

非对称 II 型裂纹表面受运动载荷的 动态扩展问题*

吕念春^{1,3}, 程云虹², 李新刚³, 程 靳³

(1. 沈阳理工大学 材料科学与工程学院, 沈阳 110168;

2. 东北大学 土木工程系, 沈阳 110006;

3. 哈尔滨工业大学 航天工程与力学系, 哈尔滨 150001)

(王银邦推荐)

摘要: 通过复变函数论的方法, 对非对称 II 型裂纹表面受运动载荷的动态扩展问题进行了研究. 采用自相似函数的方法可以获得解析解的一般表达式. 应用该法可以迅速地将所讨论的问题转化为 Riemann-Hilbert 问题, 并求得了非对称扩展裂纹表面分别受到常数运动载荷、阶跃运动载荷作用下的应力、位移和动态应力强度因子解析解. 利用这些解并采用叠加原理, 就可以求得任意复杂问题的解.

关键词: 复变函数; 非对称 III 型裂纹; 动态扩展; 自相似函数; 解析解

中图分类号: O346.1 **文献标识码:** A

引 言

近几十年来, 对 III 型裂纹的静力学问题已有许多人进行了研究^[1-4]. 由于数学上的困难, 人们对动力学问题的研究还远远不够深入^[5-10]. 一些研究者对边缘裂纹和非均匀扩展裂纹进行了研究, 但是大多仅获得了数值解^[11-16], 获得解析解的确很少^[17-19], 因此有必要对非对称 III 型裂纹动态扩展的问题进行研究. 本文对非对称 II 型裂纹在常数运动载荷、阶跃运动载荷作用下的动力学问题进行求解, 利用复变函数论的方法给出解的一般表示. 应用该法可以很容易地将所研究的问题转化为 Riemann-Hilbert 问题, 而后一问题容易用通常的 Muskhelishvili^[20-21]方法进行求解.

1 正交各向异性体弹性动力学反平面问题的相关方程

对于正交异性体, 我们选择直角坐标轴和物体的弹性对称轴相一致, 所考虑的问题被限制在反平面上, 则正交异性体的反平面运动方程为

$$C_{55}\partial^2 w/\partial x^2 + C_{44}\partial^2 w/\partial y^2 = \rho\partial^2 w/\partial t^2, \quad (1)$$

* 收稿日期: 2008-05-15; 修订日期: 2008-09-16

基金项目: 中国博士后基金资助项目(2005038199); 黑龙江省自然科学基金重点资助项目(ZJG04 08)

作者简介: 吕念春(1965—), 男, 辽宁朝阳人, 副教授, 博士(联系人. Tel: + 86 451 86414970; E-mail: lnc_65@ 163. com).

式中, C_{44}, C_{55} 为弹性常数, ρ 为材料密度, w 为沿 z 方向的位移^[7, 17-19, 22]. 采用 Atkinson 变换^[22-23] 方法, 令

$$\xi = x - \eta + Ty, \tag{2}$$

这里 η 为复变量, T 为 η 的函数.

现构造运动方程的解如下:

$$w = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi) d\eta \tag{3}$$

式中的积分是在 η 的实轴上进行的. 将式(3)代入式(1)后可知, 只要满足关系式

$$C_{55} + C_{44}T^2 - \rho\eta^2 = 0, \tag{4}$$

则运动方程(1)将成为恒等式, 因此 $\phi(\xi)$ 是由边界条件所确定的任意函数.

而式(4)有 2 个根, 我们仅取虚部为正的根, 而后可得

$$T(\eta) = i \sqrt{(C_{55} - \rho\eta^2)/C_{44}}. \tag{5}$$

因此, 在 $y = 0$ 上可得到如下一般性结论^[7, 17-19, 22]:

当 Lw 是齐次函数时, 我们令

$$w^0 = Lw, \tau_{xz}^0 = L\tau_{xz}, \tau_{yz}^0 = L\tau_{yz}. \tag{6}$$

当 $L\tau_{xz}, L\tau_{yz}$ 是齐次函数时, 我们令

$$w^0 = \frac{\partial}{\partial t} Lw, \tau_{xz}^0 = \frac{\partial}{\partial t} L\tau_{xz}, \tau_{yz}^0 = \frac{\partial}{\partial t} L\tau_{yz}, \tag{7}$$

式中, $L = \partial^{m+n} / (\partial x^m \partial t^n)$, 其反演为 $L^{-1} = \partial^{-m-n} / (\partial x^{-m} \partial t^{-n})$, 这里的 $+m+n, -m-n$ 和 0 分别表示 $(m+n)$ 阶导数、 $(m+n)$ 阶积分和函数本身. 称此 m, n 为自相似指数, 它们均表示整数^[1, 3, 22]. 则总有^[7, 17-19, 22]

$$\tau_{yz}^0 = \frac{1}{t} \operatorname{Re} F(\tau), \tau_{xz}^0 = \frac{C_{55}}{C_{44}t} \operatorname{Re} \left[\frac{F(\tau)}{T(\tau)} \right], \frac{\partial w^0}{\partial \tau} = \frac{1}{C_{44}} \operatorname{Re} \left[\frac{F(\tau)}{T(\tau)} \right], \tag{8}$$

式中, $\tau = x/t$. 这样就可以将所讨论的问题转化为零次齐次函数, 即自相似函数.

若令 $f(\tau) = F(\tau)/T(\tau)$, 则式(8)变为^[17-19, 22]

$$\tau_{yz}^0 = \frac{1}{t} \operatorname{Re} [f(\tau) T(\tau)], \tau_{xz}^0 = \frac{C_{55}}{C_{44}t} \operatorname{Re} f(\tau), \frac{\partial w^0}{\partial \tau} = \frac{1}{C_{44}} \operatorname{Re} f(\tau). \tag{9}$$

2 非对称 II 型裂纹动态扩展的说明

设在 $t = 0$ 时刻, 在无限远处受到大小为 P 的载荷作用, 开始出现一无限小的微观裂纹,

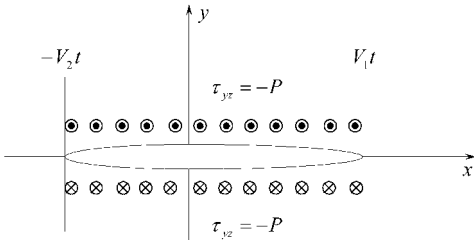


图 1 反平面问题的非对称裂纹动态模型示意图

并以常速 V_1, V_2 (小于声速) 分别沿 x 轴正、负方向不对称扩展, 且 $V_1 > V_2 > 0$, 关于反平面问题的非对称 II 型裂纹动态模型见图 1. 对于 x 轴此模型有几何和力学的对称性. 关于 y 轴则没有, 因为裂纹是非对称扩展的. 在 $y = 0, -V_2t < x < V_1t$ 是基体中裂纹的位置; 且在这个区间上作用闭合力 P , 其大小为未知, 待定. 该力代表裂纹尖端后部区所受切应力 τ . 因为当裂纹高速扩展时, 它的尺寸必然与变量 x, t 有关, 则裂纹面所受的载荷也一定与变量 x, t 有关.

3 裂纹不对称扩展问题解的基本形式

假设在 $t = 0$ 时刻, 正交各向异性体上开始出现一微观穿透裂纹, 我们选择直角坐标轴和物体的弹性坐标轴一致, 所考虑的问题都被限制在 $x-y$ 平面上, 裂纹以常速 V_1 、 V_2 分别沿 x 轴正、负方向不对称扩展, 且 $V_1 > V_2 > 0$, 则所考虑问题将转化为以下边界条件问题:

$$\begin{cases} \tau_x(x, 0, t) = f_1(x, t), & -V_2t < x < V_1t, \\ w(x, 0, t) = 0, & x < -V_2t \text{ 或 } x > V_1t. \end{cases} \quad (10)$$

引入 $\tau = x/t$, 利用式(9)和广义函数论^[24-25]中的 $t\delta(x) = \delta(x/t)$, 可以把以上边界条件变化为以下边值问题:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[f(\tau)T(\tau)] = f_2[\tau, \delta(\tau)], & -V_2 < \tau < V_1, \\ \operatorname{Re}f(\tau) = 0, & \tau < -V_2 \text{ 或 } \tau > V_1. \end{cases} \quad (11)$$

则利用式(9)和以上条件, 可确定单一未知函数 $f(\tau)$ 的形式:

$$f(\tau) = f_3[\tau, \xi(\tau)]. \quad (12)$$

进而可以把所研究问题归结为 Keldysh-Sedov 问题:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\xi(\tau) = 0, & \tau < -V_2 \text{ 或 } \tau > V_1, \\ \operatorname{Im}\xi(\tau) = 0, & -V_2 < \tau < V_1. \end{cases} \quad (13)$$

综合考虑不对称性、无穷远条件以及裂纹尖端的奇异性^[26-28], 可得以上问题解的形式:

$$\xi(\tau) = Q[(V_1 - \tau), (V_2 + \tau)]. \quad (14)$$

而后利用式(9)、(5)后, 就可以很容易地推导出裂纹不对称扩展问题的应力、位移和应力强度因子的表达式.

4 具体问题的解

为了更好的解决正交各向异性体的断裂动力学问题, 对受集中载荷作用下的 II 型运动裂纹进行求解, 并根据广义函数原理, 利用自相似函数方法将不同边界条件问题转化为 Keldysh-Sedov 混合边值问题, 从而获得了相应问题的解.

1) 设在 $t = 0$ 时刻, 坐标原点处开始出现一微观裂纹, 并以常速 V_1 、 V_2 分别沿 x 轴正、负方向不对称扩展, 且 $V_1 > V_2 > 0$, 同时裂纹表面受到常数集中力 P 的作用, 并假定此力以速度 $\alpha < V_1$ 沿 x 轴运动. 在 $y = 0$ 的半平面上, 问题的边界条件可以表示为

$$\begin{cases} \tau_x(x, 0, t) = -P\delta(x - \alpha), & -V_2t < x < V_1t, \\ w(x, 0, t) = 0, & x < -V_2t \text{ 或 } x > V_1t. \end{cases} \quad (15)$$

显然, 此问题为位移齐次, 这里的 $L = 1$, 利用 $\tau = x/t$ 及广义函数论^[24-25], 根据式(9)、(6)可将边界条件(15)的第 1 式写为

$$\operatorname{Re}[T(\tau)f(\tau)] = -Pt\delta(x - \alpha) = -P\delta(\tau - \alpha), \quad -V_2 < \tau < V_1, \quad (16)$$

则由上式可推知 $f(\tau)$ 的解必为如下形式:

$$f(\tau) = \xi(\tau)/(\tau - \alpha). \quad (17)$$

式中, $\xi(\tau)$ 在区间 $-V_2 < \tau < V_1$ 中无奇点, 又由于 $T(\tau)$ 在亚音速内为纯虚量, 因此 $\xi(\tau)$ 在区间 $-V_2 < \tau < V_1$ 上一定为纯实量. 这样, 问题(16)导致

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\xi(\tau) = 0, & \tau < -V_2 \text{ 或 } \tau > V_1, \\ \operatorname{Im}\xi(\tau) = 0, & -V_2 < \tau < V_1. \end{cases} \quad (18)$$

考虑到不对称性、无穷远条件以及裂纹尖端的奇异性^[26-28], 可得 Keldysh-Sedov 问题(17)的唯一解为

$$\xi(\tau) = \frac{A}{\sqrt{(V_1 - \tau)(V_2 + \tau)}}, \quad (19)$$

这里 A 为待定实常数.

将式(19)代入式(17)得

$$f(\tau) = \frac{A}{(\tau - \alpha) \sqrt{(V_1 - \tau)(V_2 + \tau)}}, \quad (20)$$

而后把式(20)代入式(16)、(5)中, 当 $\tau \rightarrow \alpha$ 时即可确定实常数 A 为

$$A = \frac{P/(V_1 - \alpha)(V_2 + \alpha)]^{1/2}}{\pi \sqrt{(C_{55} - \rho\alpha^2)/C_{44}}}. \quad (21)$$

然后把式(20)、(5)代入式(6)、(9)后, 即可得 $y = 0$ 上的应力 τ_x 、位移 w 、动态应力强度因子 $K_3(t)$ 分别为

$$\begin{aligned} \tau_x &= \tau_x^0 = \frac{1}{t} \operatorname{Re} [f(\tau) T(\tau)] = \frac{1}{t} \operatorname{Re} \frac{A \cdot T(\tau)}{(\tau - \alpha) \sqrt{(\tau - V_1)(\tau + V_2)}} = \\ &= \frac{A \sqrt{(C_{55} - \rho\tau^2)/C_{44}}}{(\tau - \alpha) \sqrt{(x - V_1 t)(x + V_2 t)}}, \quad x < -V_2 t \text{ 或 } x > V_1 t, \quad (22) \\ w &= w^0 = \frac{1}{C_{44}} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{x/t} f(\tau) d\tau = \frac{1}{C_{44}} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{x/t} \frac{A}{(\tau - \alpha) \sqrt{(V_1 - \tau)(V_2 + \tau)}} d\tau = \\ &= \frac{A}{C_{44} \sqrt{a_1}} \operatorname{Re} \ln \left[\frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{(V_1 - \tau)(V_2 + \tau)}}{\tau - \alpha} + \frac{b_1}{2\sqrt{a_1}} \right] \Big|_{-\infty}^{x/t} = \\ &= \frac{A}{C_{44} \sqrt{a_1}} \ln \left| \frac{t \sqrt{a_1} - \sqrt{(V_1 t - x)(V_2 t + x)}}{x - \alpha t} + \frac{b_1}{2\sqrt{a_1}} \right|, \quad -V_2 t < x < V_1 t, \quad (23) \end{aligned}$$

式中, $a_1 = V_1 V_2 + (V_1 - V_2)\alpha - \alpha^2$, $b_1 = V_1 - V_2 - 2\alpha$. 它是利用文献[29]中的公式得出的.

$$\begin{aligned} K_3^{(1)}(t) &= \lim_{x \rightarrow V_1 t} \sqrt{2\pi(x - V_1 t)} \left[\frac{1}{t} \frac{A \sqrt{(C_{55} - \rho\tau^2)/C_{44}}}{(\tau - \alpha) \sqrt{(\tau - V_1)(\tau + V_2)}} \right] = \\ &= \frac{A \sqrt{2\pi} \sqrt{(C_{55} - \rho V_1^2)/C_{44}}}{(V_1 - \alpha) \sqrt{(V_1 + V_2)t}}, \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_3^{(2)}(t) &= \lim_{x \rightarrow V_2 t} \sqrt{-2\pi(x + V_2 t)} \left[\frac{1}{t} \frac{A \sqrt{(C_{55} - \rho\tau^2)/C_{44}}}{(\tau - \alpha) \sqrt{(\tau - V_1)(\tau + V_2)}} \right] = \\ &= \frac{A \sqrt{2\pi} \sqrt{(C_{55} - \rho V_2^2)/C_{44}}}{(V_2 + \alpha) \sqrt{(V_1 + V_2)t}}, \quad (25) \end{aligned}$$

式中的上角标(1)、(2)分别表示 $x \rightarrow V_1 t$ 、 $x \rightarrow V_2 t$ 时的值.

2) 假设施加在裂纹面上 $x = \alpha t$ 点上为一阶跃载荷, 而 α 是载荷的运动速度, 且 $\alpha < V_1$; 其它条件与上列完全相同, 则问题的边界条件:

$$\begin{cases} \tau_x = -PH(x - \alpha), & -V_2 t < x < V_1 t, \\ w(x, 0, t) = 0, & x < -V_2 t \text{ 或 } x > V_1 t. \end{cases} \quad (26)$$

这里的 $H(x)$ 是 Heavyside 函数, 且有 $H'(x) = \delta(x)$.

显然, 本问题应力为齐次, 这里的 $L = 1$, 根据式(7)、(9)及广义函数论^[24-25]可将边界条件(26)的第 1 式写为

$$\operatorname{Re} [T(\tau) f(\tau)] = -P t H'(x - \alpha) = P \alpha \delta(\tau - \alpha), \quad -V_2 < \tau < V_1. \quad (27)$$

则由上式可推知 $f(\tau)$ 的解必为如下形式:

$$f(\tau) = \xi(\tau) / (\tau - \alpha), \quad (28)$$

式中, $\xi(\tau)$ 在区间 $-V_2 < \tau < V_1$ 中无奇点, 又由于 $T(\tau)$ 在亚音速内为纯虚量, 因此 $\xi(\tau)$ 在区间 $-V_2 < \tau < V_1$ 上一定为纯实量. 这样, 问题(27)导致

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \xi(\tau) = 0, & \tau < -V_2 \text{ 或 } \tau > V_1, \\ \operatorname{Im} \xi(\tau) = 0, & -V_2 < \tau < V_1. \end{cases} \quad (29)$$

考虑到不对称性、无穷远条件以及裂纹尖端的奇异性^[26-28], 可得 Keldysh-Sedov 问题(29)的唯一解的形式:

$$\xi(\tau) = \frac{A}{[(V_1 - \tau)(V_2 + \tau)]^{3/2}}, \quad (30)$$

这里, A 为待定实常数.

将式(30)代入式(28)得

$$f(\tau) = \frac{A}{(\tau - \alpha)[(V_1 - \tau)(V_2 + \tau)]^{3/2}}. \quad (31)$$

然后将式(31)代入式(28)、(5), 当 $\tau \rightarrow \alpha$ 时, 即可确定实常数 A 为

$$A = \frac{P \alpha [(V_1 - \alpha)(V_2 + \alpha)]^{3/2}}{\pi \sqrt{(C_{55} - \rho \alpha^2) / C_{44}}}. \quad (32)$$

在各向同性体中, 弹性波的扰动范围可以用半径为 $c_1 t$ 、 $c_2 t$ 的圆形区域来表示, 这里 c_1 、 c_2 分别是弹性体的纵、横波的波速 ($c_1 > c_2$). 而在各向异性体中, 扰动的范围不在是圆形区域, 不会超过弹性体的门槛值 $C_d = \sqrt{C_{55} / \rho}$, 这里 C_{55} 为材料的弹性常数. 当 $|x| > C_d t$ 时, $\operatorname{Im} [T(\tau)] = 0$, 因而应力、位移皆为 0, 与初始条件相一致; 这说明 $y = 0$ 时, 弹性波的扰动不会超过 $C_d t$.

然后将式(31)代入式(7)、(9)后, 即可得 $y = 0$ 上的应力 τ_z 、动态应力强度因子 $K_3(t)$ 分别为

$$\begin{aligned} \tau_z &= \int_{-\infty}^t \frac{1}{t} \operatorname{Re} \frac{A \sqrt{(C_{55} - \rho \tau^2) / C_{44}}}{(\tau - \alpha)[(V_1 - \tau)(V_2 + \tau)]^{3/2}} dt = \\ &= \operatorname{Re} \int_{C_d}^{x/t} \frac{A \sqrt{(C_{55} - \rho \tau^2) / C_{44}}}{\tau(\tau - \alpha)[(\tau - V_1)(\tau + V_2)]^{3/2}} d\tau, \quad x < -V_2 t \text{ 或 } x > V_1 t, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} K_3^{(1)}(t) &= \lim_{x \rightarrow V_1 t} \sqrt{2\pi(x - V_1 t)} \operatorname{Re} \int_{C_d}^{x/t} \frac{-A \sqrt{(C_{55} - \rho \tau^2) / C_{44}}}{\tau(\tau - \alpha)[(\tau - V_1)(\tau + V_2)]^{3/2}} d\tau = \\ &= 2 \sqrt{2\pi t} \frac{A \sqrt{(C_{55} - \rho V_1^2) / C_{44}}}{V_1(V_1 - \alpha)(V_1 + V_2)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} K_3^{(2)}(t) &= \lim_{x \rightarrow -V_2 t} \sqrt{-2\pi(x + V_2 t)} \operatorname{Re} \int_{C_d}^{x/t} \frac{-A \sqrt{(C_{55} - \rho \tau^2) / C_{44}}}{\tau(\tau - \alpha)[(\tau - V_1)(\tau + V_2)]^{3/2}} d\tau = \\ &= 2 \sqrt{2\pi t} \frac{A \sqrt{(C_{55} - \rho V_2^2) / C_{44}}}{V_2(V_2 + \alpha)(V_1 + V_2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (35)$$

式(34)、(35)的极限属于 $0 \cdot \infty$ 型,必须转化为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型后,方可应用罗比塔(L'Hospital)法则进行求导计算^[30],从而得出上式的极限值.

为了表达方便,我们令

$$X = (V_1 - \tau)(V_2 + \tau) = V_1V_2 + (V_1 - V_2)\tau - \tau^2, \quad (36)$$

上式中的相关常数又可简单地表示^[29]如下为

$$a = V_1V_2, \quad b = V_1 - V_2, \quad c = -1, \quad K = 4ac - b^2 = -(V_1 + V_2)^2.$$

通过将式(31)代入式(9)后对 τ 进行积分,就可求出 w^0 :

$$w^0 = \int f(\tau) d\tau = \frac{1}{C_{44}} \int \frac{A}{(\tau - \alpha)X^{3/2}} d\tau = \frac{A}{C_{44}} \int \frac{d\tau}{(\tau - \alpha)X^{3/2}}. \quad (37)$$

因为式(37)中的分母含有 $(\tau - \alpha)X^{3/2}$ 项,所以无法利用积分公式进行计算,因此必须转化为能进行积分的形式^[29].

利用变量替换: $\tau_1 = \tau - \alpha$,将它代入到式(36)得

$$X = (V_1 - \tau)(V_2 + \tau) = V_1V_2 + (V_1 - V_2)\alpha - \alpha^2 + (V_1 - V_2 - 2\alpha)\tau_1 - \tau_1^2, \quad (38)$$

而式(38)中的相关常数又可表示^[29]如下:

$$a_1 = V_1V_2 + (V_1 - V_2)\alpha - \alpha^2, \quad b_1 = V_1 - V_2 - 2\alpha,$$

$$c = -1, \quad K_1 = 4a_1c - b_1^2 = -(V_1 + V_2)^2 = K.$$

将式(38)代入式(37)后对 τ 进行积分,就可求出 w^0 :

$$\begin{aligned} w^0 &= \frac{A}{C_{44}} \int \frac{d\tau}{(\tau - \alpha)X^{3/2}} = \frac{A}{C_{44}} \int \frac{d\tau_1}{\tau_1 X^{3/2}} = \frac{A}{a_1 C_{44}} \left[\frac{1}{\sqrt{X}} + \int \frac{d\tau_1}{\tau_1 \sqrt{X}} - \frac{b_1}{2} \int \frac{d\tau_1}{X^{3/2}} \right] = \\ &= \frac{A}{a_1 C_{44}} \left[\frac{1}{\sqrt{X}} - \frac{1}{\sqrt{a_1}} \ln \left| \frac{\sqrt{X} + \sqrt{a_1}}{\tau_1} + \frac{b_1}{2\sqrt{a_1}} \right| - \frac{b_1 - 4\tau_1 + 2b_1}{2K\sqrt{X}} \right] = \\ &= \frac{A}{a_1 C_{44}} \left[\frac{K - b_1^2}{K\sqrt{X}} - \frac{1}{\sqrt{a_1}} \ln \left| \frac{\sqrt{X} + \sqrt{a_1}}{\tau_1} + \frac{b_1}{2\sqrt{a_1}} \right| + \frac{2b_1\tau_1}{K\sqrt{X}} \right] = \\ &= \frac{A}{a_1 C_{44}} \left[\frac{K - b_1^2 - 2b_1\alpha}{K\sqrt{X}} - \frac{1}{\sqrt{a_1}} \ln \left| \frac{\sqrt{X} + \sqrt{a_1}}{\tau - \alpha} + \frac{b_1}{2\sqrt{a_1}} \right| + \frac{2b_1\tau}{K\sqrt{X}} \right] + C. \quad (39) \end{aligned}$$

因为裂纹扩展的方向是沿着 x 轴的,所以在对 w^0 进行定积分运算时,取常数 $C = 0$.然后将式(39)代入式(7),得出位移 w :

$$\begin{aligned} w &= \int_0^t \text{Re} w^0 dt = \text{Re} \int_{-\infty}^{x/t} - \frac{x}{\tau^2} w^0 d\tau = \\ &= \frac{Ax}{C_{44}a_1} \text{Re} \int_{-\infty}^{x/t} \frac{1}{\tau^2} \left[\frac{K - b_1^2 - 2b_1\alpha}{K\sqrt{X}} - \frac{1}{\sqrt{a_1}} \ln \left| \frac{\sqrt{X} + \sqrt{a_1}}{\tau - \beta} + \frac{b_1}{2\sqrt{a_1}} \right| + \frac{2b_1\tau}{K\sqrt{X}} \right] d\tau. \quad (40) \end{aligned}$$

上式中的第2项(不含系数项)可表示为

$$\begin{aligned} \int - \frac{1}{\tau^2 \sqrt{a_1}} \ln \left| \frac{\sqrt{X} + \sqrt{a_1}}{\tau - \alpha} + \frac{b_1}{2\sqrt{a_1}} \right| d\tau &= \frac{1}{\sqrt{a_1}} \int \ln \left| \frac{\sqrt{X} + \sqrt{a_1}}{\tau - \alpha} + \frac{b_1}{2\sqrt{a_1}} \right| d \left(\frac{1}{\tau} \right) = \\ &= \frac{1}{\tau \sqrt{a_1}} \ln \left| \frac{\sqrt{X} + \sqrt{a_1}}{\tau - \alpha} + \frac{b_1}{2\sqrt{a_1}} \right| - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{a_1}} \int \frac{1}{\tau} \frac{1}{(\sqrt{X} + \sqrt{a_1})/(\tau - \alpha) + b_1/(2\sqrt{a_1})} \times \\
& \left[\frac{[(b - 2\tau)/(2\sqrt{X})]/(\tau - \alpha) - (\sqrt{X} + \sqrt{a_1})}{(\tau - \alpha)^2} \right] d\tau = \\
& \frac{1}{\tau \sqrt{a_1}} \ln \left| \frac{\sqrt{X} + \sqrt{a_1}}{\tau - \alpha} + \frac{b_1}{2\sqrt{a_1}} \right| - \\
& \frac{1}{\sqrt{a_1}} \int \frac{1}{\tau} \frac{2\sqrt{a_1}(\tau - \alpha)}{2\sqrt{a_1X} + 2a_1 + b_1(\tau - \alpha)} \frac{(b - 2\tau)(\tau - \alpha) - 2X - 2\sqrt{a_1X}}{2\sqrt{X} \cdot (\tau - \alpha)^2} d\tau = \\
& \frac{1}{\tau \sqrt{a_1}} \ln \left| \frac{\sqrt{X} + \sqrt{a_1}}{\tau - \alpha} + \frac{b_1}{2\sqrt{a_1}} \right| + \int \frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{(\tau - \alpha)\sqrt{X}} = \\
& \frac{1}{\tau \sqrt{a_1}} \ln \left| \frac{\sqrt{X} + \sqrt{a_1}}{\tau - \alpha} + \frac{b_1}{2\sqrt{a_1}} \right| - \frac{1}{\alpha} \int \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau - \alpha} \right) \frac{d\tau}{\sqrt{X}} = \\
& \frac{1}{\tau \sqrt{a_1}} \ln \left| \frac{\sqrt{X} + \sqrt{a_1}}{\tau - \alpha} + \frac{b_1}{2\sqrt{a_1}} \right| + \\
& \frac{1}{\alpha \sqrt{a_1}} \ln \left| \frac{\sqrt{X} + \sqrt{a}}{\tau} + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right| - \frac{1}{\alpha \sqrt{a_1}} \ln \left| \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{X}}{\tau - \alpha} + \frac{b_1}{2\sqrt{a_1}} \right|. \quad (41)
\end{aligned}$$

利用积分公式^[29]可得

$$\int \frac{d\tau}{\tau^2 \sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{\alpha \tau} + \frac{b}{2a^{3/2}} \ln \left| \frac{\sqrt{X} + \sqrt{a}}{\tau} + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right|, \quad (42)$$

$$\int \frac{d\tau}{\tau \sqrt{X}} = -\frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{\sqrt{X} + \sqrt{a}}{\tau} + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right|. \quad (43)$$

然后将式(41)、(42)、(43)代入式(40), 得出位移 w :

$$\begin{aligned}
w = & \frac{-Ax}{C_{44a_1}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{K - b_1^2 - 2b_1\alpha}{K} \left[-\frac{\sqrt{X}}{\alpha \tau} + \frac{b}{2a^{3/2}} \ln \left| \frac{\sqrt{X} + \sqrt{a}}{\tau} + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right| \right] - \right. \\
& \frac{2b_1}{K} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{\sqrt{X} + \sqrt{a}}{\tau} + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right| + \frac{1}{\tau \sqrt{a_1}} \ln \left| \frac{\sqrt{X} + \sqrt{a_1}}{\tau - \alpha} + \frac{b_1}{2\sqrt{a_1}} \right| + \\
& \left. \frac{1}{\alpha \sqrt{a_1}} \ln \left| \frac{\sqrt{X} + \sqrt{a}}{\tau} + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right| - \frac{1}{\alpha \sqrt{a_1}} \ln \left| \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{X}}{\tau - \alpha} + \frac{b_1}{2\sqrt{a_1}} \right| \right\} \Bigg|_{\infty}^{x/t} = \\
& \frac{-Ax}{C_{44a_1}} \operatorname{Re} \left\{ -\frac{K - b_1^2 - 2b_1\alpha \sqrt{X}}{K} + \frac{1}{\tau \sqrt{a_1}} \ln \left| \frac{\sqrt{X} + \sqrt{a_1}}{\tau - \alpha} + \frac{b_1}{2\sqrt{a_1}} \right| + \right. \\
& \frac{1}{\sqrt{a}} \left[-\frac{2b_1}{K} + \frac{(K - b_1^2 - 2b_1\alpha)b}{2aK} + \frac{1}{\alpha} \right] \ln \left| \frac{\sqrt{X} + \sqrt{a}}{\tau} + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right| - \\
& \left. \frac{1}{\alpha \sqrt{a_1}} \ln \left| \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{X}}{\tau - \alpha} + \frac{b_1}{2\sqrt{a_1}} \right| \right\} \Bigg|_{\infty}^{x/t} = \\
& \frac{A}{C_{44a_1}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{K - b_1^2 - 2b_1\alpha}{K} \frac{t\sqrt{X}}{a} - \frac{t}{\sqrt{a_1}} \ln \left| \frac{\sqrt{X} + \sqrt{a_1}}{\tau - \alpha} + \frac{b_1}{2\sqrt{a_1}} \right| + \right. \\
& \left. \ln \left| \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{X}}{\tau - \alpha} + \frac{b_1}{2\sqrt{a_1}} \right| \frac{x}{\alpha \sqrt{a_1}} - \right.
\end{aligned}$$

$$x \left. \frac{(K - b_1^2 - 2b_1\alpha) b\alpha - 4ab_1\alpha + 2aK}{2a^3 K \alpha} \ln \left| \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\tau} + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right| \right\} \Bigg|_{-\infty}^{x/t} \quad (44)$$

然后利用式(36)、(38)将 a 、 b 、 K 、 a_1 、 b_1 换做相应的常数后, 我们令

$$E_1 = K - b_1^2 - 2b_1\alpha = K - b_1(b_1 + 2\alpha) = K - bb_1, \quad (45)$$

$$F_1 = (K - b_1^2 - 2b_1\alpha) b\alpha - 4ab_1\alpha + 2aK = (K - b_1b) b\alpha - 4ab_1\alpha + 2aK = K b\alpha - b_1\alpha(b^2 + 4a) + 2aK = K(b\alpha + b_1\alpha + 2a) = K(2b\alpha - 2\alpha^2 + 2a) = 2a_1K. \quad (46)$$

将式(45)、(46)代入式(44)可得出位移 w :

$$w = \frac{A}{C_{44} a_1} \left\{ \frac{E_1}{aK} \sqrt{(V_1 t - x)(V_2 t + x)} - \frac{t}{\sqrt{a_1}} \ln \left| \frac{\sqrt{(V_1 t - x)(V_2 t + x)} + t\sqrt{a_1}}{x - \alpha t} + \frac{b_1}{2\sqrt{a_1}} \right| - \frac{x F_1}{2a^3 K \alpha} \ln \left| \frac{\sqrt{(V_1 t - x)(V_2 t + x)} + t\sqrt{a}}{x} + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right| + \frac{x}{\alpha \sqrt{a_1}} \ln \left| \frac{t\sqrt{a_1} - \sqrt{(V_1 t - x)(V_2 t + x)}}{x - \alpha t} + \frac{b_1}{2\sqrt{a_1}} \right| \right\}, \quad -V_2 t < x < V_1 t. \quad (47)$$

5 动态应力强度因子的变化规律

针对具体问题的实际情况需将解析解转化为数值解, 才能更有效地说明动态应力强度因子的变化规律. 下面我们式(24)、(25)、(34)、(35)中的弹性常数^[31]为例来表示动态应力强度因子与时间的关系, 见图2和图3. 所取参数如下:

$$C_{44} = 8 \text{ GPa}, C_{55} = 16 \text{ GPa}, \rho = 2.7 \times 9.8 \times 10^3 \text{ N/m}^3, \\ V_1 = 300 \text{ m/s}, V_2 = 250 \text{ m/s}, P = 200 \text{ N}, \alpha = 180 \text{ m/s},$$

表 1 动态应力强度因子 $K_3^{(1)}(t)$ 、 $K_3^{(2)}(t)$ 和时间 t 的相关数值

动态应力强度因子	t/ms				
	2	4	6	8	10
$K_3^{(1)}(t) / (\text{N/m}^{3/2})$	9 196.1	6 502.6	5 309.4	4 598.0	4 112.6
$K_3^{(2)}(t) / (\text{N/m}^{3/2})$	8 144.5	5 759.1	4 702.2	4 072.3	3 642.3
动态应力强度因子	t/ms				
	12	14	16	18	20
$K_3^{(1)}(t) / (\text{N/m}^{3/2})$	3 754.3	3 475.8	3 251.3	3 065.4	2 908.1
$K_3^{(2)}(t) / (\text{N/m}^{3/2})$	3 325.0	3 078.3	2 879.5	2 714.8	2 575.5

通过式(24)、(25)数值计算可知, 随着时间的延长动态应力强度因子衰减的趋势逐渐减慢, 以至最后趋近于一常数, 具有明显的奇异性, 见图2; 相关的数值关系见表1. 这一变化趋势与文献[32-33]的结果相类似, 从而说明这一结果的正确性. 对于式(34)、(35)数值计算可知, 随着时间的延长动态应力强度因子从0开始逐渐增加, 但是增加的趋近逐渐缓慢, 甚至可能达到或者超过材料的临界应力强度因子, 从而导致结构的破坏, 见图3. 其变化趋势与文献[34-37]相类似, 因而是正确的; 相关的数值关系见表2.

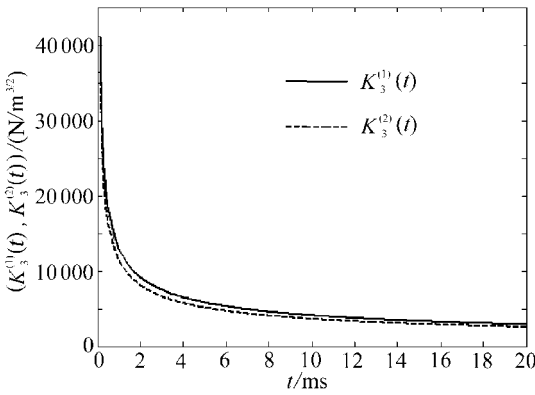


图 2 动态应力强度因子 $K_3^{(1)}(t)$ 、 $K_3^{(2)}(t)$ 和时间 t 的关系

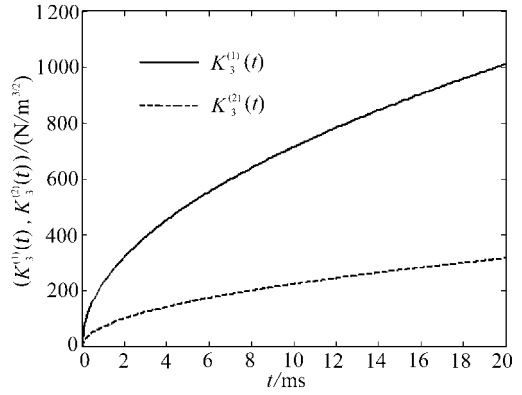


图 3 动态应力强度因子 $K_3^{(1)}(t)$ 、 $K_3^{(2)}(t)$ 和时间 t 的关系

表 2 动态应力强度因子 $K_3^{(1)}(t)$ 、 $K_3^{(2)}(t)$ 和时间 t 的相关数值

动态应力强度因子	t/ms				
	2	4	6	8	10
$K_3^{(1)}(t) / (\text{N}/\text{m}^{3/2})$	319.5	451.9	553.5	639.1	714.5
$K_3^{(2)}(t) / (\text{N}/\text{m}^{3/2})$	99.1903	140.2762	171.8026	198.3806	221.7962
动态应力强度因子	t/ms				
	12	14	16	18	20
$K_3^{(1)}(t) / (\text{N}/\text{m}^{3/2})$	782.7	845.4	903.8	958.6	1010.5
$K_3^{(2)}(t) / (\text{N}/\text{m}^{3/2})$	242.9656	262.4328	280.5525	297.5708	313.6672

6 结 论

利用关系式 $f(x, y, t) = t^n f(x/t, y/t)$ 且 n 为整数, 就可以将所讨论的问题转化为零次齐次函数, 即自相似函数. 凡是满足这个函数关系, 均可通过式(6)、(7)、(9) 以 τ 为变量的齐次函数类型进行求解. 这一方法不仅在弹性动力学中应用^[3,6-8,17-19,22-23], 而且在弹性静力学中也可应用^[20-21,38-39], 甚至其它领域^[39-40].

采用自相似函数的途径能够获得非对称 II 型裂纹表面分别受到常数运动载荷、阶跃运动载荷作用下动态扩展问题的解析解, 这可认为是弹性理论的相似种类的动态问题. 解的方法是以专用的解析函数理论方法为基础, 是简单的和简明的. 通过对一些关于混合边界值问题解的观测, 这已经相当地减少了需要解决这一裂纹扩展问题的计算工作量.

[参 考 文 献]

- [1] Erigen A C, Suhubi E S. Elastodynamics [M]. Vol 2. Linear Theory. New York, San Francisco, London: Academic Press, 1975.
- [2] Sih G C. Mechanics of Fracture [M]. Vol 1. Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems. Leyden: Noordhoff, 1977.
- [3] Cherepanov G P. Mechanics of Brittle Fracture [M]. New York: McGraw Hill International Book Company, 1979, 732-792.
- [4] Erdogan F. Crack Propagation Theories [M]. Fracture II. New York: Academic Press, 1968, 497-509.
- [5] Sih G C. Some elastodynamics problems of cracks [J]. Internat J Fracture, 1968, 1(1): 54-68.

- [6] Kostrov B V. Self similar problems of propagation of shear cracks[J]. *J Appl Math Mech*, 1964, **28**(5): 1077-1087.
- [7] LÜ Nian-chun, CHENG Jin, CHENG Yun-hong. Mode III interface crack propagation in two joined media with weak dissimilarity and strong orthotropy[J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2001, **36**(3): 219-231.
- [8] Broberg K B. The propagation of a brittle crack[J]. *Arch fur Physik*, 1960, **18**(1): 159-192.
- [9] 范天佑. 断裂动力学引论[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1990.
- [10] Rubin-Gonzalez C, Mason J J. Dynamic intensity factors at the tip of a uniformly loaded semi-infinite crack in an orthotropic material[J]. *J Mech Phys Sol*, 2000, **48**(5): 899-925.
- [11] Sih G C, MacDonald B. Fracture of mechanics applied to engineering problems. Strain energy density fracture criterion[J]. *Eng Fracture Mech*, 1974, **6**(2): 361-386.
- [12] Sih G C. Handbook of Stress Intensity Factors[M]. Bethlehem, Pa: Inst Frac Solid Mech, Lehigh University, 1973.
- [13] Sih G C. Mechanics of Fracture Initiation and Propagation[M]. Boston: Kluwer Academic Publisher, 1991.
- [14] Wang Y H, Cheung Y K, Woo C W. Anti-plane shear problem for an edge crack in a finite orthotropic plate[J]. *Eng Fracture Mech*, 1992, **42**(6): 971-976.
- [15] Knauss W K. Dynamic fracture[J]. *Internat J Fracture*, 1987, **25**(1): 35-91.
- [16] Wang Y H. Analysis of an edge-cracked body subjected to a longitudinal shear force[J]. *Eng Fracture Mech*, 1992, **42**(1): 45-50.
- [17] 吕念春, 程靳, 程云虹. III型裂纹面受双重载荷作用下的动态扩展问题[J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2005, **37**(8): 1093-1097.
- [18] 吕念春, 程靳, 程云虹. 反平面动态扩展裂纹问题的研究[J]. *应用力学学报*. 2004, **21**(4): 156-160.
- [19] 吕念春, 程云虹, 田修波, 等. 变载荷作用下III型裂纹扩展的解析解[J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2006, **38**(8): 1310-1313.
- [20] Muskhelishvili N I. Singular Integral Equations[M]. Moscow: Nauka, 1968.
- [21] Muskhelishvili N I. Some Fundamental Problems in the Mathematical Theory of Elasticity[M]. Moscow: Nauka, 1966.
- [22] Atkinson C. On the dynamic stress and displacement field associated with a crack propagating across the interface between two media[J]. *Internat J Engng Sci*, 1975, **13**(5): 491-506.
- [23] Atkinson C. The propagation of a brittle crack in anisotropic material[J]. *Internat J Engng Sci*, 1965, **3**(2): 77-91.
- [24] Hoskins R F. Generalized Functions[M]. New York: Ellis Horwood, 1979, 19-125.
- [25] 王燮山. 奇异函数及其在力学中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1993, 3-45.
- [26] Gakhov F D. Boundary-Value Problems[M]. Moscow: Fizmatgiz, 1963, 10-136.
- [27] Sih G C. Mechanics of Fracture[M]. Vol 4. Elastodynamics Crack Problems. Leyden: Noordhoff, 1977, 213-247.
- [28] Kanwal R P, Sharma D L. Singularity methods for elastostatics[J]. *J Elasticity*, 1976, **6**(4): 405-418.
- [29] 数学手册编写组. 数学手册[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002, 244-300.
- [30] 同济大学数学教研室. 高等数学[M]. 上册. 北京: 高等教育出版社, 1994, 167-172.
- [31] Wu K C. Dynamic crack growth in anisotropic material[J]. *Internat J Fracture*, 2000, **106**(1): 1-12.
- [32] Kalthoff J F, Beinert J, Winkler S. Measurements of dynamic stress intensity factors for fast running

- and arresting cracks in double-cantilever-beam specimens[A] . Vol 627. In: Kanninen Hahn, Ed. Fast Fracture and Arrest [C] . Chicago, IL. Philadelphia Pa: ASTM-STP, 627, 1977, 161-176.
- [33] Kobayashi A S. Dynamic fracture analysis by dynamic finite element method: Generation and prediction analyses[A] . In: Saxena A, Landes J D, Bassani J L, Eds. Nonlinear and Dynamic Fracture Mechanics [C] . Vol 35. New York, NY: Amd, ASME, 1979, 19-36.
- [34] Ravi-Chandar K, Knauss W G. An experimental investigation into dynamic fracture: Pt 1, crack initiation and arrest[J] . Internat J Fracture, 1984, 25(4): 247-262.
- [35] Ravi-Chandar K, Knauss W G. An experimental investigation into dynamic fracture: Pt 2, microstructural aspects[J] . Internat J Fracture, 1984, 26(1): 65-80.
- [36] Ravi-Chandar K, Knauss W G. An experimental investigation into dynamic fracture: Pt 3, On steady-state crack propagation and crack branching[J] . Internat J Fracture, 1984, 26(2): 141-154.
- [37] Ravi-Chandar K, Knauss W G. An experimental investigation into dynamic fracture: Pt 4, on the interaction of stress waves with propagation cracks[J] . Internat J Fracture, 1984, 26(3): 189-200.
- [38] Sneddon N I. Fourier Transform [M] . New York: McGraw-Hill, 1951.
- [39] Muskhelishvili N I. Some Basic Problems From the Mathematical Theory of Elasticity [M] . Groningen Holland: P. Noordhoff, 1953.
- [40] Galin L A. Contact Problems in Elasticity Theory [M] . Moscow: GITTL, 1953.

Dynamic Propagation Problems Concerning the Surfaces of Asymmetrical Mode III Crack Subjected to Moving Loads

LÜ Nian-chun^{1,3}, CHENG Yun-hong², LI Xin-gang³, CHENG Jin³

(1. School of Material Science and Engineering, Shenyang Ligon University, Shenyang 110168, P. R. China;

2. Department of Civil Engineering, Northeastern University, Shenyang 110006, P. R. China;

3. Department of Astronautics and Mechanics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, P. R. China)

Abstract: By the measures of the theory of complex functions, dynamic propagation problems concerning the surfaces of asymmetrical mode III crack subjected to moving loads were investigated. General representations of analytical solutions were obtained by the approaches of self-similar functions. The problems dealt with can be facilely transformed into Riemann-Hilbert problems by this technique, and analytical solutions of the stress, the displacement and dynamic stress intensity factor under the action of constant moving loads and unit-step moving loads situated at the surfaces of asymmetrical extension crack, respectively, are acquired. By application of those solutions gained and superposition principle, the solutions of discretionarily intricate problems can be attained.

Key words: complex functions; asymmetrical mode III crack; dynamic propagation; self-similar function; analytical solutions