文章编号: 1000-0887(2008) 10-1237-12

两个同心旋转圆柱之间的两种流体的交界面几何形状问题*

李开泰, 史 峰

(西安交通大学 理学院, 西安 710049)

(周哲玮推荐)

摘要: 研究两个同心旋转圆柱之间的两种流体的交界面几何形状问题. 利用张量分析工具, 给出了忽略耗散能量影响下交界面几何形状是一种能量泛函的临界点, 其对应的 Euler-Lagrange 方程是 1 个非线性椭圆边值问题. 对于粘性引起的耗散能量不能忽略的情况下, 同样给出了 1 个带有耗散能量的能量泛函, 其临界点是交界面几何形状, 相应的 Euler-Lagrange 方程也是 1 个二阶的非线性椭圆边值问题. 这样, 交界面几何形状问题转化为求解非线性椭圆边值问题.

关 键 词: 两种流体; 交界面; Navier-Stokes 方程; 两个同心旋转圆柱

中图分类号: O357; O176 文献标识码: A

符 号 说 明

(r, θ, z)	圆柱坐标系	i	流体编号, 可取 1 或 2
ω	圆柱旋转角速度	Ω_i	第 i 种流体占用的区域
μ	流体动力粘度	Ω	两种流体所占用的区域
ρ	流体密度	T	交界面的表面张力系数
Σ	两种流体交界面	$[\cdot]$	两种流体在交界面上的跳跃算子
Fr	Froude 常数	$2H, K$	交界面 Σ 的平均曲率和 Gauss 曲率
σ	应力张量	$\langle\cdot\rangle$	区域 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ 上的积分算子
$\varepsilon(\hat{\boldsymbol{u}})$	动能	$\langle\cdot\rangle_\Sigma$	交界面 Σ 上的积分算子
$\mathscr{D}(\hat{\boldsymbol{u}})$	耗散能量	(u_0, p_0)	参考的刚性运动下速度和压力
ϕ	Σ 上的能量泛函	$(a_{\alpha\beta}), (b_{\alpha\beta})$	交界面 Σ 上的第一和第二基本型
$\boldsymbol{P}$	Σ 上的任意点	a, b	$(a_{\alpha\beta})$ 和 $(b_{\alpha\beta})$ 对应的行列式
$(\hat{\boldsymbol{u}}, \hat{p})$	扰动的速度和压力		

引 言

两种流体的流动是非常常见的, 并且有很多技术应用, 而且它可以出现许多单种流体没有

* 收稿日期: 2008-02-01; 修订日期: 2008-08-22
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10571142; 10771167)
作者简介: 李开泰(1937—) , 男, 福建人, 教授(联系人. Tel: + 86-29-82669051;
E-mail: ktli@ mail. xjtu. edu. cn) .

的新现象．因此这种流动是非常重要和有意思的．两种流体的许多流动图像可以用形状和位移的控制来实现．

关于同心和非同心旋转圆柱之间的单种流体的流动已经有了不少的研究，比如文献[1-4]．同时在一般区域上的两种流体的交界面问题也有大量的研究，可见文献[5-22]．其中有一类适应性很广的捕获或跟踪交界面的方法，它们把交界面用某个函数的零水平集来表示，这类方法可以处理很复杂的几何形状，包括含有合并和断裂的情形．基于此思想，我们在本文中研究同心旋转圆柱间的两种流体流动的交界面的几何形状问题．

设有两个半径分别为 R_1 和 R_2 的圆柱，$R_1 < R_2$，R_1 为内圆柱，R_2 为外圆柱，圆柱中间放两种不同性质的流体，密度和粘性系数分别为 (ρ_1, ρ_2)、(μ_1, μ_2)．当静止时，两种流体的交界面半径为 R_0（略去重力），$R_1 \leqslant R_0 \leqslant R_2$．内外圆柱旋转角速度分别为 ω_1 和 ω_2．今后，我们将采用圆柱坐标系 (r, θ, z)．首先考虑刚性运动，且 $\omega_1 = \omega_2$，忽略重力效应．

Joseph[7-9] 提出了位移问题的解可以通过求解流体的耗散能量泛函的极小问题来得到．两种流体的交界面问题，实际上是一个几何形状的极小问题．我们证明了交界面形状函数是势能量泛函的极小值点，另外我们还给出了极值问题的解的存在性以及相应的 Euler-Lagrange 方程．

作为下一步的研究工作，我们将构造求解极小问题的计算方法，验证两个模型在实际问题中的可行性．

1 两种流体的定常刚性旋转

当流体关于某个固定轴稳定地旋转时，流体可以发生刚性的运动．水滴、气泡以及其它不同类型的流体在不同的容器中都可能发生刚性的旋转．刚性运动的不同类型的扰动也是值得研究的很有趣的问题．充满单种流体的容器在关于某个固定轴稳定地旋转时，流体实际上是和容器一起旋转的．但是，对于两种流体的情形，我们有必要确定两种流体以及交界面的位置．

我们考虑特殊的区域

$$\Omega = \left\{ \boldsymbol{x} = (r, \theta, z) \mid R_1 < r < R_2, 0 \leqslant \theta < 2\pi, -\infty < z < +\infty \right\},$$

两个共轴的圆柱半径分别为 R_1 和 R_2，且旋转角速度都为 ω．读者将会发现，这个特殊的条件仅在我们的一部分结果中用到．流体 1 和 2 分别占据区域 Ω_1 和 Ω_2，$\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$．$\Omega_1$ 和 Ω_2 的交界面为 Σ，二者也可能是不交的．Σ 上的跳跃记为 $[\cdot] = (\cdot)_1 - (\cdot)_2$．

在忽略重力的情况下，刚性运动的一个恰当选择为

$$(\boldsymbol{u}_0, p_0) = (\omega r \boldsymbol{e}_\theta, \rho\omega^2 r^2/2 + c), \tag{1}$$

速度在跨越 Σ 时总是是连续的，而切应力为 0．我们说(1)式是一个选择，因为它并不需要满足法向应力条件

$$[p_0] = -2HT, \qquad 在\ \Sigma\ 上, \tag{2}$$

事实上，其为

$$[p_0] = [\rho]\omega^2 R^2/2 + [c], \tag{3}$$

其中，R 是 r 在 Σ 上的值，$2H$ 是 Σ 的平均曲率，即主曲率的和．T 是表面张力系数．

当重力引起的扰动效应很小时，我们可以忽略重力．在运动方程中我们可以用公式 $\phi = p + \rho g r \sin\theta$ 把重力吸收掉．当 ϕ 与 θ 无关时，运动就是一种副运动．当然，这时 p 要依赖 θ，至少出现类似于 $\sin\theta$ 的项．这和法向应力条件

$$-[p]+[\rho]gR\sin\theta+[\sigma_{nn}]+2HT=0$$

是相容的，如果 $[\sigma_{nn}]=0$ 以及

$$\frac{[p_0]}{[\rho gd]}=\frac{\omega^2 d}{2g}=Fr^2\gg 1,\tag{4}$$

其中，Fr 是 Froude 数，$d=R$ 是 $R(\theta,z)=R(z)$ 的均值．当 Froude 数很大时，离心“重力”在陆地的重力中占主导地位．

2 扰动方程

令 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0+\hat{\boldsymbol{u}}$，$p=p_0+\hat{p}$．则扰动的 Navier-Stokes 方程为

$$\rho\left[\frac{\partial\hat{\boldsymbol{u}}}{\partial t}+\hat{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla\boldsymbol{u}_0+\boldsymbol{u}_0\cdot\nabla\hat{\boldsymbol{u}}+\hat{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla\hat{\boldsymbol{u}}\right]=-\nabla\hat{p}+\mathrm{div}\,\hat{\sigma},\tag{5}$$

其中，$\hat{\boldsymbol{u}}$ 是无散度的且在两圆柱侧面上满足无滑移条件．在交界面 Σ 上根据 Laplace 公式，有[11]：

$$[\hat{\boldsymbol{u}}]=0,\ -[\hat{p}]\boldsymbol{n}+[\sigma(\hat{\boldsymbol{u}})]\cdot\boldsymbol{n}=[p_0]\boldsymbol{n}+2HT\boldsymbol{n}.\tag{6}$$

对任意的可积函数 f，如果它在 Ω_1 上等于 f_1，而在 Ω_2 上等于 f_2，以及定义在 Σ 上的函数 g，我们可以定义积分

$$\langle f\rangle=\int_{\Omega_1}f_1\mathrm{d}V+\int_{\Omega_2}f_2\mathrm{d}V,\quad \langle g\rangle_\Sigma=\int_\Sigma g\,\mathrm{d}\Sigma.\tag{7}$$

由于不可压缩流体的总质量是守恒的，可知

$$\langle\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\rangle_\Sigma=0.\tag{8}$$

如果交界面 Σ 由某个函数的零水平集给出，即 $F(\boldsymbol{x}(t),t)=0$，则有

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial F}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla F=0,\tag{9}$$

这里假定了在交界面 Σ 两边粒子速度 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t$ 的法向分量是相同的．事实上，$\boldsymbol{u}$ 在穿越 Σ 时是连续的．当 F 表示为 $F=r-R(\theta,z;t)$ 时，有

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{u}\cdot\frac{\nabla F}{|\nabla F|}=\frac{1}{|\nabla F|}\frac{\partial R}{\partial t}.\tag{10}$$

3 两种流体在刚性运动下的能量等式

对扰动方程(5)两端乘以 $\hat{\boldsymbol{u}}$，并在区域 $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$ 上积分，并利用式(6)乘以 $\hat{\boldsymbol{u}}$ 并在交界面 Σ 上的积分结果，可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varepsilon(\hat{\boldsymbol{u}})+\mathscr{D}(\hat{\boldsymbol{u}})=\varphi,\tag{11}$$

其中

$$\varepsilon(\hat{\boldsymbol{u}})=\frac{1}{2}\langle\rho\hat{\boldsymbol{u}}^2\rangle=\frac{1}{2}\left(\int_{\Omega_1}\rho_1\hat{\boldsymbol{u}}_1^2\mathrm{d}V+\int_{\Omega_2}\rho_2\hat{\boldsymbol{u}}_2^2\mathrm{d}V\right),\tag{12}$$

$$\mathscr{D}(\hat{\boldsymbol{u}})=\langle 2\mu\mathscr{D}(\hat{\boldsymbol{u}}):\mathscr{D}(\hat{\boldsymbol{u}})\rangle=\left(\int_{\Omega_1}+\int_{\Omega_2}\right)2\mu g_{ij}g^{km}\nabla_k\hat{u}^i\nabla_m\hat{u}^j\,\mathrm{d}V,\tag{13}$$

$$\varphi=\langle\hat{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{n}([p_0]+2HT)\rangle_\Sigma,\tag{14}$$

分别为动能、耗散能以及压力和表面张力能．

特别地，我们希望找到 1 个交界面 Σ 上的能量泛函 $\Phi=\Phi(\hat{\boldsymbol{u}})$，使得 $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t=-\langle\hat{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{n}([p_0]+2HT)\rangle_\Sigma$．这样可以将能量方程(11)改写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varepsilon+\Phi)(\hat{\boldsymbol{u}})=-\mathscr{D}(\hat{\boldsymbol{u}}).\tag{15}$$

4 交界面 Σ的几何表示

我们假定两种流体的交界面 Σ 由有限部分组成, 每一部分局部地可以通过一个函数 $r=R(\theta,z)$ 来表示, 其中 R 是一个连续可微函数, 且关于 θ 是周期的. 这些坐标卡在公共的点上也要满足适当的连续性条件.

(r,θ,z) 表示一个圆柱坐标系, z 轴是两个同心圆柱的公共轴. 内圆柱半径为 R_1, 旋转角速度为 ω_1, 外圆柱半径为 R_2, 旋转角速度为 ω_2. 无扰动时的两种流体的交接面(同样是一个圆柱)的半径为 R_0. 我们记位于半径为 $R_0\leqslant r\leqslant R_2$ 内的流体为外部流体, 密度、粘性系数等分别用 ρ_2、ν_2 等来表示, 同时于半径为 $R_1\leqslant r\leqslant R_0$ 内的流体为内部流体, 密度、粘性系数等分别用 ρ_1、ν_1 等来表示.

扰动后的两种流体的交界面 Σ表示为 $F(r,\theta,z;t)=0$. 特殊地, 我们对如下的情形比较感兴趣

$$F(r,\theta,z;t)=r-R(\theta,z;t)=0.\tag{16}$$

进一步地, 如果流动是轴对称的, 则有

$$F(r,\theta,z;t)=r-R(z;t)=0,\tag{17}$$

交界面 Σ 上的任一点 $\boldsymbol{P}$ 表示为

$$\boldsymbol{P}(r,\theta,z,t)=R(\theta,z;t)\cos\theta\,\boldsymbol{i}+R(\theta,z;t)\sin\theta\,\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},\tag{18}$$

其中, $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$ 是直角坐标系. 当 Σ是(θ,z) 的正则函数时, 我们有 $\boldsymbol{P}_\theta$ 和 $\boldsymbol{P}_z$ 在 Σ 上是不共线的, 即 $\boldsymbol{P}_\theta\times\boldsymbol{P}_z\neq 0$. 其中, $\boldsymbol{P}_\theta=\partial\boldsymbol{P}/\partial\theta$, $\boldsymbol{P}_z=\partial\boldsymbol{P}/\partial z$.

在本文中, 我们约定拉丁字母 $(i,j,k,\ldots)$ 取值$(1,2,3)$, 希腊字母$(\alpha,\beta,\ldots)$ 取值$(1,2)$, 并采用 Einstein 求和约定.

我们知道 Σ 上的度量张量可以表示为[1]

$$\begin{cases} a_{11}=\boldsymbol{P}_\theta\cdot\boldsymbol{P}_\theta=R_\theta^2+R^2, & a_{22}=\boldsymbol{P}_z\cdot\boldsymbol{P}_z=1+R_z^2,\\ a_{12}=a_{21}=\boldsymbol{P}_\theta\cdot\boldsymbol{P}_z=R_\theta R_z, & a=\det(a_{\alpha\beta})=R_\theta^2+R^2(1+R_z^2).\end{cases}\tag{19}$$

Σ 上的单位法向向量为 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{P}_\theta\times\boldsymbol{P}_z/\sqrt{a}$. 此外, 第二基本型为

$$b_{\alpha\beta}=-\boldsymbol{n}_\alpha\cdot\boldsymbol{P}_\beta=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P}_{\alpha\beta}=\boldsymbol{P}_{\alpha\beta}\cdot(\boldsymbol{P}_1\times\boldsymbol{P}_2)/\sqrt{a},$$

其中, $(x^1,x^2)=(\theta,z)$, $\boldsymbol{P}_\alpha=\partial_\alpha\boldsymbol{P}=\partial\boldsymbol{P}/\partial x^\alpha$. 注意到 $z''_\theta=z''_{\theta z}=z''_{zz}=0$, 通过基本的运算可以得到

$$b_{11}=\frac{1}{\sqrt{a}}\begin{vmatrix} x''_{\theta\theta} & y''_{\theta\theta} & z''_{\theta\theta}\\ x'_\theta & y'_\theta & 0\\ x'_z & y'_z & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{a}}(R_{\theta\theta}R-2R_\theta^2-R^2),$$

$$b_{12}=b_{21}=\frac{1}{\sqrt{a}}\begin{vmatrix} x''_{\theta z} & y''_{\theta z} & z''_{\theta z}\\ x'_\theta & y'_\theta & 0\\ x'_z & y'_z & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{a}}(RR_{\theta z}-R_\theta R_z),$$

$$b_{22}=\frac{1}{\sqrt{a}}\begin{vmatrix} x''_{zz} & y''_{zz} & z''_{zz}\\ x'_\theta & y'_\theta & 0\\ x'_z & y'_z & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{a}}RR_{zz}.$$

行列式 $\det(b_{\alpha\beta})$、平均曲率 $2H$ 和 Gauss 曲率 K 分别为

$$\begin{cases} b = \det(b_{\alpha\beta}) = (1/a)(RR_{zz}(RR_{\theta\theta} - 2R_\theta^2 - R^2) - (RR_{\theta z} - R_\theta R_z)^2), \\ 2H = a^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta} = (1/a)(a_{22}b_{11} + a_{11}b_{22} - 2a_{12}b_{12}) = \\ \qquad (1/a^{3/2})[(1 + R_z^2)(R_{\theta\theta}R - 2R_\theta^2 - R^2) + (R^2 + R_\theta^2)RR_{zz} - \\ \qquad 2R_\theta R_z(RR_{\theta z} - R_\theta R_z)], \\ K = b/a = (1/a^2)(RR_{zz}(RR_{\theta\theta} - 2R_\theta^2 - R^2) - (RR_{z\theta} - R_z R_\theta)^2). \end{cases} \tag{20}$$

特别地, 如果流动是轴对称的, 有

$$\begin{cases} (a_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 + R_z^2 \end{pmatrix}, \quad a = R^2(1 + R_z^2), \\ (b_{\alpha\beta}) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + R_z^2}}\begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & R_{zz} \end{pmatrix}, \quad b = -\dfrac{RR_{zz}}{1 + R_z^2}, \\ 2H = \dfrac{-1 - R_z^2 + RR_{zz}}{R(1 + R_z^2)^{3/2}}, \quad K = -\dfrac{R_{zz}}{R(1 + R_z^2)^2}. \end{cases} \tag{21}$$

5 交界面上的能量泛函

我们回到能量等式(11), 其包含了动能、耗散能以及压力和表面张力能. 考虑

$$\varphi = \langle \hat{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{n}([p_0] + 2HT) \rangle_\Sigma =: \varphi_1 + \varphi_2,$$

其中

$$\varphi_1 := \langle \hat{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{n}[p_0] \rangle_\Sigma, \quad \varphi_2 := 2\langle \hat{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{n}HT \rangle_\Sigma. \tag{22}$$

定理 1

$$\varphi_1 = \langle \hat{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{n}[p_0] \rangle_\Sigma = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{8}\omega^2[\rho]\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi/\alpha} R^4 \mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\right). \tag{23}$$

$$\varphi_2 = 2\langle \hat{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{n}HT \rangle_\Sigma = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi/\alpha} R^2HT\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z - \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi/\alpha} R^2(\partial_t H + \omega\partial_\theta H)T\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z. \tag{24}$$

证明 由于 $\hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0$, $\langle \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \rangle_\Sigma = \langle \boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{n} \rangle_\Sigma = 0$, 并考虑到(3)式, 可知

$$\varphi_1 = (1/2)[\rho]\omega^2\left(\langle \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}R^2 \rangle_\Sigma - \langle \boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{n}R^2 \rangle_\Sigma\right). \tag{25}$$

首先, 证明

$$\langle \boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{n}R^2 \rangle_\Sigma = 0. \tag{26}$$

事实上, 根据

$$\boldsymbol{u}_0 = \omega R\boldsymbol{e}_\theta = \omega R(-\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j}), \quad \boldsymbol{n} = (1/\sqrt{a})\boldsymbol{P}_\theta \times \boldsymbol{P}_z,$$

有

$$\boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{a}}\begin{vmatrix} -\omega R\sin\theta & \omega R\cos\theta & 0 \\ x'_\theta & y'_\theta & 0 \\ x'_z & y'_z & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{a}}\omega RR_\theta. \tag{27}$$

从而

$$\langle \boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{n}R^2 \rangle_\Sigma = \left\langle \frac{-\omega R^3}{\sqrt{a}} \right\rangle_\Sigma = -\omega\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi/\alpha} \frac{R_\theta R^3}{\sqrt{a}}\sqrt{a}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \\ \frac{\omega}{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\int_0^{2\pi/\alpha} R^4\mathrm{d}z\right)\right)\mathrm{d}\theta = 0.$$

接下来我们断言

$$\langle \boldsymbol{u}\cdot \boldsymbol{n}R^2\rangle_\Sigma = \frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi/\alpha} R^4\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\right). \tag{28}$$

事实上, 根据

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}\cdot \boldsymbol{P}_\theta\times \boldsymbol{P}_z = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}\cdot \boldsymbol{P}_\theta\times \boldsymbol{P}_z \tag{29}$$

和 $\dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} = R_t\cos\theta\boldsymbol{i} + R_t\sin\theta\boldsymbol{j}$,

可知

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{a}}\begin{vmatrix} R_t\cos\theta & R_t\sin\theta & 0\\ x'_\theta & y'_\theta & 0\\ x'_z & y'_z & 1\end{vmatrix} = \frac{R_tR}{\sqrt{a}}. \tag{30}$$

进一步利用关系 $\mathrm{d}\Sigma = \sqrt{a}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$, 即可得到

$$\langle \boldsymbol{u}\cdot \boldsymbol{n}R^2\rangle_\Sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi/\alpha} R_tR^3\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi/\alpha} R^4\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\right).$$

结合(26)、(28)和(25)式便得到(23)式.

最后, 要证明(24)式. 从(27)和(30)式, 并利用分部积分, 立刻有

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi/\alpha}(R_tR + \omega RR_\theta)2HT\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \\ &\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi/\alpha}(\partial_tR^2 + \omega\partial_\theta R^2)HT\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi/\alpha}R^2HT\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z - \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi/\alpha}R^2(\partial_tH + \omega\partial_\theta H)T\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

注 1 特别地, 在流动是定常和轴对称情况下, 我们可知 $\partial_tH = \partial_\theta H = 0$, 从而有

$$\varphi_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi/\alpha}R^2HT\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z.$$

6 不考虑重力时两种流体刚性旋转时交界面的几何形状及能量泛函极小问题

首先容易验证存在光滑函数 ψ_1、ψ_2 使得下式成立:

$$\begin{aligned}R^2H &= \frac{R^2}{a^{3/2}}\left((1+R_z^2)(RR_{\theta\theta} - 2R_\theta^2 - R^2) + R(R^2+R_z^2)R_{zz}\right) = \\ &\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta} + \frac{\partial\psi_2}{\partial z} + \sqrt{a},\end{aligned} \tag{31}$$

其中, a 是由(19)式定义的度量张量行列式, 即:

$$a = R^2 + R_\theta^2 + R^2R_z^2.$$

基于定理 1 和注 1, 并注意到散度形式的积分为 0 的事实, 在流体粘性引起的耗散能忽略的情况下, 我们选择如下的能量泛函:

$$\Phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi/\alpha}\left(T(R^2 + R_\theta^2 + R^2R_z^2)^{1/2} - \frac{1}{8}[\rho]\omega^2R^4\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z. \tag{32}$$

为了得到 Φ 依赖于参数的显示表达, 我们做坐标变换 $z' = \alpha z$, 从而有

$$[0,2\pi]\times[0,2\pi/\alpha] \Rightarrow \Pi_0 = [0,2\pi]\times[0,2\pi],\quad \mathrm{d}z = \alpha^{-1}\mathrm{d}z',\quad R_z = \alpha R_{z'}.$$

为了方便起见, 仍用 z 来表示 z', 因此有

$$\Phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(T(R^2 + R_\theta^2 + \alpha^2 R^2 R_z^2)^{1/2} - \frac{1}{8}[\rho]\omega^2 R^4\right)\alpha^{-1}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z. \tag{33}$$

Σ 的形状函数 $R(\theta, z)$ 是如下的极值问题的解:

$$\begin{cases} \text{求 } R^*(\theta, z) \in V = H^1_{\mathrm{per}}(\Pi_0),\ \text{使得} \\ \Phi(R^*) = \inf\limits_{R(\theta,z)\in V} \Phi(R), \end{cases} \tag{34}$$

其中, $H^1_{\mathrm{per}}(\Pi_0) = \left\{\varphi \mid \varphi \in H^1(\Pi_0),\ \varphi(\theta + 2\pi, z) = \varphi(\theta, z),\ \varphi(\theta, z + 2\pi) = \varphi(\theta, z)\right\}$.

定义

$$(u, v) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u\cdot v\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z,\quad \|u\|^2 = (u, u),\quad d^2 = \|R\|^2. \tag{35}$$

特别地, $\|1\|^2 = 1$. 显然有

$$d^2 = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R^2\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{R}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi^2}\frac{m_1}{\rho_1}, \tag{36}$$

这里用到了 $\mathrm{d}V = r\mathrm{d}r\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta$, m_1/ρ_1 和 m_1 分别为流体 1 的体积和质量. 因此 d 是一个不变量. 在没有扰动的情况下, $R = R_0 = \mathrm{const}$,

$$d_0^2 = d^2 = R_0^2 = \frac{1}{2\pi^2}\frac{m_1}{\rho_1},\quad d = R_0(\text{常数}).$$

若引入无量纲的量

$$\gamma = R/d,\quad \xi = z/d,\quad \Pi_0 = [0, 2\pi]\times[0, 2\pi] \Rightarrow \Pi_1 = [0, 2\pi]\times[0, 2\pi/d], \tag{37}$$

则能量泛函可以表示为

$$\Phi(\gamma) = (Td^2/\alpha)\left(\|(\gamma^2 + \gamma_\theta^2 + \alpha^2\gamma^2\gamma_\xi^2)^{1/4}\|^2 + (J/8)\|\gamma^2\|^2\right), \tag{38}$$

其中

$$J = -[\rho](\omega^2/T)d^3 = \mathrm{const}, \tag{39}$$

另一方面

$$\|\gamma\|^2 = d^{-2}\|R\|^2 = 1. \tag{40}$$

因此有

$$\|\gamma^2 - 1\|^2 = \|\gamma^2\|^2 - 2\|\gamma\|^2 + 1 = \|\gamma^2\|^2 - 1.$$

由于对 $\Phi(\gamma)$ 加上任意常数, 其极值问题的解都不发生改变, 可以把 $\Phi(\gamma)$ 改写为

$$\Phi(\gamma) = (Td^2/\alpha)\left(\|(\gamma^2 + \gamma_\theta^2 + \alpha^2\gamma^2\gamma_\xi^2)^{1/4}\|^2 + (J/8)\|\gamma^2 - 1\|^2\right), \tag{41}$$

从而极值问题(34) 转化为

$$\begin{cases} \text{求 } \gamma^*(\theta, \xi) \in V_0 = \left\{\varphi \mid \varphi \in H^1_{\mathrm{per}}(\Pi_1),\ \|\varphi\| = 1\right\},\ \text{使得} \\ \Phi(\gamma^*) = \inf\limits_{\gamma(\theta,\xi)\in V_0} \Phi(\gamma). \end{cases} \tag{42}$$

众所周知, 上述极值问题实际上是一个等周问题. 如下的定理是关于一般的等周变分问题的重要结果:

定理 2[23] H 是一个 Hilbert 空间, u_0 是 C^1- 泛函 $G_0(u)$ 在约束

$$C = \left\{u \mid G_i(u) = c_i,\ i = 1, 2, \cdots, N\right\}$$

下的一个极值点, 其中 c_i 都是常数. 则存在不全为 0 的数 λ_i 使得

$$\sum_{i=0}^{N}\lambda_i G_i'(u_0) = 0, \tag{43}$$

其中, $G_i'(u)$ 表示 G_i 在 u 处的 Frechet 导数.

特别地有

定理 3[23] 假设 G 是一个从H 到H_1 内的 C^1 映射, 使得对某个 u_0, $G'(u_0)$ 是H 到H_1 的满射. 如果 u_0 是 C^1– 泛函$F(u)$ 在约束集 $M=\{u \mid G(u)=0\}$ 下的极值点, 则存在H_1中的元素 h_1, 使得 u_0 是无约束泛函 $F(u)-(G(u),h_1)$ 的极值点, 即

$$F'(u_0)-(G'(u_0),h_1)=0. \tag{44}$$

我们回到(42) 式. 当约束集是1 个球时, 即

$$\mathscr{S}_\beta=\left\{u \mid u\in V(\Omega_1), N(u):=\|u\|^2=\beta\right\}, \tag{45}$$

问题(42) 的极值点 γ^* 是无约束泛函

$$\Phi(\gamma)+\lambda N(\gamma)=0 \tag{46}$$

的临界点, 即

$$\Phi'(\gamma^*)+\lambda N'(\gamma^*)=0, \tag{47}$$

其中

$$\begin{cases}\Phi(\gamma)=(Td^2/\alpha)\left(\|(\gamma^2+\gamma_\theta^2+\alpha^2\gamma^2\gamma_\xi^2)^{1/4}\|^2+(J/8)\|\gamma^2-1\|^2\right),\\ N(\gamma)=\|\gamma\|^2/2.\end{cases} \tag{48}$$

简单的计算可以得出, 对任意的 $\eta\in V_0(\Omega_1)$ 有

$$\begin{aligned}A(\gamma,\eta)&:=\langle\Phi'(\gamma)+\lambda N'(\gamma),\eta\rangle=\\ &\iint_{\Omega_1}\left(\frac{Td^2}{\alpha}\left(\frac{(1+\alpha^2\gamma_\xi^2)\gamma\eta+\gamma_\theta\eta_\theta+\alpha^2\gamma^2\gamma_\xi\eta_\xi}{\sqrt{\gamma^2+\gamma_\theta^2+\alpha^2\gamma^2\gamma_\xi^2}}+\right.\right.\\ &\left.\left.\frac{J}{2}(\gamma^2-1)\gamma\eta\right)+\lambda\gamma\eta\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\xi=0.\end{aligned} \tag{49}$$

对上式应用Gauss 定理, 我们立即可以得到如下的定理:

定理 4 极值问题(42) 的 Euler-Lagrange 方程为

$$\begin{cases}-\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left(\dfrac{\alpha^2\gamma^2}{\sqrt{\gamma^2+\gamma_\theta^2+\alpha^2\gamma^2\gamma_\xi^2}}\gamma_\xi\right)-\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\gamma^2+\gamma_\theta^2+\alpha^2\gamma^2\gamma_\xi^2}}\gamma_\theta\right)+\\ \qquad\left(\dfrac{1+\alpha^2\gamma_\xi^2}{\sqrt{\gamma^2+\gamma_\theta^2+\alpha^2\gamma^2\gamma_\xi^2}}+\dfrac{J}{2}(\gamma^2-1)+\dfrac{\alpha}{Td^2}\lambda\right)\gamma=0,\\ \gamma(\theta+2\pi,\xi)=\gamma(\theta,\xi),\quad\gamma(\theta,\xi+2\pi/d)=\gamma(\theta,\xi),\quad\|\gamma\|^2=1.\end{cases} \tag{50}$$

下面我们讨论如上的方程(50) 解的存在性[23].

定理 5 假设 $\Phi(\gamma)$ 和 $N(\gamma)$ 都是Hilbert 空间 V 上的C^1– 泛函, 且有如下的性质:

(i) Φ 在 $V\cap\{N(\gamma)=\beta\}$ 上是弱下半连续和强制的;

(ii) $N(\gamma)$ 在弱序列收敛的意义下是连续的, 且 $N'(\gamma)=0$ 当且仅当 $\gamma=0$. 则方程 $\Phi'(\gamma)-\lambda N'(\gamma)=0$ 有一单参数簇的非平凡解$(\gamma_\beta,\lambda_\beta)$, 其中 β 取所有满足$N(\gamma_\beta)=\beta$ 的值, 以及

$$\Phi(\gamma_\beta)=\min_{\gamma\in V\cap N_\beta}\Phi(\gamma), \tag{51}$$

$$\gamma\in N_\beta(\gamma)=\{\gamma \mid N(\gamma)=\beta\}\qquad(\beta\text{ 为水平集}).$$

注 2

$$\lambda_\beta=(\Phi'(\gamma_\beta),N'(\gamma_\beta))/\|N'(\gamma_\beta)\|. \tag{52}$$

7 考虑耗散能量影响下的两种流体交界面问题

由于(32) 式是在忽略流体粘性引起的耗散的情况下给出的, 当耗散影响不可忽略时, 我们

可以用一个新的能量泛函来刻画交界面:

$$
\begin{aligned}
\Phi(R) := & \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi/\alpha}\left(T(R^2+R_\theta^2+R^2R_z^2)^{1/2}-\frac{1}{8}[\rho]\,\omega^2R^4\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z+ \\
& \langle 2\mu\mathscr{D}(\hat{\boldsymbol{u}}):\mathscr{D}(\hat{\boldsymbol{u}})\rangle = \\
& \frac{T^2d^2}{\alpha}\left(\|(\gamma^2+\gamma_\theta^2+\alpha^2\gamma^2\gamma_\xi^2)^{1/4}\|^2+\frac{1}{8}J\|\gamma^2-1\|^2\right)+ \\
& \langle 2\mu\mathscr{D}(\hat{\boldsymbol{u}}):\mathscr{D}(\hat{\boldsymbol{u}})\rangle.
\end{aligned}\tag{53}
$$

此时两种流体交界面问题就是求如下的极小泛函问题:

$$
\begin{cases}
\text{求 } \gamma^* \in V_0(\Pi_1),\ \text{使得} \\
\Phi(\gamma^*) = \inf\limits_{\gamma\in V_0(\Pi_1)}\Phi(\gamma),
\end{cases}\tag{54}
$$

其中

$$
\begin{cases}
\Phi(\gamma) = \phi(\gamma)+\phi_2(\gamma), \\
\phi(\gamma) := \dfrac{Td^2}{\alpha}\left(\|(\gamma^2+\gamma_\theta^2+\alpha^2\gamma^2\gamma_\xi^2)^{1/4}\|^2+\dfrac{J}{8}\|\gamma^2-1\|^2\right), \\
\phi_2(\gamma) := \langle 2\mu\mathscr{D}(\hat{\boldsymbol{u}}):\mathscr{D}(\hat{\boldsymbol{u}})\rangle.
\end{cases}\tag{55}
$$

极值点 γ^* 和 λ 是如下的方程的解:

$$\Phi'(\gamma)+\lambda N'(\gamma) = 0.$$

利用圆柱坐标系下的张量分析理论可知, 耗散能(13) 式可以表示为[1]

$$
\begin{cases}
\langle 2\mu\mathscr{D}[\hat{\boldsymbol{u}}]:\mathscr{D}[\hat{\boldsymbol{u}}]\rangle = \left(\displaystyle\int_{\Omega_1}+\int_{\Omega_2}\right)B(\hat{\boldsymbol{u}},\hat{\boldsymbol{u}})\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z, \\
B(\hat{\boldsymbol{u}},\hat{\boldsymbol{u}}) := 2\mu\left(\dfrac{\partial\hat{u}_r}{\partial r}\dfrac{\partial\hat{u}_r}{\partial r}+\dfrac{\partial\hat{u}_\theta}{\partial r}\dfrac{\partial\hat{u}_\theta}{\partial r}+\dfrac{\partial\hat{u}_z}{\partial r}\dfrac{\partial\hat{u}_z}{\partial r}+\right. \\
\quad r^2\left(\left(\dfrac{\partial\hat{u}_r}{\partial\theta}-\hat{u}_\theta\right)\left(\dfrac{\partial\hat{u}_r}{\partial\theta}-\hat{u}_\theta\right)+\left(\dfrac{\partial\hat{u}_\theta}{\partial\theta}+\hat{u}_r\right)\left(\dfrac{\partial\hat{u}_\theta}{\partial\theta}+\hat{u}_r\right)+\dfrac{\partial\hat{u}_z}{\partial\theta}\dfrac{\partial\hat{u}_z}{\partial\theta}\right)+ \\
\quad \left.\dfrac{\partial\hat{u}_r}{\partial z}\dfrac{\partial\hat{u}_r}{\partial z}+\dfrac{\partial\hat{u}_\theta}{\partial z}\dfrac{\partial\hat{u}_\theta}{\partial z}+\dfrac{\partial\hat{u}_z}{\partial z}\dfrac{\partial\hat{u}_z}{\partial z}\right).
\end{cases}\tag{56}
$$

显然, 在其它参数固定的情况下, $\hat{\boldsymbol{u}}$ 依赖形状函数 γ:

$$
\phi_2(\gamma) = \frac{d^2}{\alpha}\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi/d}\left(\int_{d\gamma_1}^{d\gamma}+\int_{d\gamma}^{d\gamma_2}\right)B(\hat{\boldsymbol{u}},\hat{\boldsymbol{u}})\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\xi\right),\tag{57}
$$

这里用到了(37) 式和 $R_1 = d\gamma_1$, $R_2 = d\gamma_2$, 以及

$$
\begin{aligned}
B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = 2\mu & \left(d^{-2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)+\right. \\
& d^2r^2\left(\left(\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-u_\theta\right)\left(\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-u_\theta\right)+\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+u_r\right)\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+u_r\right)+\frac{\partial u_z}{\partial\theta}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}\right)+ \\
& \left.\alpha^2\left(\frac{\partial u_r}{\partial\xi}\frac{\partial u_r}{\partial\xi}+\frac{\partial u_\theta}{\partial\xi}\frac{\partial u_\theta}{\partial\xi}+\frac{\partial u_z}{\partial\xi}\frac{\partial u_z}{\partial\xi}\right)\right),
\end{aligned}\tag{58}
$$

$$
\begin{cases}
\hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u}-\omega d\gamma\boldsymbol{e}_\theta, \\
\hat{u}_r = u_r,\quad \hat{u}_\theta = u_\theta-\omega d\gamma,\quad \hat{u}_z = \hat{u}_z,
\end{cases}\tag{59}
$$

从而

$$
B(\hat{\boldsymbol{u}},\hat{\boldsymbol{u}}) = 2\mu\left(d^{-2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial u_r}{\partial r}+\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\omega d\right)\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\omega d\right)+\frac{\partial u_z}{\partial r}\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)+\right.
$$

$$
d^2r^2\left(\left(\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-u_\theta\right)\left(\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-u_\theta\right)+\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}-\omega d+u_r\right)\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}-\omega d+u_r\right)+\right.
$$

$$
\left.\left.\frac{\partial u_z}{\partial\theta}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}\right)+\alpha^2\left(\frac{\partial u_r}{\partial\xi}\frac{\partial u_r}{\partial\xi}+\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\xi}-\omega d\gamma\xi\right)\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\xi}-\omega d\gamma\xi\right)+\frac{\partial u_z}{\partial\xi}\frac{\partial u_z}{\partial\xi}\right)\right). \tag{60}
$$

接下来我们讨论 ϕ_2 在 γ 处沿着任一方向 $\eta\in V_0$ 的 Gateaux 导数 $\phi_2'(\gamma)\eta$:

$$
\langle\phi_2'(\gamma),\eta\rangle=\frac{d^2}{\alpha}\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}B(\hat{\boldsymbol{u}}_1,\hat{\boldsymbol{u}}_1)\mid_{r=R}\eta d\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\xi-\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}B(\hat{\boldsymbol{u}}_2,\hat{\boldsymbol{u}}_2)\mid_{r=R}\eta d\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\xi\right)+
$$

$$
\frac{d^2}{\alpha}\left[\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{d\gamma_1}^{d\gamma}+\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{d\gamma}^{d\gamma_2}\right)\left(B(\hat{\boldsymbol{u}},\eta)\frac{\mathrm{D}\hat{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{D}\gamma}+4\mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\xi}-\omega d\gamma\xi\right)\eta_\xi\right)r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\xi\right].
$$

其中, 下标指示是哪一个流体. 令

$$
\boldsymbol{U}(\gamma,\theta,\xi)=\hat{\boldsymbol{u}}(d\gamma,\theta,\xi),\quad \boldsymbol{u}=\frac{\mathrm{D}\hat{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{D}\gamma},\quad [\boldsymbol{U}]=\boldsymbol{U}\mid_{\Sigma^+}-\boldsymbol{U}_{\Sigma^-},
$$

$$
[\boldsymbol{U}]^+=\boldsymbol{U}\mid_{\Sigma^+}+\boldsymbol{U}\mid_{\Sigma^-},\quad [B(\boldsymbol{U},\boldsymbol{U})]=B(\boldsymbol{U},\boldsymbol{U})\mid_{\Sigma^+}-B(\boldsymbol{U},\boldsymbol{U})\mid_{\Sigma^-},
$$

则有

$$
\langle\phi_2'(\gamma),\eta\rangle=\frac{d^2}{\alpha}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi/d}[B(\boldsymbol{U},\boldsymbol{U})]\eta d\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\xi+
$$

$$
\frac{d^2}{\alpha}\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi/d}\int_{d\gamma_1}^{d\gamma}+\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi/d}\int_{d\gamma}^{d\gamma_2}\right)\left(2B(\hat{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{u})\eta+\right.
$$

$$
\left.4\mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\xi}-\alpha^2\omega d\gamma\xi\right)\eta_\xi\right)r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\xi. \tag{61}
$$

进一步, 令

$$
B(\hat{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{u})=B_0(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})+B_1(\gamma,\boldsymbol{u}), \tag{62}
$$

其中

$$
\begin{cases}
B_0(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=2\mu\left(d^{-2}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial r}\dfrac{\partial u_r}{\partial r}+\dfrac{\partial u_\theta}{\partial r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial r}+\dfrac{\partial u_z}{\partial r}\dfrac{\partial u_z}{\partial r}\right)+\right.\\
\quad d^2r^2\left(\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial\theta}-u_\theta\right)\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial\theta}-u_\theta\right)+\left(\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+u_r\right)\left(\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+u_r\right)+\dfrac{\partial u_z}{\partial\theta}\dfrac{\partial u_z}{\partial\theta}\right)+\\
\quad \left.\alpha^2\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial\xi}\dfrac{\partial u_r}{\partial\xi}+\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\xi}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\xi}+\dfrac{\partial u_z}{\partial\xi}\dfrac{\partial u_z}{\partial\xi}\right)\right),\\
B_1(\hat{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{u})=B_1(\gamma,\boldsymbol{u})=-\omega d\left(\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+u_r\right)-\alpha^2\omega d\gamma\xi\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\xi}-\omega d\dfrac{\partial u_\theta}{\partial r}.
\end{cases} \tag{63}
$$

为简单起见, 令

$$
\begin{cases}
B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=\left(\displaystyle\int_{R_1}^{d\gamma}+\int_{d\gamma}^{R_2}\right)\left(B_0(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})+B_1(\gamma,\boldsymbol{u})\right)r\,\mathrm{d}r,\\
\boldsymbol{u}=\left(\displaystyle\int_{R_1}^{d\gamma}+\int_{d\gamma}^{R_2}\right)ur\,\mathrm{d}r,\quad u_\theta=\left(\displaystyle\int_{R_1}^{d\gamma}+\int_{d\gamma}^{R_2}\right)u_\theta r\,\mathrm{d}r.
\end{cases} \tag{64}
$$

综合起来, (61) 式改写为

$$
\langle\phi_2'(\gamma),\eta\rangle=\frac{d^2}{\alpha}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi/d}[B(\boldsymbol{U},\boldsymbol{U})]\eta d\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\xi+
$$

$$
\frac{d^2}{\alpha}\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi/d}\left(2B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})\eta+4\mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\xi}+\alpha^2\frac{R_1^2-R_2^2}{2}\omega d\gamma\xi\right)\eta_\xi\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\xi\right). \tag{65}
$$

类似于(50)式, 我们在下面的定理中给出极值问题(54)相应的 Euler-Lagrange 方程:

定理 6 极值问题(54)的 Euler-Lagrange 方程为

$$
\begin{cases}
-\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left(\dfrac{\alpha^2\gamma^2}{\sqrt{\gamma^2+\gamma_\theta^2+\alpha^2\gamma^2\gamma_\xi^2}}\gamma_\xi\right)-\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\gamma^2+\gamma_\theta^2+\alpha^2\gamma^2\gamma_\xi^2}}\gamma_\theta\right)- \\
\quad\dfrac{4\mu\alpha}{Td^2}\left(\dfrac{\partial^2u_\theta}{\partial\xi^2}+\alpha^2\dfrac{R_1^2-R_2^2}{2}\omega d\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial\xi^2}\right)+ \\
\quad\left(\dfrac{1+\alpha^2\gamma_\xi^2}{\sqrt{\gamma^2+\gamma_\theta^2+\alpha^2\gamma^2\gamma_\xi^2}}+\dfrac{J}{2}(\gamma^2-1)+\dfrac{\alpha}{Td^2}\lambda\right)\gamma+ \\
\quad\dfrac{1}{T}\left([B(\boldsymbol{U},\boldsymbol{U})]^++2[B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})]\right)=0, \\
\gamma(\theta+2\pi,\xi)=\gamma(\theta,\xi),\quad\gamma(\theta,\xi+2\pi/d)=\gamma(\theta,\xi),\quad\|\gamma\|^2=1.
\end{cases}
\tag{66}
$$

注 3

$$
\begin{aligned}
&[B(\boldsymbol{U},\boldsymbol{U})]=A([\boldsymbol{U}],[\boldsymbol{U}]^+)- \\
&\quad\alpha^22\omega d\left(\gamma_\xi\left[\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\xi}\right]+\left[\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right]\right)-2\left[\dfrac{\partial u_r}{\partial\theta}\right][u_\theta]^++2\left[\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right][u_r]^+,
\end{aligned}
\tag{67}
$$

这里我们用到 $[\boldsymbol{U}]=0$ 和

$$
\begin{aligned}
A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}):=2\mu\Bigg[&d^{-2}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial r}\dfrac{\partial v_r}{\partial r}+\dfrac{\partial u_\theta}{\partial r}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial r}+\dfrac{\partial u_z}{\partial r}\dfrac{\partial v_z}{\partial r}\right)+d^2r^2\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial\theta}\dfrac{\partial v_r}{\partial\theta}+\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\dfrac{\partial u_z}{\partial\theta}\dfrac{\partial v_z}{\partial\theta}\right)+ \\
&\alpha^2\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial\xi}\dfrac{\partial v_r}{\partial\xi}+\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\xi}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial\xi}+\dfrac{\partial u_z}{\partial\xi}\dfrac{\partial v_z}{\partial\xi}\right)\Bigg].
\end{aligned}
\tag{68}
$$

致谢 作者在此感谢审稿人,感谢他们对稿件的认真阅读以及帮助改进稿件的宝贵意见.

[参 考 文 献]

[1] 李开泰,黄艾香. 张量分析及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2004.

[2] 王贺元,李开泰. Couette-Taylor 流的谱 Galerkin 逼近[J]. 应用数学和力学, 2004, **25**(10): 1083-1092.

[3] 张引娣,李开泰. 两个非同心旋转圆柱间粘性流动的广义雷诺方程及其本流[J]. 高校应用数学学报 A 辑, 2008, **23**(2): 127-139.

[4] 韩式方. 非牛顿流体非定常旋转流动计算机智能解析理论[J]. 应用数学和力学, 1999, **20**(11): 1149-1160.

[5] 何友声,鲁传敬,陈学农. 二层流体中沿任意路径运动的奇点解析解[J]. 应用数学和力学, 1991, **12**(2): 119-134.

[6] 卢东强,戴世强,张宝善. 一个二流体系中非线性水波的 Hamilton 描述[J]. 应用数学和力学, 1999, **20**(4): 331-336.

[7] Preziosi L, Joseph D D. The run-off condition for coating and rimming flows[J]. J Fluid Mech, 1988, **187**: 99-113.

[8] Joseph D D, Preziosi L. Stability of rigid motions and coating films in bicomponent flows of immiscible liquids[J]. J Fluid Mech, 1987, **185**: 323-351.

[9] Joseph D D, Renardy Y, Renardy M, et al. Stability of rigid motions and rollers in bicomponent flows of immiscible liquids[J]. J Fluid Mech, 1985, **153**: 151-165.

[10] Girault V, L pez H, Maury B. One time-step finite element discretization of the equation of motion of two-fluid flows[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2006, **22**(3): 680-707.

[11] Wu J, Yu S T, Jiang B N. Simulation of two-fluid flows by the least-squares finite element method using a continuum surface tension model[J]. Internat J Numer Methods Fluids, 1998, **42**(4): 583-600.

[12] Cruchaga M, Celentano D, Breitkopf P, et al. A front remeshing technique for a Lagrangian descrip-

tion of moving interfaces in two-fluid flows[J]. Internat J Numer Methods Fluids, 2006, **66**(13): 2035-2063.

[13] Lee S J, Changb K S, Kim S J. Surface tension effect in the two-fluids equation system[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 1998, **41**(18): 2821-2826.

[14] Ohmori K. Numerical solution of two-fluid flows using finite element method[J]. Appl Math Comput, 1998, **92**(2): 125-133.

[15] Smolianski A. Finite-element/level-set/operator-splitting (FELSOS) approach for computing two-fluid unsteady flows with free moving interfaces[J]. Internat J Numer Methods Fluids, 2005, **48**(3): 231-269.

[16] Sousa F S, Mangiavacchi N. A Lagrangian level-set approach for the simulation of incompressible two-fluid flows[J]. Internat J Numer Methods Fluids, 2005, **47**(10/11): 1393-1401.

[17] Li Z R, Jaberi A, Shih T. A hybrid Lagrangian-Eulerian particle-level set method for numerical simulations of two-fluid turbulent flows[J]. Internat J Numer Methods Fluids, 2008, **56**(12): 2271-2300.

[18] Sussman M, Smereka P, Osher S. A level set approach to computing solutions to incompressible two-phase flow[J]. J Comp Phys, 1994, **114**(1): 146-159.

[19] Unverdi S O, Tryggvason G. A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows [J]. J Comp Phys, 1992, **100**(1): 25-37.

[20] Chang Y C, Hou T Y, Merriman B, et al. A level set formulation of Eulerian interface capturing methods for incompressible fluid flows[J]. J Comp Phys, 1996, **124**(2): 449-464.

[21] Galusinski C, Vigneaux P. On stability condition for bifluid flows with surface tension: Application to microfluidics[J]. J Comp Phys, 2008, **227**(12): 6140-6164.

[22] Sousa F S, Mangiavacchi N, Nonato L G, et al. A front-tracking/front-capturing method for the simulation of 3D multi-fluid flows with free surfaces[J]. J Comp Phys, 2004, **198**(2): 469-499.

[23] Berger M S. Nonlinearity and Functional Analysis [M]. Lectures on Nonlinear Problems in Mathematical Analysis. New York, San Francisco, London: Academic Press, 1977.

Geometric Shape of Interface Surface of Bicomponent Flows Between Two Concentric Rotating Cylinders

LI Kai-tai, SHI Feng

(College of Science, Xi′an Jiaotong University, Xi′an 710049, P.R.China)

Abstract: The shape problem of interface surface of bicomponent flows between two concentric rotating cylinders is investigated. By the tool of tensor analysis, this problem can be reduced to an isoperimetric problem of energy functional when neglecting the effects of dissipative energy caused by viscosity. The associated Euler-Lagrangian equation, which is a nonlinear elliptic boundary value problem of second order was derived. Moreover, in the case of considering the effects of dissipative energy, another total energy functional with dissipative energy to characterize the geometric shape of interface surface was proposed, and the corresponding Euler-Lagrangian equation which is also a nonlinear elliptic boundary value problem of second order was obtained. Thus, the problem of geometric shape is transformed into the nonlinear boundary value problem of second order in both cases.

Key words: bicomponent flow; interface surface; Navier-Stokes equation; two concentric rotating cylinders