

色散方程的一类新的高精度 交替分组显隐算法*

张青洁, 王文洽

(山东大学 数学学院, 济南 250100)

(周哲玮推荐)

摘要: 对于具有周期性边界条件的色散方程, 提出了一种高精度的交替分组显隐格式新解法 (nAGEI). 它不但无条件稳定, 而且同已有的 ASEI 和 AGE 等交替方法比较, 还具有精度高、收敛快的特点, 数值试验表明新方法关于空间步长具有四阶收敛速度.

关键词: Dispersive 方程; 有限差分; 交替分组显隐方法; 高阶精度; 绝对稳定; 并行计算

中图分类号: O241.82 **文献标识码:** A

引 言

色散方程作为重要的数学物理方程之一, 长期受到人们的关注和重视, 其数值解法也不断被相关人员研究和探讨^[1-7]. 我们知道显式差分解法格式简单且适于并行计算, 不过其稳定性条件通常比较苛刻, 而隐式差分解法虽然是无条件稳定的却不能在并行计算机上直接应用. 本文导出了一个求解色散方程的新的精度交替分组方法, 此方法无条件稳定并且可以在并行机上直接应用.

关于交替分组算法的研究是随着并行数值计算在计算机上的广泛应用而逐步深入的, 同区域分裂方法^[8-9]一样, 交替分组方法已成为有效的并行数值算法之一, 它不但是绝对稳定的, 而且还具有本质并行的特性. 1983 年, Evans 和 Abdullah 首先提出了求解热传导微分方程的交替分组显方法 (AGE)^[10-11], 随后交替分组显隐方法 (ASEI) 以及交替分组 Crank-Nicolson 方法 (ASCN)^[12-14] 的提出使交替分组方法得到发展. 近几年来, 交替分组方法的研究和应用逐渐扩展到了三阶色散方程、KdV 方程等领域^[5-7,15], 但在已有的交替方法文献中, 数值解关于空间步长的收敛速度几乎都是二阶的. 本文针对色散方程提出的 nAGEI 新方法不但绝对稳定、本质并行, 而且误差分析和数值试验表明, 其数值解关于空间步长的收敛速度几乎是四阶的. 通过与 AGE^[5] 和 ASEI^[6] 等方法的数值比较, 我们容易看到本文方法确实具有更高的精度.

* 收稿日期: 2007-11-20; 修订日期: 2008-08-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671113)

作者简介: 张青洁(1980—), 女, 山东人, 博士生(E-mail: qjzh@mail.sdu.edu.cn);

王文洽(1950—), 男, 教授, 博士生导师(联系人, Fax: +86-531-88564652; E-mail: wangwq@sdu.edu.cn).

我们考虑的问题是

$$Lu = u_t + au_{xxx} = 0, \quad 0 \leq x < l, \quad 0 < t < T, \quad (1)$$

$$u(x, t) = u(x + l, t), \quad 0 < t < T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x < l. \quad (3)$$

1 基本格式

我们用 $u(x, t)$ 表示方程(1) ~ (3) 的精确解, 用 U_i^n 表示精确解 $u(x_i, t_n) = u_i^n$ 的数值近似, 其中 $x_i = ih$, $t_n = n\tau$ (h, τ 分别为空间和时间步长). 特别的, 对于某个正数 J , 令 $h = l/J$, 取 $r = a\tau/(8h^3)$. 关于方程(1), 我们首先给出下面的高阶显、隐格式(4)、(5):

$$U_i^{n+1} = U_i^n - r[U_{i-3}^n - 8U_{i-2}^n + 13U_{i-1}^n - 13U_{i+1}^n + 8U_{i+2}^n - U_{i+3}^n], \quad (4)$$

$$U_i^{n+1} + r[U_{i-3}^{n+1} - 8U_{i-2}^{n+1} + 13U_{i-1}^{n+1} - 13U_{i+1}^{n+1} + 8U_{i+2}^{n+1} - U_{i+3}^{n+1}] = U_i^n. \quad (5)$$

其次, 针对方程(1)我们构造了6个新的Saulyev型非对称差分格式(6) ~ (11) (可在图1中看到格式的具体规则):

$$U_i^{n+1} - 3rU_{i+1}^{n+1} + 4rU_{i+2}^{n+1} - rU_{i+3}^{n+1} = \\ - rU_{i-3}^n + 8rU_{i-2}^n - 13rU_{i-1}^n + U_i^n + 10rU_{i+1}^n - 4rU_{i+2}^n, \quad (6)$$

$$3rU_{i-1}^{n+1} + U_i^{n+1} - 10rU_{i+1}^{n+1} + 8rU_{i+2}^{n+1} - rU_{i+3}^{n+1} = \\ - rU_{i-3}^n + 8rU_{i-2}^n - 10rU_{i-1}^n + U_i^n + 3rU_{i+1}^n, \quad (7)$$

$$- 4rU_{i-2}^{n+1} + 10rU_{i-1}^{n+1} + U_i^{n+1} - 13rU_{i+1}^{n+1} + 8rU_{i+2}^{n+1} - rU_{i+3}^{n+1} = \\ - rU_{i-3}^n + 4rU_{i-2}^n - 3rU_{i-1}^n + U_i^n, \quad (8)$$

$$rU_{i-3}^{n+1} - 8rU_{i-2}^{n+1} + 13rU_{i-1}^{n+1} + U_i^{n+1} - 10rU_{i+1}^{n+1} + 4rU_{i+2}^{n+1} = \\ U_i^n + 3rU_{i+1}^n - 4rU_{i+2}^n + rU_{i+3}^n, \quad (9)$$

$$rU_{i-3}^{n+1} - 8rU_{i-2}^{n+1} + 10rU_{i-1}^{n+1} + U_i^{n+1} - 3rU_{i+1}^{n+1} = \\ - 3rU_{i-1}^n + U_i^n + 10rU_{i+1}^n - 8rU_{i+2}^n + rU_{i+3}^n, \quad (10)$$

$$rU_{i-3}^{n+1} - 4rU_{i-2}^{n+1} + 3rU_{i-1}^{n+1} + U_i^{n+1} = \\ 4rU_{i-2}^n - 10rU_{i-1}^n + U_i^n + 13rU_{i+1}^n - 8rU_{i+2}^n + rU_{i+3}^n. \quad (11)$$

我们用 $L_h^{(4)} - L_h^{(11)}$ 表示基于格式(4) ~ (11) 的离散算子. 例如 $L_h^{(4)}$ 定义为

$$L_h^{(4)}U_i^n = \frac{1}{\tau}[(U_i^{n+1} - U_i^n) + r(U_{i-3}^n - 8U_{i-2}^n + 13U_{i-1}^n - 13U_{i+1}^n + 8U_{i+2}^n - U_{i+3}^n)].$$

那么通过在点 (x_i, t_n) 作泰勒展开, 我们可得到如下的截断误差(12) ~ (19):

$$L_h^{(4)}u_i^n - [Lu]_i^n = \frac{\tau}{2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right]_i^n + O(\tau^2 + h^4), \quad (12)$$

$$L_h^{(5)}u_i^n - [Lu]_i^n = - \frac{rh^3 a^2}{6} \left[\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \right]_i^n + \frac{\tau}{2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right]_i^n + O(\tau^2 + h^4), \quad (13)$$

$$L_h^{(6)}u_i^n - [Lu]_i^n = 2rh \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right]_i^n + 2rh^2 \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right]_i^n - \\ \frac{1}{3} arh^3 \left[\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \right]_i^n + rh\tau \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \right]_i^n + O(\tau + h^4), \quad (14)$$

$$L_h^{(7)}u_i^n - [Lu]_i^n = 8rh^2 \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right]_i^n - 4arh^3 \left[\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \right]_i^n + O(\tau + h^4), \quad (15)$$

$$L_h^{(8)} u_i^n - [Lu]_i^n = -2rh \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right]_i^n + 2rh^2 \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right]_i^n - \frac{23}{3} arh^3 \left[\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \right]_i^n - rh \tau \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \right]_i^n + O(\tau + h^4), \quad (16)$$

$$L_h^{(9)} u_i^n - [Lu]_i^n = -2rh \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right]_i^n - 2rh^2 \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right]_i^n - \frac{23}{3} arh^3 \left[\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \right]_i^n - rh \tau \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \right]_i^n + O(\tau + h^4), \quad (17)$$

$$L_h^{(10)} u_i^n - [Lu]_i^n = -8rh^2 \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right]_i^n - 4arh^3 \left[\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \right]_i^n + O(\tau + h^4), \quad (18)$$

$$L_h^{(11)} u_i^n - [Lu]_i^n = 2rh \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right]_i^n - 2rh^2 \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right]_i^n - \frac{1}{3} arh^3 \left[\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \right]_i^n + rh \tau \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \right]_i^n + O(\tau + h^4). \quad (19)$$

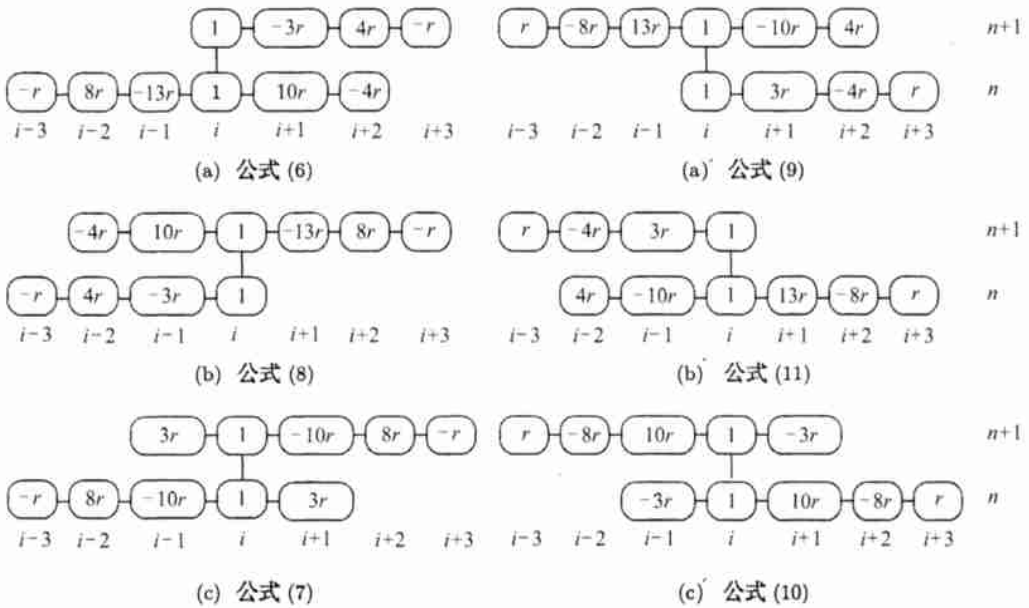


图1 公式(6)~(11)的格式示意图

2 新的交替分组显隐(nAGEI)格式

2.1 nAGEI格式

假设 $J = K(l + l') + l$, 其中 $l \geq 1, l' = l + 6 \geq 7$. 在每一时间层, 我们把空间网格点 x_1, x_2, \dots, x_J 分成 $(K + 1)$ 个部分. 在奇数时间层, 前 K 部分都分别包含一个显式段(l 个点)和一个隐式段(l' 个点), 第 $(K + 1)$ 部分则只含一个显式段; 在偶数时间层上, 显式段包含($l' - 6$) 个点, 靠近边界的两个隐式段分别包含($l + 3$) 个点, 其余的隐式段包含($l + 6$) 个点(详见图2). 这样显式段的 U_i^{n+1} 可通过公式(4) 直接计算得到. 在同一时间层的每个相对独立的隐式段上, 我们只要解一个如下所示的 k ($k = l + 6$ 或 $l + 3$) 阶方程组即可.

$$(I + rP_k) U^{n+1} = b,$$

$$G_1 = \text{diag}(Q_l, P_l, \dots, Q_l, P_l, Q_l), \quad (22)$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} A & & & & & & C \\ & Q_l & & & & & \\ & & P_{l+6} & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & Q_l & & \\ -C^T & & & & & & B \end{bmatrix}_{J \times J}, \quad (23)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -8 & 13 \\ & \ddots & & 1 & -8 \\ & & \ddots & & 1 \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_{(l+3) \times (l+3)},$$

式中, I 为 $J \times J$ 的单位阵, Q_l 是 $l \times l$ 的零矩阵, A 和 B 都是 $(l+3) \times (l+3)$ 阶的矩阵块, 可由 P_k 分别去掉前后的 3 行 3 列而获得.

2.2 稳定性

为了证明稳定性, 我们引入下面的 Kellogg 引理.

引理 1 (见文献[16]) 若 $\theta > 0$ 且 $(C + C^*)$ 为非负定的, 则 $(\theta I + C)^{-1}$ 存在, 并且满足:

$$\|(\theta I + C)^{-1}\|_2 \leq \theta^{-1}.$$

引理 2 在引理 1 的条件下, 有下述不等式成立:

$$\|(\theta I - C)(\theta I + C)^{-1}\|_2 \leq 1.$$

引理 3 若 G 为反对称矩阵, 则对于任意的非零向量 v 满足:

$$(Gv, v) = 0.$$

引理 4 对于任意实数 r 以及由式(22)、(23) 定义的反对称矩阵 G_1 、 G_2 , 矩阵 rG_1 、 rG_2 也是反对称矩阵, 并且都是非负定的.

令 $N = 2m$ 并且从式(20) 和式(21) 中消去 U^{n+1} , 得到

$$U^N = TU^{2(m-1)} = \dots = T^m U^0,$$

其中

$$T = (I + rG_2)^{-1}(I - rG_1)(I + rG_1)^{-1}(I - rG_2).$$

根据上述引理, 对于任意的正整数 m 和任意的实数 r , 可以导出下面的不等式:

$$\begin{aligned} \|T^m\|_2 &\leq \|(I + rG_2)^{-1}\|_2 \|(I - rG_1)(I + rG_1)^{-1}\|_2 \|(I - rG_2)(I + \\ &rG_2)^{-1}\|_2 \dots \|(I - rG_1)(I + rG_1)^{-1}\|_2 \|(I - rG_2)\|_2 \leq \\ &\|(I - rG_2)\|_2 \leq 1 + 44|r|. \end{aligned}$$

这表明新的交替分组显隐(nAGEI)方法是无条件稳定的, 从而我们得到如下定理.

定理 2.1 若 n 为偶数, r 为实数, 则由式(20) 和(21) 定义的新的交替分组显隐(nAGEI)方法是无条件稳定的.

2.3 截断误差分析

现在我们分析本文 nAGEI 新方法的截断误差. 从图 2 可以看出, 新解法本质上就是差分格式在奇、偶时间层中的两类典型段(显式段和隐式段)上的交替应用, 其中有对称格式(4)与(5)和非对称格式(6)与(9), (7)与(10)和(8)与(11)共 4 组格式.

首先,我们考虑对称格式(4)与(5)的情况.借助泰勒展开我们不难发现它们在奇偶时间层交替应用时,它们误差项的主要部分符号相反进而相消,从而它们的截断误差阶为

$$O(\tau^2 + h^4).$$

其次,考虑3组非对称格式.以格式(6)与(9)为例,借助泰勒展开可以得到格式(6)在点 (x_i, t_{n+1}) 的截断误差为

$$L_h^{(6)}u_i^n - [Lu]_i^{n+1} = 2rh \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right]_i^{(n+1)} + 2rh^2 \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right]_i^{(n+1)} + \frac{23}{3} arh^3 \left[\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \right]_i^{(n+1)} - rh \tau \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \right]_i^{(n+1)} + O(\tau + h^4). \tag{24}$$

与格式(9)在点 (x_i, t_n) 的截断误差(17)比较,我们看到含有 h, h^2 和 h^3 的3个主要的误差项符号相反,它们在每两个交替的时间层恰巧抵消了,因此点 x_i 处的截断误差阶为 $O(h\tau)$.

同理,式(9)在点 (x_i, t_{n+1}) 的截断误差为

$$L_h^{(9)}u_i^n - [Lu]_i^{n+1} = -2rh \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right]_i^{n+1} - 2rh^2 \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right]_i^{n+1} + \frac{1}{3} arh^3 \left[\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \right]_i^{n+1} + rh \tau \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \right]_i^{n+1} + O(\tau + h^4). \tag{25}$$

与格式(6)在点 (x_i, t_n) 的截断误差(14)比较,同样可以得到点 x_i 处的截断误差阶为 $O(h\tau)$.

同样,对于非对称格式组合(7)与(10)和(8)与(11),我们可以进行类似地讨论.

3 数值试验

我们用如下模型问题对式(1)、(2)进行数值模拟:

$$u(x, 0) = \cos(\pi x), \quad a = 1. \tag{26}$$

精确解 $u(x, t) = \cos(\pi x + \pi^2 t)$.

我们首先比较本文方法 nAGEI 和以前方法 AGE, ASEI(文献[5-6])的误差和收敛速率.为此,我们定义误差的 L_∞ 模和 L_2 模为

$$E_{\infty, \Delta x}^n = \max_i (e_{\Delta x, \Delta t}^n(i)) = \max_i |u_i^n - U_i^n|,$$

$$E_{2, \Delta x}^n = \|e_{\Delta x, \Delta t}^n\|_2 = \sqrt{\sum_i |u_i^n - U_i^n|^2 \Delta x},$$

其中, $\Delta x, \Delta t$ 分别为空间和时间步长.空间收敛速率通过下式计算:

表 1 算法 nAGEI 与 ASEI 关于数值解的误差和收敛速率的比较

	Δx	2/33	2/42	2/47	2/52	2/63	2/74	2/82
nAGEI	L_∞ - 误差	2.360 6E- 5	9.003 8E- 6	5.757 8E- 6	3.840 4E- 6	1.786 7E- 6	9.390 5E- 7	6.245 6E- 7
	收敛速率	-	3.996 6	3.974 9	4.006 0	3.987 8	3.997 0	3.972 7
	L_2 - 误差	2.361 2E- 5	9.022 0E- 6	5.758 0E- 6	3.845 2E- 6	1.786 8E- 6	9.393 8E- 7	6.232 7E- 7
	收敛速率	-	3.989 4	3.992 5	3.993 9	3.993 8	3.995 4	3.996 3
ASEI ^[6]	L_∞ - 误差	2.799 1E- 3	1.727 3E- 3	1.382 8E- 3	1.128 5E- 3	7.701 8E- 4	5.584 0E- 4	4.545 6E- 4
	收敛速率	-	2.001 7	1.977 6	2.010 3	1.990 8	1.998 0	2.004 2
	L_2 - 误差	2.799 9E- 3	1.730 9E- 3	1.382 9E- 3	1.130 1E- 3	7.702 6E- 4	5.584 4E- 4	4.548 5E- 4
	收敛速率	-	1.994 2	1.996 0	1.996 8	1.997 6	1.998 2	1.998 8

$$\text{收敛速率} \approx \frac{\lg(E_{l, \Delta x_1} / E_{l, \Delta x_2})}{\lg(\Delta x_1 / \Delta x_2)}, \quad l = 2, \infty.$$

在空间方向收敛速率的计算中, 时间步长 Δt 应该取得足够小, 考虑到这点, 在比较 3 个交替分组方法的数值试验中, 我们取时间步长 $\Delta t = 0.1 \times 10^{-5}$, $n = 10^5$. 从表 1 和表 2 中我们可以清楚地看到, 无论是 L_∞ 模还是 L_2 模, 用 nAGEI 方法得到的解的误差比用 AGE 和 ASEI 方法得到的相应误差精确二阶和三阶, 而对于数值解关于空间的收敛速率, nAGEI 方法接近四阶, AGE 和 ASEI 方法均接近二阶. 这些数值试验结果与其理论分析结论是一致的.

表 2 算法 nAGEI 与 AGE 关于数值解的误差和收敛速率的比较

Δx		1/16	1/26	1/30	1/36	1/44	1/46	1/48
nAGEI	L_∞ - 误差	2.6602 E- 5	3.840 3E- 6	2.171 4E- 6	1.048 2E- 6	4.723 6E- 7	3.961 1E- 7	3.347 6E- 7
	收敛速率	-	3.986 4	3.984 3	3.994 9	3.971 9	3.960 7	3.953 6
	L_∞ - 误差	2.669 3E- 5	3.845 5E- 6	2.171 2E- 6	1.048 8E- 6	4.716 1E- 7	3.937 9E- 7	3.337 3E- 7
	收敛速率	-	3.990 7	3.994 6	3.990 7	3.982 9	4.057 0	3.888 4
AGE ^[5]	L_∞ - 误差	2.966 4E- 3	1.1285 E- 3	8.491 2E- 4	5.894 2E- 4	3.948 9E- 4	3.612 4E- 4	3.3190 E- 4
	收敛速率	-	1.990 7	1.987 7	2.002 3	1.996 1	2.003 1	1.990 6
	L_2 - 误差	2.977 0E- 3	1.130 1E- 3	8.491 3E- 4	5.898 8E- 4	3.950 0E- 4	3.614 2E- 4	3.319 5E- 4
	收敛速率	-	1.995 1	1.997 4	1.998 1	1.998 5	1.998 5	1.998 5

表 3 数值误差比较 ($h = 2/240$, $\lambda = \tau/h^3 = 0.1$, $n = 200\ 000$)

格式		x				
		0.2	0.6	1.0	1.4	1.8
nAGEI	$e_a \times 10^6$	2.334 3	2.298 4	0.248 75	1.250 3	0.308 36
	$e_r \times 10^8$	4.236 1	3.687 2	0.265 68	27.975	0.319 91
ASEI ^[6]	$e_a \times 10^5$	5.100 2	4.777 2	2.196 9	6.182 1	1.673 1
	$e_r \times 10^5$	9.255 7	7.663 7	2.346 4	138.32	1.735 7
AGE ^[5]	$e_a \times 10^5$	5.182 2	4.856 3	2.180 9	6.204 1	1.653 5
	$e_r \times 10^5$	9.404 5	7.790 5	2.329 3	138.81	1.715 4
精确解		0.5510 4	- 0.623 36	- 0.936 29	0.044 70	0.963 92

表 4 数值误差比较 ($h = 2/240$, $\lambda = \tau/h^3 = 2$, $n = 10\ 000$)

格式		x				
		0.2	0.6	1.0	1.4	1.8
nAGEI	$e_a \times 10^6$	4.795 8	5.004 4	0.794 89	2.314 6	0.957 50
	$e_r \times 10^6$	8.703 1	8.028 1	0.848 97	51.786	0.993 34
ASEI ^[6]	$e_a \times 10^4$	0.349 94	0.397 83	1.375 5	1.853 3	1.252 2
	$e_r \times 10^4$	0.635 05	0.638 20	1.469 1	41.466	1.299 1
AGE ^[5]	$e_a \times 10^4$	2.606 7	2.543 4	1.034 8	3.182 9	0.932 36
	$e_r \times 10^4$	4.730 4	4.080 1	1.105 2	71.21 4	0.967 26
精确解		0.551 04	- 0.623 36	- 0.936 29	0.044 70	0.963 92

随后, 我们比较了这些数值算法在不同时刻和不同网格参数下的误差. 表 3、4 和图 3、图 4 分别给出了数值解的绝对误差 e_a 和相对误差 e_r 的相关数据和图形表示, 结果表明 nAGEI 法

比以前的 AGE 和 ASEI 都精确, 即使在较大的时间步长情况下 ($\lambda = \tau/h^3 = 1, 2, 4, 16$), nAGEI 算法比起 AGE 和 ASEI 方法仍然具有更高的精度.

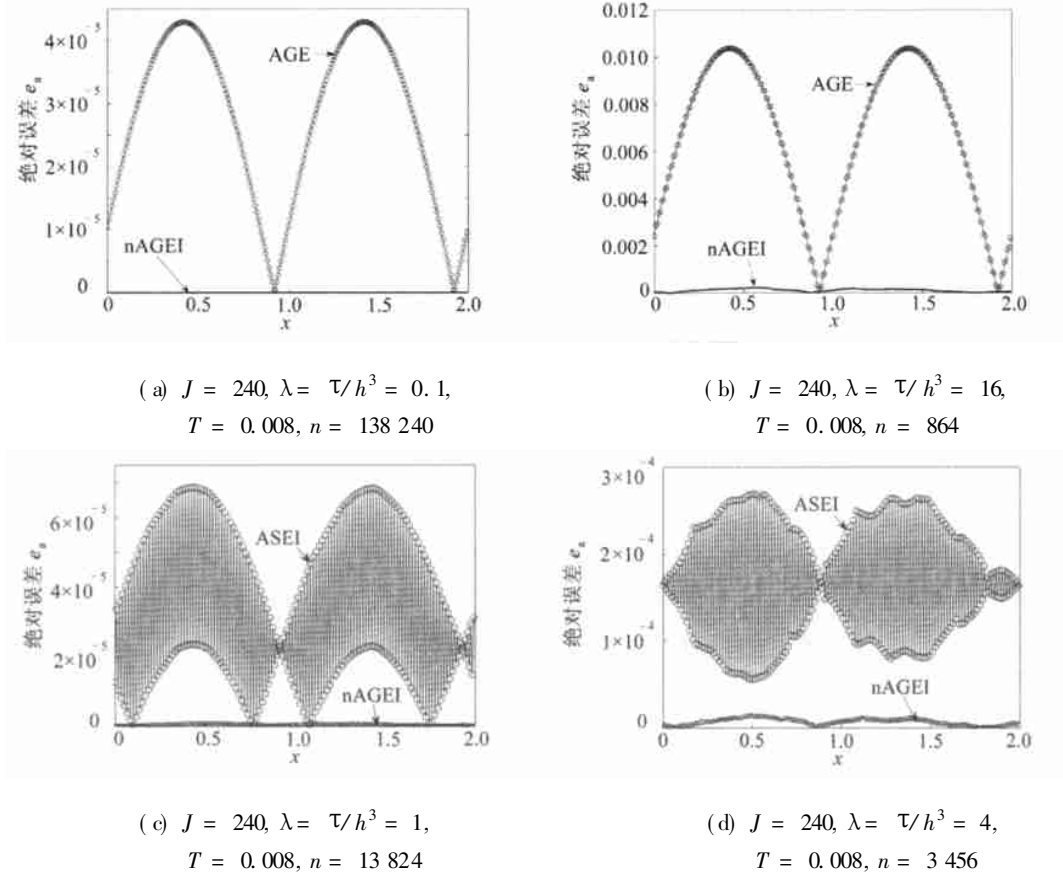
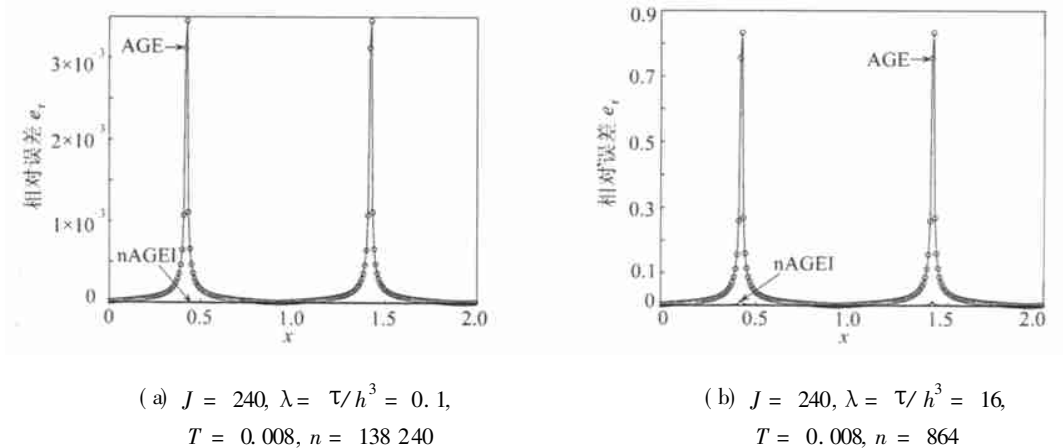
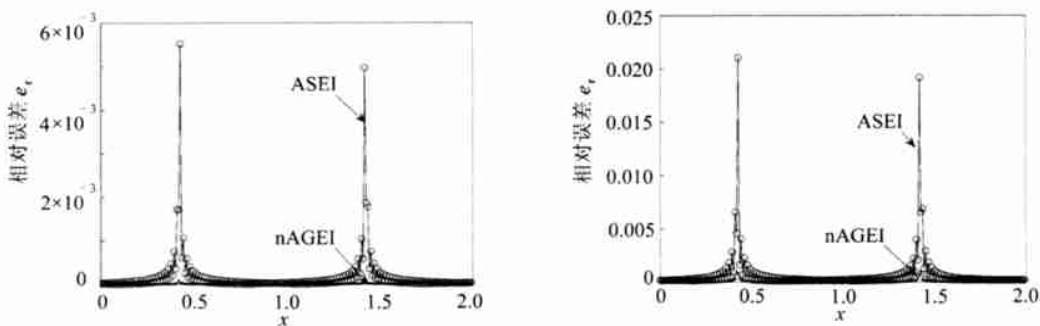


图 3 λ 取不同值时的绝对误差的比较 ($\lambda = \tau/h^3$)

4 结 论

本文在交替分组思想的基础上, 结合四阶(关于空间方向)精度的显、隐格式(4)和(5)构造了一组具有高阶精度的非对称 Saul'yev 型差分格式(6)~(11), 并设计出了一类在空间上具有





$$(c) J = 240, \lambda = \tau/h^3 = 1,$$

$$T = 0.008, n = 13\ 824$$

$$(d) J = 240, \lambda = \tau/h^3 = 4,$$

$$T = 0.008, n = 3\ 456$$

图 4 λ 取不同值时的绝对误差的比较 ($\lambda = \tau/h^3$)

四阶收敛速度的交替分组新算法. 数值试验表明, 该方法是一个有效的提高数值解精度的无条件稳定且可本质并行的算法, 这一设计思想对于进一步深入研究交替分组算法是十分有益的.

[参 考 文 献]

- [1] QIN Meng-zhao. Difference schemes for the dispersive equation[J]. Computing, 1983, **31**(3): 261-267.
- [2] 林鹏程. 色散方程 $u_t = au_{xxx}$ 的一类具有高稳定性三层格式[J]. 应用数学和力学, 1988, **9**(9): 803-808.
- [3] 黎益. 色散方程的四点显式差分格式[J]. 应用数学和力学, 1993, **14**(3): 219-223.
- [4] Wazwaz A M. An analytic study on the third-order dispersive partial differential equation[J]. Appl Math Comput, 2003, **142**(2/3): 511-520.
- [5] ZHU Shao-hong, YUAN Guang-wei, SHEN Long-jun. Alternating group explicit method for the dispersive equation[J]. Intern J Comp Math, 2000, **75**(1): 97-105.
- [6] ZHU Shao-hong, Zhao J. The alternating segment explicit-implicit method for the dispersive equation[J]. Applied Mathematics Letters, 2001, **14**(6): 657-662.
- [7] 王文洽. 色散方程的一类新的并行交替分段隐格式[J]. 计算数学, 2005, **27**(2): 129-140.
- [8] Dawson C N, DU Qiang, Dupont T F. A finite difference domain decomposition algorithm for numerical solution of the Heat equation[J]. Mathematical Computation, 1991, **57**(195): 63-71.
- [9] YUAN Guang-wei, ZHU Shao-hong, SHEN Long-jun. Domain decomposition algorithm based on the group explicit formula for the heat equation[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2005, **82**(10): 1295-1306.
- [10] Evans D J, Abdullah A R B. Group explicit methods for parabolic equations[J]. Intern J Computer Math, 1983, **14**(1): 73-105.
- [11] Evans D J, Abdullah A R B. A new explicit method for the diffusion-convection equation[J]. Comp Math Appl, 1985, **11**(1/3): 145-154.
- [12] ZHANG Bao-lin. Alternating segment explicit-implicit method for diffusion equation[J]. J Numer Meth Compt Appl, 1991, **12**(4): 245-251.
- [13] ZHANG Bao-lin, Li W. On alternating segment Crank-Nicolson scheme[J]. Parallel Computing, 1994, **20**(8): 897-902.
- [14] LU Jin-fu, ZHANG Bao-lin, ZUO Feng-li. Modified AGE methods for the convection-diffusion e-

- quation[J]. Communications in Numerical Methods in Engineering, 1998, **14**(1): 65– 75.
- [15] 曲富丽, 王文洽. 三阶非线性 KdV 方程的交替分段显– 隐差分格式[J]. 应用数学和力学, 2007, **28**(7): 869– 876.
- [16] Kellogg R B. An alternating direction method for operator equations[J]. SIAM J Soc Indust Appl Math, 1964, **12**(4): 848– 854.

A New Alternating Group Explicit– Implicit Algorithm With Highly Accuracy for the Dispersive Equation

ZHANG Qing– jie, WANG Wen– qia

(School of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, P. R. China)

Abstract: A new alternating group explicit– implicit scheme (nAGEI) for the dispersive equation with a periodic boundary condition is derived. This new unconditionally stable scheme has the fourth– order truncation error in space and quicker ratio of convergence than some known alternating group methods (eg. ASEI and AGE). A comparison of the accuracy of this method with some prior ASEI and AGE methods is showed in the numerical experiment.

Key words: dispersive equation; finite difference; alternating group explicit – implicit method (nAGEI); high accuracy; unconditional stability; parallel computation