

(2+ 1)-维广义 Benney-Luke 方程的 精确行波解

李继彬^{1,2}

(1. 浙江师范大学 数学系, 浙江 金华 321004;

2. 昆明理工大学 理学院, 昆明 650093)

(本刊编委李继彬来稿)

摘要: 用平面动力系统方法研究(2+ 1)-维广义 Benney-Luke 方程的精确行波解, 获得了该方程的扭波解, 不可数无穷多光滑周期波解和某些无界行波解的精确的参数表达式, 以及上述解存在的参数条件

关键词: 扭波解; 周期波解; 无界行波解; 非线性波方程; 动力系统方法

中图分类号: O357.1 文献标识码: A

引 言

本文研究以下(2+ 1)-维广义 Benney-Luke 方程:

$$u_t - a u^2 - b u + p u^p (u_x^{p-1} u_{xx} + (u_y)^{p-1} u_{yy}) + 2(u_x)^p u_{xt} + (u_y)^p u_{yt} = 0, \quad (1)$$

其中, a, b 是两个实参数, $p \geq 1$ 是整数. 该方程是浅水波长波各向同性模型(2 维 Benney-Luke 模型)的推广(见文献[1]). 方程(1)的特殊情形是以下(1+ 1)维 Benney-Luke 方程(又称(1+ 1)维 Boussinesq 型方程)[2]:

$$u_t - u_{xx} + a u_{xxx} - b u u_x + u^p u_{xt} + 2 u_x u_{xt} = 0 \quad (2)$$

文献[1]考虑方程(1)沿正 x -轴方向传播的行波解 $(x, y, t) = u(x - ct, y)$, 得到以下的行波方程:

$$(c^2 - 1)u_{xx} + (a - bc^2)u_{xxx} - u_{yy} + (2a - bc^2)u_{xxy} - c[(p+2)u_x^p u_{xx} + pu_x u_y^{p-1} u_{yy} + 2u_y^p u_{xy}] = 0 \quad (3)$$

令 $u(x, y, t) = u(x + y - ct) = u(\xi)$, 其中 $\xi = x + y - ct$, c 表示波速. 本文研究方程(1)的这类行波解. 将 (ξ) 代入方程(1)并注意方程(3)可得

$$(c^2 - 1 - a)u'' + [a - bc^2 + (2a - bc^2)u^2 + a^4]u' - \frac{c(p+2)(1+u^{p+1})}{p+1}u^{p+1} = 0 \quad (4)$$

关于 ξ 积分一次, 取积分常数为 0, 我们得到

收稿日期: 2008-03-12; 修订日期: 2008-09-22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671179, 10772158)

作者简介: 李继彬(1943-), 男, 云南人, 教授, 博士生导师(E-mail: jibinli@gmail.com).

$$(c^2 - 1 - a^2) + [a - bc^2 + (2a - bc^2)^2 + a^4] - \frac{c(p+2)(1+a^{p+1})}{p+1}(c^{p+1}) = 0 \quad (5)$$

令 $() = d/d$, 即 $() = ()d$ 并记

$$A = \frac{1 + a^2 - c^2}{a - bc^2 + (2a - bc^2)^2 + a^4},$$

$$B = \frac{c(1 + a^{p+1})}{(p+1)[a - bc^2 + (2a - bc^2)^2 + a^4]},$$

于是, 由式(5)得

$$\frac{d^2}{d} = A + (p+2)B^{p+1} \quad (6)$$

这个方程等价于系统

$$\frac{d}{d} = y, \quad \frac{dy}{d} = A + (p+2)B^{p+1}, \quad (7)$$

并有以下的首次积分:

$$H(, y) = y^2/2 - A^2/2 - B^{p+2} = h$$

作为特例, 方程(2)的行波系统为(7)中 $p = 1$ 和 $= 0$ 情形

为了对 $p \geq 3$ 情形统一地研究方程(6)的解的动力学行为, 兹作变换 $=^{1/p}$, 可得

$$p + (1-p)()^2 - p^2[A^2 + (p+2)B^3] = 0,$$

该方程等价于系统

$$\frac{d}{d} = y, \quad \frac{dy}{d} = \frac{(p-1)y^2 + p^2[A^2 + (p+2)B^3]}{p} \quad (8)$$

系统(8)是一个奇行波系统^[3], 它的拌随正则系统

$$\frac{d}{d} = py, \quad \frac{dy}{d} = (p-1)y^2 + p^2[A^2 + (p+2)B^3] \quad (9)$$

有和系统(8)相同的不变曲线解, 其中当 0 时, $d = p d$ 系统(8)和(9)有首次积分

$$H_p(, y) = -2(p-1)^{1/p}y^2 + p^{2-2/p}(A + 2B) = h, \quad (10)$$

即

$$y^2 + p^{2-2/p}(A + 2B) - h^{2(p-1)/p} = 0 \quad (10)$$

系统(8)的所有轨道的全局动力学行为和有界轨道的所有精确的参数表示在文献[4]中已讨论过 我们在下节中将直接地应用文献[4]的结果

我们的目标是首先发现系统(7)和(8)的所有有界解 $()$ 的全局动力学行为和有界轨道的所有精确的参数表示, 然后通过积分 $() = ()d$, 我们得到方程(1)的在 (A, B) - 参数平面上不同区域内的行波解的精确的参数表达式

1 系统(7)和(8)的相图

本节考虑当 $p = 1, 2$ 时系统(7) 和当 $p \geq 3$ 时系统(9) 的相平面图 我们总设 $B > 0$, 否则系统(6)化为线性系统

当 $p = 1$ 时, 系统(7) 有两个平衡点 $O(0, 0), E(-A/(3B), 0)$ 对于 Hamilton 量

$$H(, y) = y^2/2 - A^2/2 - B^3 = h,$$

记 $h_0 = H(0, 0) = 0, h_1 = H\left[-\frac{A}{3B}, 0\right] = -\frac{A^3}{54B^2}$

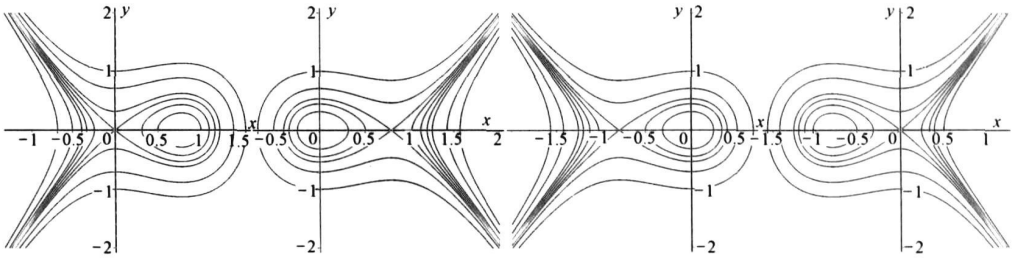
当 $p = 2, AB < 0$ 时, 系统(7) 有 3 个平衡点 $O(0, 0)$ 和 $E(\sqrt{-A/(4B)}, 0)$ 对于 Hamilton 量

$$H(x, y) = y^2/2 - A x^2/2 - B x^4 = h,$$

记 $h_0 = H(0, 0) = 0, h_1 = H\left(\sqrt{\frac{A}{4B}}, 0\right) = \frac{A^2}{16B}$

若 $AB > 0$, 系统(7) 只有一个平衡点 $O(0, 0)$

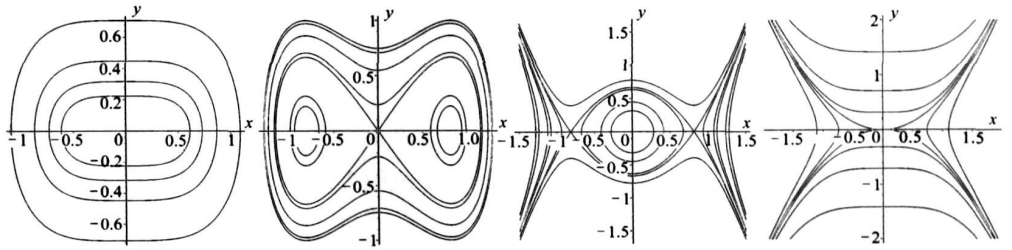
通过定性分析可知, 当 $p = 1, 2$ 时, 随参数 (A, B) 的改变, 系统(7) 有图 1 和图 2 所示的相图



(a) $A > 0, B < 0$ (b) $A < 0, B > 0$ (c) $A < 0, B < 0$ (d) $A > 0, B > 0$

图 1 当 $AB \neq 0$ 和 $p = 1$ 时, 系统(7) 的相图的变化情况

由图 1 可见, 若 $AB \neq 0$, 以下结论成立: 1) 当 $A > 0 (< 0)$ 时, O 是鞍点(中心), E 是中心(鞍点); 2) 系统(7) 有唯一的同宿到鞍点的同宿轨道, 其内部包含中心, 存在包含中心在其内部的一族周期轨道



(a) $A < 0, B < 0$ (b) $A > 0, B < 0$ (c) $A < 0, B > 0$ (d) $A > 0, B > 0$

图 2 当 $AB \neq 0$ 和 $p = 2$ 时, 系统(7) 的相图的变化情况

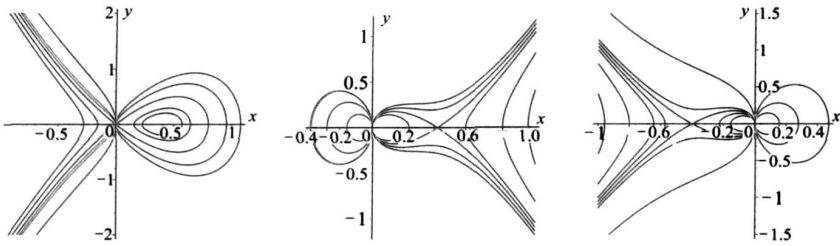
当 $p = 2$ 时, 方程(6) 是熟知的 Duffing 振子^[6] 此时, 系统(7) 的 4 个不同相图如图 2

当 $p = 3, A \neq 0$ 时, 系统(9) 有两个平衡点 $O(0, 0)$ 和 $E(x_1, 0)$, 其中 $x_1 = -A/((p+2)B)$ 应用文献[4] 的结果, 可得随参数组 (A, B) 改变时系统(8) 的相图如图 3

由图 3 可见, 若 $AB \neq 0$, 以下结论成立: 1) 原点 O 是系统(9) 的二阶平衡点; 2) 当 $A > 0 (< 0)$ 时, E 是中心(鞍点); 3) 系统(9) 有无穷多的同宿到原点 O 的同宿轨道^h

当 $p = 4, p$ 是偶数时, 由于 $\dots = 1/p$, 我们只能讨论 $\dots = 0$ 的情况, 即只考虑系统(8) 在右半平面的相图

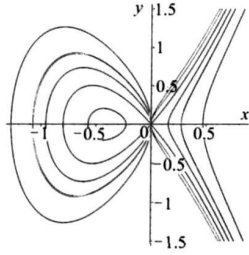
设 $u(x, y, t) = u(x + y - ct) = u(\xi)$ 是方程(5) 在 $(-\infty, \infty)$ 上的一个连续解, 并且 $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} u(\xi) = a, \lim_{\xi \rightarrow \infty} u(\xi) = b$ 于是, 如果 $u(\xi)$ 称 $(x + y - ct)$ 为一个孤立波解, 如果 $a = b; u(\xi)$ 称 $(x + y - ct)$ 为一个扭波解或反扭波解, 如果 $a \neq b$



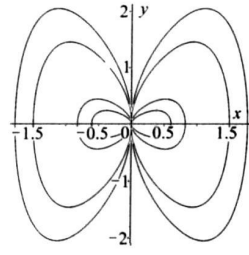
(a) $A > 0, B < 0$

(b) $A < 0, B > 0$

(c) $A < 0, B < 0$



(d) $A > 0, B > 0$



(e) $A = 0, B < 0$

图3 当 $AB \neq 0$ 和 $p = 3$ 时, 系统(8)的相图的变化情况

2 方程(1)的行波解的精确的参数表达式

2.1 $p = 1$ 情形(见图1)

() 当 $A > 0$ 时, 对应于由 $H(x, y) = 0$ 所定义的系统(7)的同宿轨道, 其精确的参数表达式为

$$(\eta) = \left[-\frac{A}{2B} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{A}}{2} \right] \right] \quad (11)$$

() 当 $A < 0$, 对应于由 $H(x, y) = h_1$ 所定义的系统(7)的同宿轨道, 其精确的参数表达式为

$$(\eta) = \frac{|A|}{3B} \left[1 - \frac{3}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{|A|}}{2} \right] \right] \quad (12)$$

因此, 由式(11)和(12)可得方程(1)的以下行波解

$$(\eta) = (\eta) d = \left[-\frac{\sqrt{A}}{B} \tanh \left[\frac{\sqrt{A}}{2} \right] \right], \quad \text{当 } A > 0 \quad (13)$$

和

$$(\eta) = \frac{|A|}{3B} \left[-\frac{3}{\sqrt{|A|}} \tanh \left[\frac{\sqrt{|A|}}{2} \right] \right], \quad \text{当 } A < 0 \quad (14)$$

显然, 式(13)是一个扭波解, 式(14)是一个无界波解

() 当 $A > 0 (< 0), B < 0$ 时, 对应于由 $H(x, y) = h, h = (h_1, 0) (h = (0, h_1))$ 所定义的系统(7)的周期轨道, 其精确的参数表达式为

$$(\eta) = r_1 - (r_1 - r_2) \operatorname{sn}^2 \left[\eta, k_1 \right], \quad (15)$$

其中的参数 (r_1, r_2, r_3) 由 $y^2 = 2h + A x^2 + 2B x^3 = 2|B|(r_1 - x)(x - r_2)(x - r_3)$ 所定义,

$r_1 > r_2 > r_3$, 并且 $k_1^2 = (r_1 - r_2)/(r_1 - r_3), k = \sqrt{3|B|(r_1 - r_3)}/6$

() 当 $A > 0 (< 0), B > 0$ 时, 对应于由 $H(\xi, y) = h, h(\xi, 0) = h(0, h_1)$ 所定义的系统(7)的周期轨道, 其精确的参数表达式为

$$\xi(\eta) = r_3 + (r_2 - r_3)\text{sn}^2(\eta, k_2), \tag{16}$$

其中的参数 (r_1, r_2, r_3) 由 $y^2 = 2h + A\xi^2 + 2B\xi^3 = 2B(r_1 - \xi)(r_2 - \xi)(\xi - r_3)$ 所定义, $r_1 > r_2 > r_3, k_2^2 = (r_2 - r_3)/(r_1 - r_3), k_1 = \sqrt{3B(r_1 - r_3)}/6$

因此, 由式(15)和(16)可得方程(1)的以下行波解(见文献[5]):

$$\xi(\eta) = \xi(\eta) d = \left[r_1 - (r_1 - r_2)\text{sn}^2(\eta, k_1) \right] d = \left[r_1 - \frac{r_1 - r_2}{2} \right] + \left[\frac{r_1 - r_2}{2} \right] E(\arcsin(\text{sn}(\eta, k_1)), k_1) \tag{17}$$

和

$$\xi(\eta) = \xi(\eta) d = \left[r_3 + (r_2 - r_3)\text{sn}^2(\eta, k_2) \right] d = \left[r_3 + \frac{r_2 - r_3}{2} \right] - \left[\frac{r_2 - r_3}{2} \right] E(\arcsin(\text{sn}(\eta, k_2)), k_2), \tag{18}$$

其中, $E(u, k)$ 是第二类不完全椭圆积分

显然, 式(17)和(18)定义了两个无界波解

2.2 $p = 2$ 情形

() $A = 0, B < 0$ (见图2(a)) 先设 $A < 0, B < 0$ 对应于图3(a)中由 $H(\xi, y) = h, h(\xi, 0) = h(0, h_1)$ 即 $y^2 = 2|B| [h/|B| - A^2/(2|B|) - \xi^4] = 2|B| [(r_1^2 + \xi^2)(r_2^2 - \xi^2)]$ 确定的周期轨道族, 其精确的参数表达式为

$$\xi(\eta) = r_2 \text{cn}(\eta, k_1), \tag{19}$$

其中, $r_1 = \sqrt{2|B|(r_1^2 + r_2^2)}, k_1 = r_2/\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ 因此, 方程(1)有以下行波解族:

$$\xi(\eta) = r_2 \text{cn}(\eta, k_1) d = \frac{1}{\sqrt{2|B|}} \arcsin(k_1 \text{sn}(\eta, k_1)) \tag{20}$$

其次设 $A = 0, B < 0$, 此时 $y^2 = 2|B| (\sqrt{h/|B|} - \xi^2)(\xi^2 + \sqrt{h/|B|})$ 于是, () 的参数表达式为

$$\xi(\eta) = \left[\frac{h}{2|B|} \right]^{1/4} \text{cn} \left[(8h|B|)^{1/4} \eta, \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \tag{21}$$

从而可得方程(1)的以下周期行波解

$$\xi(\eta) = \xi(\eta) dN = \frac{1}{2\sqrt{|B|}} \arccos \left[\text{dn} \left[(8h|B|)^{1/4} \eta, \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \right] \tag{22}$$

() $A > 0, B < 0$ (见图2(b)) I 对应于由 $H(\xi, y) = 0$ 所定义的系统(7)的两同宿轨道, 其精确的参数表达式为

$$W(N) = ? \sqrt{\frac{A}{2|B|}} \text{sech} \sqrt{2A|B|} NI \tag{23}$$

对应于由 $H(\xi, y) = h, h(\xi, 0) = h(0, h_1)$, 所定义的系统(7)的两周期轨道, 有 $y^2 = 2|B| [h/|B| - A\xi^2/(2|B|) - \xi^4] = 2|B| [(r_1^2 - \xi^2)(\xi^2 - r_2^2)]$, 其精确的参数表达式为

$$W(N) = ? r_1 \text{dn}(\sqrt{2|B|} r_1 N, k_2), \tag{24}$$

其中 $k_2 = \sqrt{r_1^2 - r_2^2}/r_1$

对应于由 $H(\xi, y) = h, h(\xi, 0) = h(0, h_1)$ 所定义的系统(7)的包围3个平衡点的周期轨道, 其

精确的参数表达式为(19)1

因此,方程(1)的以下的扭波解和反扭波解

$$\langle(N) = ? \sqrt{\frac{A}{2|B|}} Q \operatorname{sech} \sqrt{2A|B|} N \quad N = ? \frac{1}{|B|} \arctan(\exp(\sqrt{2A|B|} N)) \quad (25)$$

和两族周期行波解

$$\begin{aligned} \langle(N) = ? r_1 \int \operatorname{dn}(\sqrt{2|B|} r_1 N, k_2) dN = \\ ? \frac{1}{\sqrt{2|B|}} \arcsin(\operatorname{sn}(\sqrt{2|B|} r_1 N, k_2)) \end{aligned} \quad (26)$$

此外,方程(1)还有一族如式(20)的周期行波解1

() $A < 0, B > 0$ (见图2(c))1 对应于由 $H(W, y) = h_1$ 所定义的系统(7)的两异宿轨道,其精确的参数表达式为

$$W(N) = ? \sqrt{\frac{|A|}{4B}} \tanh \sqrt{2BN} \quad (27)$$

对应于由 $H(W, y) = h, h \in (0, h_1)$ 所定义的系统(7)的包围中心的周期轨道,由

$$y^2 = 2B \left[\frac{h}{B} - \frac{|A|}{2B} W^2 + W^4 \right] = 2B(r_1^2 - W^2)(r_2^2 - W^2),$$

其中 $r_1^2 = \frac{1}{4B}[|A| + \sqrt{A^2 - 16hB}]$, $r_2^2 = \frac{1}{4B}[|A| - \sqrt{A^2 - 16hB}]$,

可得精确的参数表达式为

$$W(N) = r_2 \operatorname{sn} \left[\sqrt{2B} r_1 N, \frac{r_2}{r_1} \right] \quad (28)$$

因此,由式(27)和(28)得方程(1)的以下的无界行波解:

$$\langle(N) = ? \sqrt{\frac{|A|}{4B}} Q \tanh \sqrt{2BN} \quad N = \frac{\sqrt{|A|}}{2\sqrt{2B}} \ln(\cosh(\sqrt{2BN})) \quad (29)$$

和一族周期波解:

$$\begin{aligned} \langle(N) = r_2 \int \operatorname{sn} \left[\sqrt{2B} r_1 N, \frac{r_2}{r_1} \right] dN = \\ \frac{1}{\sqrt{2B}} \ln \left[\operatorname{dn} \left[\sqrt{2B} r_1 N, \frac{r_2}{r_1} \right] - \frac{r_2}{r_1} \operatorname{cn} \left[\sqrt{2B} r_1 N, \frac{r_2}{r_1} \right] \right] \end{aligned} \quad (30)$$

2.3 $p \setminus 3$ 情形

注意,若 $p \setminus 3$, 当且仅当 $h = 0$ 时,通过首次积分 $H_p(U, y) = h$, 用经典分析方法积分系统(8)的第1个方程才成为可能1 设 $h = 0$, 此时(10)c 化为 $y^2 = -p^2 u^2(A + 2BU)$ 1

() $A > 0, B < 0$ (见图3(a))1

对应于由 $y^2 = p^2 u^2(2|B|U - A)$ 所定义的系统(7)的同宿轨道,其精确的参数表达式为

$$U(N) = \frac{A}{2|B|} \operatorname{sech}^2(XN), \quad (31)$$

其中, $X = p\sqrt{A}/2|B|$ 因此,方程(1)有以下的精确的行波解:

$$\langle(N) = Q(U(N))^{1/p} dN = Q \left[\frac{A}{2|B|} \operatorname{sech}^2(XN) \right]^{1/p} dN \quad (32)$$

显然,当 $p = 2m$ 时,式(30)表示方程(1)的一个扭波解和一个反扭波解1 当 $p = 2m + 1$ 时,式(30)表示方程(1)的一个扭波解1

() $A < 0, B > 0$ (见图3(b))1

对应于由 $y^2 = p^2 u^2(|A| - 2BU)$ 所定义的系统(9)的一条开轨道,积分系统(8)的第1个

方程得

$$U(N) = \frac{|A|}{2B} \sec^2(\sqrt{N}), \quad (33)$$

因此, 方程(1) 有以下的无界行波解:

$$\phi(N) = Q(U(N))^{1/p} dN = Q\left(\frac{|A|}{2B} \sec^2(\sqrt{N})\right)^{1/p} dN \quad (34)$$

3 结 论

应用动力系统方法, 对于 $p = 1, 2$ 和 $p \geq 3$, 本文得到方程(1) 的 12 个形如 $u(x, t) = \phi(x + B - ct) = \phi(N)$ 的行波解的精确的参数表达式, 由公式(13)、(14)、(17)、(18)、(20)、(22)、(25)、(26)、(29)、(30)、(32) 和(34) 所确定. 由这些公式可见, 方程(1) 存在扭波解、反扭波解、周期波解和无界解.

[参 考 文 献]

- [1] Quintero J R. Solitons and periodic traveling waves for the 2D-generalized Benney-Luke equation [J]. *Applicable Analysis*, 2007, 86(3): 331-351.
- [2] Mondragon E I. A remark on the stability of solitary waves for 1-D Benney-Luke equation [J]. *Mathematicas: Ensenanza Universitaria*, 2006, 14(1): 59-73.
- [3] LI Ji-bin, DAI Hui-hui. On the Study of Singular Nonlinear Traveling Wave Equations: Dynamical System Approach [M]. Beijing: Science Press, 2007.
- [4] LI Ji-bin, CHEN Guang-rong. Bifurcations of travelling wave solutions for four classes of nonlinear wave equations [J]. *Internat J Bifurcation and Chaos*, 2005, 15(12): 3973-3998.
- [5] Byrd P F, Fridman M D. *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists* [M]. Berlin: Springer, 1971.
- [6] Guckenheimer J, Holmes P J. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields* [M]. New York: Springer-Verlag, 1983.

Exact Traveling Wave Solutions for the 2D-Generalized Benney-Luke Equation

LI Ji-bin^{1,2}

(1. Department of Mathematics, Zhejiang Normal University,
Jinhua, Zhejiang 321004, P. R. China;

2. Department of Mathematics, Kunming University of Science and Technology,
Kunming 650093, P. R. China)

Abstract: By using the method of dynamical systems to the 2D-generalized Benney-Luke equation, the existence of kink wave solutions and uncountably infinite many smooth periodic wave solutions is shown. Explicit exact parametric representations for the kink wave solutions, periodic wave solutions and unbounded traveling wave solutions are obtained.

Key words: kink wave solution; periodic wave solution; unbounded wave solution; nonlinear wave equation; dynamical system method