocco 变量, 将拟塑性流体边界层简化为非线性奇异边值问题, 并建立了解的存在性、唯一性和解析性. Howell^[5]和 Rao 等人^[6]研究了幂率流体绕流连续运动平板边界层的动量和热量传输行为. 近来, Zheng 等人^[7-8], Lu 和 Zheng^[9]讨论了幂率流体以定速顺流或逆流连续运动平板边界层问

* 收稿日期: 2008-03-17; 修订日期: 2008-07-15

作者简介: 苏晓红 (1976-), 男, 湖北人, 讲师(联系人, E-mail: suxh2005@163.com).

题,证明了问题解的存在性、唯一或非唯一性,而且得到了边界层的壁摩擦因数的数值结果.

然而,以往的文献主要集中在讨论边界层问题解的存在性、唯一性、解析性或者进行数值计算上,但比较重要的边界层问题的近似解析解却仍然没有得到很好的解决.

本文研究置于静止幂律非 Newton 流体介质中连续运动平板表面的层流边界层问题,平板的速度为 U_w ,此时边界层起源于平板尾部,在垂直平板方向边界层的厚度逐渐增加,如果将坐标原点建立在边界层起点处,并分别取平板运动方向和垂直于平板方向为 X 轴和 Y 轴正方向,则其控制方程为^[1, 10-13]:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \quad (1)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial Y} \left[\gamma \left| \frac{\partial U}{\partial Y} \right|^{N-1} \frac{\partial U}{\partial Y} \right], \quad (2)$$

这里, X 、 Y 轴沿着和垂直于平板方向, U 和 V 分别为平行于和垂直于平板的速度分量,其中 $K \left| \frac{\partial U}{\partial Y} \right|^{N-1} \frac{\partial U}{\partial Y}$ 为剪切应力, $\gamma \left| \frac{\partial U}{\partial Y} \right|^{N-1}$ ($\gamma = K/\rho$) 可视为运动黏度系数. $N = 1$ 对应于 Newton 流体, $0 < N < 1$ 描述的是拟塑性非 Newton 流体, $N > 1$ 相应于涨流形流体.

相应的边界条件为

$$U|_{Y=0} = U_w, \quad V|_{Y=0} = 0, \quad U|_{Y=\infty} = 0. \quad (3)$$

对 $N = 1$ 的 Newton 流层流边界层已经有许多科学工作者做过研究, Schowalter^[2] 和 Acrivos 等人^[3] 将边界层理论引入到对 $N \neq 1$ 的幂率流层流边界层的研究中,在这些先驱者工作的基础上,近年来幂率流体边界层的研究得到了不断的推进^[6-15].

1 边界层模型的转化

为了研究的需要,定义以下无量纲变量:

$$x = X/L_0, \quad y = (NRe)^{1/(N+1)} Y/L_0, \quad u = U/U_w,$$

$$v = (NRe)^{1/(N+1)} V/U_w, \quad NRe = \rho U_w^{2-N} L_0^N / K,$$

这里, L_0 是一特征长度,速度 $U_w > 0$. 将以上提到的无量纲变量代入方程(1)~(3)并且引入流函数 $\phi(x, y)$ 和相似变量 η ^[7-9, 11]:

$$\phi = Ax^\mu f(\eta), \quad \eta = Bx^\beta y, \quad (4)$$

这里, A 、 B 、 μ 、 β 是待定的常数, $f(\eta)$ 为无量纲流函数. 速度分量可分别表述为 $u = \partial\phi/\partial y$ 和 $v = -\partial\phi/\partial x$. 再将式(4)代入方程(1)~(3),并令 $\beta = -\mu$, $AB = 1$, $\mu = 1/(n+1)$ 和 $B = (n+1)^{-1/(n+1)}$, 我们能得到边界层问题(1)~(3)的相似解方程:

$$(1 f''(\eta) | f''(\eta) |^{N-1} f''(\eta))' + f(\eta) f''(\eta) = 0, \quad (5)$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f'(\eta) |_{\eta=\infty} = 0. \quad (6)$$

当 $N = 1$ 时方程(5)和(6)称为 Sakiadis 方程,且方程(5)和(6)蕴含着当 $\eta \in (0, +\infty)$ 时 $f''(\eta) < 0$ 和 $f''(+\infty) = 0$. 再引入以下广义 Crocco 变量和相似变换变量变换:

$$g(z) = [-f''(\eta)]^N, \quad z = f'(\eta), \quad z \in [0, 1), \quad (7)$$

这里, $z (= f')$ 作为一个独立变量表示无量纲切向速度, $g(z) (= (-f'')^N)$ 表示剪切力. 将式(7)代入方程(5)和(6)能转化为下面的非线性两点奇异边值问题:

$$g''(z) = -zg^{-1/N}(z), \quad 0 < z < 1, \quad (8)$$

$$g(0) = 0, \quad g'(1) = 0. \quad (9)$$

根据转化过程方程(8)和(9)只有正解才具有实际的物理意义.

2 Adomian 近似解析解结果

Adomian 分解方法是已经被证明为求解涉及非线性算子的一种非常方便和有效的的方法, Adomian 分解方法的特性是对非线性方程中最复杂的非线性项提出巧妙的方法, 产生一个与之等价的多项式, 用一个特殊的有规律的的可求的多项式(即 Adomian 多项式) 替代非线性函数. Adomian 多项式只由前面的低阶解分量和非线性项确定. Adomian 分解方法得到问题的解为一个特有的级数, 这个级数的优点是其具有快速的收敛性, 我们可用该级数的前几项作为问题的近似解, 其理论依据在文献[16] 中已经得到证明, 下面我们将 Adomian 分解方法引入到求解本文研究的边界层问题中来.

为了得到方程(8)和(9)的近似解析解, 我们需要再进行一次变量变换: $x = 1 - z, y(x) = g(z)$, 则方程(8)和(9)转化为

$$y''(x) = \frac{x-1}{y^{1/N}(x)}, \quad 0 < x < 1, \tag{10}$$

$$y'(0) = 0, \quad y(1) = 0. \tag{11}$$

根据方程(6)和(7), 我们可得 $[-f''(0)]^N = g(1) = y(0)$, 因此我们可以记 $[-f''(0)]^N = g(1) = y(0) = \alpha$ (这里 α 是一个待定的重要参数, 表示壁摩擦因数), 可以看出 α 是非负的. 将方程(10) 从 0 到 x 积分两次可得

$$y(x) = \alpha + L^{-1} \left[\frac{x-1}{y^{1/N}} \right].$$

其中

$$L^{-1} = \int_0^x \int_0^x (\cdot) dx dx$$

表示二次积分算子, 令 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$ 可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = \alpha + L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x),$$

这里, A_n 是 Adomian 多项式, 用来替代非线性项 $(x-1)/y^{1/N}$. 根据 Adomian 分解法, 具有下面的迭代关系:

$$\begin{cases} y_0(x) = \alpha, \quad y_1(x) = L^{-1}(A_0), \\ y_2(x) = L^{-1}(A_1), \quad \dots, \quad y_n(x) = L^{-1}(A_{n-1}), \end{cases} \tag{12}$$

我们将方程(10)和(11)表示为四阶近似解, 更高阶的近似解可以用类似的方式得到, 下面计算出本问题 Adomian 多项式:

$$\begin{cases} A_0 = \frac{x-1}{y_0^{1/N}}, \quad A_1 = -\frac{1}{N} y_1 \frac{x-1}{y_0^{1/N+1}}, \\ A_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{N} \left[1 + \frac{1}{N} \right] \frac{(x-1)y_1^2}{y_0^{1/N+2}} - \frac{1}{N} \frac{(x-1)y_2}{y_0^{1/N+1}}, \\ A_3 = -\frac{1}{N} \frac{(x-1)y_3}{y_0^{1/N+1}} + \frac{1}{N} \left[1 + \frac{1}{N} \right] \frac{(x-1)y_1 y_2}{y_0^{1/N+2}} - \\ \frac{1}{6} \frac{1}{N} \left[1 + \frac{1}{N} \right] \left[2 + \frac{1}{N} \right] \frac{(x-1)y_1^3}{y_0^{1/N+3}}. \end{cases} \tag{13}$$

将式(13)代入方程(12)能够得到下面的结果:

$$\begin{cases}
 y_0 = \alpha, \\
 y_1 = \frac{1}{a^{1/N}} \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right], \\
 y_2 = \frac{-1}{360N\alpha^{1+2/N}} (2x^6 - 12x^5 + 15x^4), \\
 y_3 = \frac{N+1}{72N^2\alpha^{2+3/N}} \left[\frac{x^9}{72} - \frac{x^8}{8} + \frac{5x^7}{14} - \frac{3x^6}{10} \right] + \\
 \frac{1}{360N^2\alpha^{2+3/N}} \left[\frac{x^9}{36} - \frac{x^8}{4} + \frac{9x^7}{14} - \frac{x^6}{2} \right], \\
 y_4 = \frac{-1}{360N^3\alpha^{3+4/N}} \left[\frac{x^{12}}{4752} - \frac{x^{11}}{396} + \frac{5x^{10}}{504} - \frac{x^9}{63} + \frac{x^8}{112} \right] - \\
 \frac{N+1}{72N^3\alpha^{3+4/N}} \left[\frac{x^{12}}{9504} - \frac{x^{11}}{792} + \frac{3x^{10}}{560} - \frac{23x^9}{2520} + \frac{3x^8}{560} \right] - \\
 \frac{N+1}{360N^3\alpha^{3+4/N}} \left[\frac{x^{12}}{396} - \frac{x^{11}}{33} + \frac{23x^{10}}{180} - \frac{2x^9}{9} + \frac{15x^8}{112} \right] - \\
 \frac{(N+1)(N+2)}{6N^3\alpha^{3+4/N}} \left[\frac{x^{12}}{28512} - \frac{x^{11}}{2376} + \frac{x^{10}}{540} - \frac{x^9}{288} + \frac{x^8}{448} \right],
 \end{cases} \tag{14}$$

其它的项也可类似得到. 基于式(14)我们可得方程(10)和(11)的四阶近似解:

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + y_3(x) + y_4(x).$$

进一步, 方程(8)和(9)的近似解就很容易地表示为

$$g(z) = y_0(1-z) + y_1(1-z) + y_2(1-z) + y_3(1-z) + y_4(1-z). \tag{15}$$

表 1 壁摩擦因数的 Adomian 近似解结果和数值解对比

指数	$N = 0.6$	$N = 0.8$	$N = 1.0$	$N = 2.0$	$N = 3.0$	$N = 5.0$
α_{num}	0.734 4	0.671 5	0.625 4	0.506 3	0.455 8	0.410 6
$\alpha_{Adomian}$	0.734 5	0.672 7	0.626 7	0.506 7	0.456 0	0.410 6
指数	$N = 8.0$	$N = 10$	$N = 20$	$N = 50$	$N = 200$	
α_{num}	0.383 0	0.373 5	0.353 8	0.341 5	0.335 4	
$\alpha_{Adomian}$	0.383 0	0.373 4	0.353 7	0.341 6	0.335 4	

我们研究的主要关注点是用条件(9)得出 α (即壁摩擦因数) 的值. 实际上很容易看出对任意 1 个给定幂率指数 N , 只要我们应用条件 $g(0) = 0$ 到方程(15)中, 就能立即得到相应的壁摩擦因数 α 的值. 另一方面, 在文献[7] 中作者应用打靶法计算出了与一些幂率指数 N 相应的壁摩擦因数 α 的数值结果. 为了验证 Adomian 近似解(15)的可靠性和有效性, 我们记文献[7]中的壁摩擦因数 α 的数值结果为 α_{num} , 由 Adomian 近似解得到的壁摩擦因数 α 值记为 $\alpha_{Adomian}$. 文献[7]中壁摩擦因数的数值结果和由本文 Adomian 近似解得到的结果对比如表 1 所示.

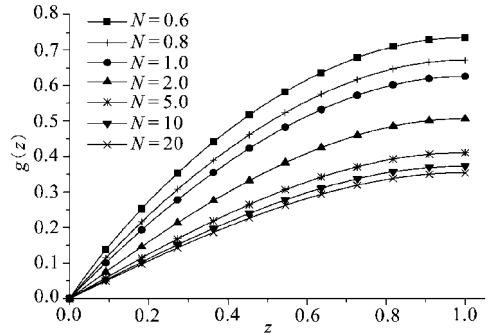


图 1 无量纲剪切应力分布图 ($N = 0.6 \sim N = 20.0$)

进一步, 当 $N = 1$ 时方程(5)和(6)称作 Sakiadis 方程. 因为 $[-f''(0)]^N = g(1) = y(0) =$

α 蕴含着当 $N = 1$ 时 $f''(0) = -\gamma(0) = -\alpha$, 所以我们有当 $N = 1$ 时 $f''(0) = -0.6267$, 这与文献[17] 计算出的 -0.6254 只有 0.2% 的误差. 对任意一个给定幂率指数 N , 由方程(15) 和相应的壁摩擦因数我们很容易得到无量纲剪切应力分布, 如图 1 所示. 从图 1 可以看出壁摩擦因数 α 随着幂率指数 N 增大而减小, 即幂率指数 N 小的幂率流体对壁面和边界层内流场施有更大的剪切力. 以上这些结果从不同角度证明了所得的 Adomian 近似解的可靠性和有效性.

3 结 论

对置于静止幂律流体中的一个连续平板流动边界层问题进行了相似分析, 边界层方程可以通过引入适当的相似变换和 Crocco 变换将控制方程转化为常微分方程两点奇异非线性边值问题, 并利用 Adomian 分解法对该类问题提供了一种有效的解析分解方法. 通过引入 Adomian 分解法能够得到该边值问题的一个易于计算和快速收敛级数形式的解, 从而得到该问题的近似解析解, 所得的近似解析解能够成功应用于计算壁摩擦因数的近似值和提供无量纲剪切应力分布图. 将所得结果与文献中的数值解结果进行了比较, 结果验证了得到的 Adomian 近似解有相当高的精度.

致谢 作者感谢华北电力大学科研基金(93210706)对本文的资助.

[参 考 文 献]

- [1] Schlichting H. Boundary Layer Theory [M]. New York: McGraw-Hill Press, 1979.
- [2] Schowalter W R. The application of boundary-layer theory to power-law pseudoplastic fluids: Similar solutions[J]. AIChE Journal, 1960, 6(1): 24-28.
- [3] Acrivos A, Shah M J, Petersen E E. Momentum and heat transfer in laminar boundary-layer flows of non-Newtonian fluids past external surfaces[J]. AIChE Journal, 1960, 6(2): 312-317.
- [4] Nachman A, Callegari A. A nonlinear singular boundary value problem in the theory of pseudoplastic fluids[J]. SIAM J Appl Math, 1980, 38(2): 275-281.
- [5] Howell T G. Momentum and heat transfer on a continuous moving surface in power law fluid[J]. Internat J Heat Mass Transfer, 1997, 40(8): 1853-1861.
- [6] Rao J H, Jeng D R, Dewitt K J. Momentum and heat transfer in a power-law fluid with arbitrary injection/suction at a moving wall[J]. Internat J Heat Mass Transfer, 1999, 42(15): 2837-2847.
- [7] Zheng L C, Su X H, Zhang X X. Similarity solutions for boundary layer flow on a moving surface in an otherwise quiescent fluid medium[J]. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 2005, 19(4): 541-552.
- [8] Zheng L C, Ma L X, He J C. Bifurcation solutions to a boundary layer problem arising in the theory of power law fluids[J]. Acta Mathematica Scientia, 2000, 20(1): 19-26.
- [9] Lu C Q, Zheng L C. Similarity solutions of a boundary layer problem in power law fluids through a moving flat plate[J]. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 2004, 13(2): 143-166.
- [10] Hussaini M Y, Lakin W D, Nachman A. On similarity solutions of a boundary layer problem with an upstream moving wall[J]. SIAM J Appl Math, 1987, 47(4): 699-709.
- [11] Zheng L C, He J C. Existence and non-uniqueness of positive solutions to a non-linear boundary value problems in the theory of viscous fluids[J]. Dynamic Systems and Applications, 1999, 8(2): 133-145.
- [12] Soewono E, Vajravelu K, Mohapatra R N. Existence and non-uniqueness of solutions of a singular nonlinear boundary-layer problem[J]. J Math Anal Appl, 1991, 159(1): 251-270.

- [13] Akcay M, Ykselen M A. Drag reduction of a non-Newtonian fluid by fluid injection on a moving wall[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 1999, **69**(2): 215– 225.
- [14] Wang T Y. Mixed convection heat transfer from a vertical plate to non-Newtonian fluids[J]. *International J Heat Mass Transfer*, 1995, **16**(1): 56– 61.
- [15] Hassaniien I A, Abdullah A A, Gorla R S R. Flow and heat transfer in a power-law fluid over a non-isothermal stretching sheet[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 1998, **28**(9): 105– 116.
- [16] Adomian G. *Nonlinear Stochastic Systems Theory and Applications to Physics* [M]. Dordrecht: Academic Press, 1989.
- [17] Zheng L C, Chen X H, Zhang X X. Analytical approximations for a boundary layer flow on a stretching moving surface with a power velocity[J]. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, 2004, **9**(4): 795– 802.

Analytical Approximate Solutions and the Approximate Value of Skin Friction Coefficient for the Boundary Layer of Power Law Fluids

SU Xiao-hong¹, ZHENG Lian-cun², JIANG Feng^{1,3}

(1. Department of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, Baoding, Hebei 071003, P. R. China;

2. Department of Mathematics and Mechanics, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, P. R. China;

3. Department of Control Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, P. R. China)

Abstract: A theoretical analysis for laminar boundary layer flow in power law non-Newtonian fluid was presented. The Adomian analytical decomposition technique was presented and an approximate analytical solution was obtained. The approximate analytical solution can be represented in terms of a rapid convergent power series with elegantly computable terms. The reliability and efficiency of the approximate solution were verified using numerical solutions. Moreover, the approximate solution can be successfully applied to provide the values of skin friction coefficient in the power law non-Newtonian fluid.

Key words: power law fluid; nonlinear boundary value problem; Adomian decomposition