应用数学和力学, 第 29 卷 第 11 期
2008 年 11 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 29, No. 11, Nov. 15, 2008

文章编号: 1000-0887(2008) 11-1268-11

一类非线性偏微分方程组的解析解*

张鸿庆, 丁琦[1,2]

(大连理工大学 应用数学系, 辽宁 大连 116024)

(我刊编委张鸿庆来稿)

摘要: 首先, 利用共轭算子的性质, 将张鸿庆等提出的求伴随算子对的方法推广到了求一类非线性(即部分非线性的) 算子矩阵的伴随算子向量. 其次, 利用机械化的构造方法给出了求解一类非线性(即, 部分非线性的, 且以所有线性的为其特例) 非齐次微分方程组的统一理论, 即通过齐次化和三角化求得恰当的变换, 从而将原方程组化为较简单的形式, 一般为对角化的. 最后利用该方法求得了一些弹性力学方程组的解析解.

关 键 词: $AC = BD$ 模; 部分非线性; 伴随; 共轭; 板壳

中图分类号: O175.2 文献标识码: A

引 言

1978 年, 张鸿庆[1] 总结了弹性力学方程组的各种一般解, 用代数的概念和构造方法, 给出了统一理论和公式. 随后张鸿庆等[2-3] 利用共轭算子的性质将文献[1] 中的理论与方法推广到线性变系数齐次偏微分方程组的情形. 并由此发展起来了求解微分方程组的 C-D 对理论以及数学机械化中的 $AC = BD$ 模式[4]. 即, 对于一般的方程 $Au = 0$, 我们寻找 C-D 对使得 $AC = BD$, 并且做变换 $u = Cv$ 后, 将原问题化为较简单的 $Dv = 0$. 但是对于变系数情形, 这一算法计算量较大, 最终得到的变换 $u = Cv$ 和方程 $Dv = 0$ 都比较复杂, 因此至今没有太好的应用.

关于非齐次方程组 $Au = f$ 的求解, 张鸿庆等[5-6] 利用 $AC = BD$ 模式提出了一种求一般解的算法. 该方法的思想是利用 $AC = BD$, 做变换 $u = Cv + e$, 从而将目标方程化成一个较为简单的 $Dv = g$ 来求解, 其中 e 和 g 要满足方程 $Ae + Bg = f$. 这一方法的关键就是如何选取恰当的 e 和 g, 使得 $Dv = g$ 是较 $Au = f$ 易解的方程组. 关于 e 和 g 的选取仍然没有一个好的方法, 而求解方程 $Ae + Bg = f$ 也非易事.

本文首先将张鸿庆等人[2-3] 提出的求单个算子的伴随算子对的算法, 推广到构造一类非线性(即部分非线性的) 算子矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随算子向量 $\boldsymbol{C}$. 进而利用该算法给出了求解一类非线性(即部分非线性的, 且包含所有线性的) 非齐次微分方程组的统一理论, 即利用伴随算子向量的性质, 并且通过齐次化或者直接对角化的方法, 求得变换 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{v}$, 从而将 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ 化为对角化的方程组 $\boldsymbol{D}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g}$. 最后我们利用上述统一理论求解了一类弹性力学方程, 并得到了一些

* 收稿日期: 2008-08-25; 修订日期: 2008-09-25
基金项目: 国家重点基础研究专项基金资助项目(2004CB318000)
作者简介: 张鸿庆(1936—) , 男, 黑龙江人, 教授, 博士生导师(联系人. Tel: + 86-411-84708351-8024; E-mail: zhanghq@ dlut. edu. cn) .

解析解．这样,即为利用共轭算子的性质求解方程的算法找到了应用的价值,也避免了文献[5-6]中求解 $Ae+Bg=f$ 的麻烦.

1　右伴随算子向量及其构造

本文主要考虑一类非线性的微分方程组与微分算子,即部分非线性的,其定义如下:

定义 1.1　设 $\boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{w}=(w_1,\cdots,w_k)^{\mathrm{T}}$ 为未知函数向量,A 为关于 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 的微分算子．若 A 关于 $\boldsymbol{u}$ 是线性的而关于 $\boldsymbol{w}$ 为非线性的,则称 A 为部分非线性的(partial-nonlinear).

显然 A 可以写为 $A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})=A(\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{u}$,其中 $A(\boldsymbol{w})$ 为关于 $\boldsymbol{u}$ 的线性变系数算子,且其系数包含 $\boldsymbol{w}$ 及其导数项.

例如,考虑非线性算子 $A(u,w)=\cos(w)u_x+w_y u_y$,其中 u,w 均为双变元的未知函数．由于 A 关于 u 是线性的而关于 w 是非线性的,因此 A 为部分线性的．令 $A(w)=\cos(w)(\partial/\partial x)+w_y(\partial/\partial y)$,则有 $A(u,w)=A(w)\cdot u$.

在不致引起混淆的情况下我们将 $A(\boldsymbol{w})$ 简记为 $A(\boldsymbol{w})$ 或 A,且仍称其为部分非线性的.

类似于文献[4]中伴随算子对的定义,对于算子矩阵有如下定义:

定义 1.2　设 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{w})=(A_{ij})_{m\times n}$,若 A_{ij} 均为部分非线性算子,则称 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{w})$ 为部分非线性算子矩阵．若存在 n 元算子向量 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{w})=(C_1,\cdots,C_n)^{\mathrm{T}}$ 使得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{C}(\boldsymbol{w})=0,\tag{1}$$

则称 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{w})$ 为算子矩阵 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{w})$ 的右伴随算子向量.

当 $n=m+1=2$ 且 $\boldsymbol{A}$ 中算子的系数与 $\boldsymbol{w}$ 无关时,令 $A=A_{11}$, $B=A_{12}$, $C=C_1$, $D=-C_2$,则得到了张鸿庆[4]所提出的右伴随算子对,此时利用共轭算子的性质就可以构造出 $\boldsymbol{C}$．下面我们将这一算法推广到任意的 $n>m$ 的情形,同样利用共轭算子的性质将原问题(1)化为齐次线性方程组的求解.

首先引入如下记号．设 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)$, $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_k)$,记

$$|\alpha|=\sum\alpha_i,\quad D^{\alpha}=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_k}^{\alpha_k}},\quad \alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_k!,$$

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}\alpha_k\\ \beta_k\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_i\\ \beta_i\end{pmatrix}=\frac{\alpha_i!}{\beta_i!(\alpha_i-\beta_i)!},$$

容易验证,系数足够光滑的线性偏微分算子在通常意义下的加法和乘法构成一个环,记为 $R[D]$．其中,$R[x]$ 表示系数为 R 中元素的多项式环．设 $A=\sum_{|\alpha|\leqslant d}a_\alpha(\boldsymbol{x})D^{\alpha}\in R[D]$,其中,$a_\alpha\in C^{\infty}(R^k)$, $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_k)\in R^k$．$A^*$ 为 A 的共轭算子,则

$$A^*=\sum_{|\alpha|\leqslant d}(-1)^{|\alpha|}\sum_{\beta\leqslant\alpha}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}D^{\beta}a_\alpha(\boldsymbol{x})D^{\alpha-\beta}=\sum_{|\alpha|\leqslant d}a_\alpha^*(\boldsymbol{x})D^{\alpha},\tag{2}$$

其中

$$a_\alpha^*(\boldsymbol{x})=\sum_{|\boldsymbol{l}|\leqslant d,\ \beta\leqslant\boldsymbol{l},\ \boldsymbol{l}-\beta=\alpha}(-1)^{|\boldsymbol{l}|}\begin{pmatrix}\boldsymbol{l}\\ \beta\end{pmatrix}D^{\beta}a_{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{x}),\quad |\alpha|\leqslant d,$$

而 $\alpha\geqslant\beta$ 为对所有 $i(1\leqslant i\leqslant k)$ 有 $\alpha_i\geqslant\beta_i$.

关于共轭算子有如下性质:

引理 1.1　设 A、B、C、D 为线性偏微分算子,则

(ⅰ) $(A^*)^* = A$;

(ⅱ) $(A+B)^* = A^* + B^*$;

(ⅲ) $(AC)^* = C^* A^*$，进而若 $AC = BD$，则 $C^* A^* = D^* B^*$.

由共轭算子性质可以给出构造算子矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的右伴随算子向量 $\boldsymbol{C}$ 的方法. 首先对于给定的算子矩阵 $\boldsymbol{A}$ 利用公式(2) 求出其共轭转置 $\boldsymbol{A}^{*\mathrm{T}} = (A_{ji}^*)_{n\times m}$，其次由引理 1.1 知式(1) 等价于

$$\boldsymbol{C}^{*\mathrm{T}}\cdot \boldsymbol{A}^{*\mathrm{T}} = 0. \tag{3}$$

并由此求出 $\boldsymbol{C}^{*\mathrm{T}} = (C_1^*, \cdots, C_n^*)$. 最后由引理 1.1 的(ⅰ)求出

$$\boldsymbol{C} = (C_1, \cdots, C_n)^{\mathrm{T}} = (C_1^{**}, \cdots, C_n^{**})^{\mathrm{T}}.$$

现在我们的目标是按等式(3) 求出 $\boldsymbol{C}^{*\mathrm{T}}$. 设 A_{ij}^* 具有如下形式:

$$A_{ij}^* = \sum_{|\alpha|\leqslant d_i} a_\alpha^{(i,j)^*}(\boldsymbol{x})D^\alpha, \qquad i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n.$$

其中，d_i 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元素最高微分阶数，$a_\alpha^{(i,j)^*}(\boldsymbol{x})(|\alpha|\leqslant d)$ 是充分光滑的函数. 假定

$$C_j^* = \sum_{|\beta|\leqslant e} c_\beta^{j^*}(\boldsymbol{x})D^\beta, \qquad j = 1, \cdots, n.$$

其中，e 是 $\boldsymbol{C}$ 中元素最高微分阶数. 则

$$C_j^* A_{i,j}^* = \sum_{|\beta|\leqslant e} c_\beta^{j^*}(\boldsymbol{x})D^\beta\cdot \sum_{|\alpha|\leqslant d_i} a_\alpha^{(i,j)^*}(\boldsymbol{x})D^\alpha = \sum_{|\boldsymbol{l}|\leqslant e+d_i}\left(\sum_{|\beta|\leqslant e} c_\beta^{j^*} a_\beta^{(i,j)}\right)D^{\boldsymbol{l}},$$

其中

$$a_\beta^{(i,j)} = \sum_{|\alpha|\leqslant d_i,\ \boldsymbol{r}\leqslant\beta,\ \alpha+\boldsymbol{r}=\boldsymbol{l}} \binom{\beta}{\boldsymbol{r}} D^{\beta-\boldsymbol{r}} a_\alpha^{(i,j)^*}(\boldsymbol{x}).$$

为使式(3) 成立，要求其中各等式的所有微分项的系数为 0，则可以得到如下线性齐次方程组:

$$\sum_{|\beta|\leqslant e}\left(a_\beta^{(i,1)} c_\beta^{1^*} + \cdots + a_\beta^{(i,n)} c_\beta^{n^*}\right) = 0, \qquad |\boldsymbol{l}|\leqslant e+d_i;\ i = 1, \cdots, m. \tag{4}$$

设我们所考虑的微分方程的自变量个数为 k，则 C_i 包含 $\binom{k+e}{k}$ 个微分项，因而其系数的个数为 $\binom{k+e}{k}$，又因为 $\boldsymbol{C}$ 中共有 n 个元素，故方程组(4) 共含有 $n\binom{k+e}{k}$ 个未知元. 而式(3) 由 m 个等式构成，其中第 i 个等式的最高微分阶数为 $d_i + e$，因而包含 $\binom{k+d_i+e}{k}$ 个微分项，故式(4) 所包含的方程数为 $\sum_{i=1}^m \binom{k+d_i+e}{k}$ 显然当方程的个数严格小于未知元的个数时，即

$$\sum_{i=1}^m \binom{k+d_i+e}{k} < n\cdot\binom{k+e}{k}, \tag{5}$$

齐次线性方程组(4) 有非平凡解. 进而我们也就求出了 $\boldsymbol{C}^{*\mathrm{T}}$，再求一次共轭转置，就得到了 $\boldsymbol{C}$.

引理 1.2 当 $m < n$ 时，总存在足够大的 e 使得不等式(5) 成立，进而齐次线性方程组(4) 有非平凡解.

证明 设 $d = \max_i\{d_i\}$，则

$$\sum_{i=1}^m \binom{k+d_i+e}{k} \Bigg/ \left(n\cdot\binom{k+e}{k}\right) < m\binom{k+d+e}{k} \Bigg/ \left(n\cdot\binom{k+e}{k}\right) =$$

$$\frac{m(k+e+1)\cdots(k+e+d)}{n(e+1)\cdots(e+d)}=\frac{m}{n}\cdot\frac{e^d+f(e)}{e^d+g(e)},$$

其中, $f(e)$ 和 $g(e)$ 是关于 e 的次数小于 d 的多项式, 因此上式右端当 $e\to\infty$ 时的极限为 $m/n<1$. 故必存在足够大的 e 使得不等式(5)成立. □

综上所述有下面的定理:

定理 1.1 对于给定的 m 行 n 列的部分非线性微分算子矩阵 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{w})$, 当 $m<n$ 时存在一机械化算法求得 n 元算子向量 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{w})$ 使得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{C}(\boldsymbol{w})=0$.

显然, 当 $n=m+1=2$ 时就为张鸿庆等人[2-3] 提出的方法. 另外, 待求算子向量 $\boldsymbol{C}$ 中元素的微分阶数可以不同, 即第 i 个元素的阶数设为 e_i, 这样就可以得到类似于(5)式但是更为精细的估计, 从而可以降低方程组(4)中未知元和方程的个数, 以达到减少计算量的目的.

显然定理 1.1, 针对于微分算子, 给出了由张鸿庆[4] 提出将方程组化为单个方程的求解方式的一个机械化算法, 并在第 2 节中应用在求解一类非线性微分方程组当中.

2 求解部分非线性方程的一般理论

我们考虑如下形式的微分方程组:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{w}=\boldsymbol{f},\quad F(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})=0, \tag{6}$$

其中, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{w})=(A_{ij}(\boldsymbol{w}))_{m\times n}$ 为部分非线性微分算子矩阵; $\boldsymbol{A}'$ 为一般的微分算子矩阵; $F(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})=0$ 为关于 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 的一般微分方程组; $\boldsymbol{f}=(f_1,\cdots,f_m)^{\mathrm{T}}$ 为足够光滑的函数向量. 我们称这样的方程组为部分非线性的(partial-nonlinear).

若视 $\boldsymbol{w}$ 为已知函数, 这样 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{w}=\boldsymbol{f}$ 就可看成是关于 $\boldsymbol{u}$ 的变系数线性方程组. 借助于求解微分方程的 $AC=BD$ 模式以及定理 1.1, 可以求得关于 $\boldsymbol{u}$ 的变换并将式(6)化为如下较为简单的形式:

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{v},\quad \boldsymbol{D}(\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{D}'\cdot\boldsymbol{w}=\boldsymbol{g},\quad F(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=0, \tag{7a, b, c}$$

其中, $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{w})$ 和 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{w})$ 均为部分非线性算子的矩阵; $\boldsymbol{D}'$ 为关于 $\boldsymbol{w}$ 的微分算子矩阵; $\boldsymbol{g}$ 为足够光滑的函数向量. 在本文中, 选取 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{w})$ 为对角矩阵.

这样我们就得到了 $\boldsymbol{u}$ 关于 $\boldsymbol{w}$ 的表示(7a)以及仅关于 $\boldsymbol{w}$ 和新函数 $\boldsymbol{v}$ 的方程(7b)与(7c). 我们可以首先由(7b)与(7c)解得 $\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{v}$, 进而由(7a)得到 $\boldsymbol{u}$, 从而得到了原方程的解. 特别的, 若 $F\equiv 0$, 可以选取恰当 $\boldsymbol{v}$ 使得(7b)为仅关于 $\boldsymbol{w}$ 且容易求解的方程.

2.1 齐次化方法

引入新的未知函数 u_{n+1}, 设

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{w})=(A_{i,j})_{m\times(n+1)}=(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{w}),\boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{w}-\boldsymbol{f}),\quad \boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_n,u_{n+1}).$$

考虑如下齐次方程组:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0},\quad F(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})=F(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})=0. \tag{8}$$

显然有

引理 2.1 若 $\boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_n,1)^{\mathrm{T}}$ 是方程(8)的解, 则 $\boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}$ 是原方程(6)的解.

再由定理 1.1 得到

定理 2.1 若 $m<n+1$. 则存在部分非线性的算子向量 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{w})=(C_1,\cdots,C_n)^{\mathrm{T}}$ 和算子 $D(\boldsymbol{w})$, 使得原方程(6)有如下形式的解:

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{w})\cdot v,\quad D(\boldsymbol{w})\cdot v=1,\quad F(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{w})\cdot v,\boldsymbol{w})=0, \tag{9}$$

其中, v 为未知函数.

证明　由定理 1.1 利用共轭算子的性质求得部分非线性算子向量 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{w}) = (C_1, \cdots, C_n, C_{n+1})$, 使得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{C}(\boldsymbol{w}) = 0$. 从而对任意的函数 v, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{w})\cdot v$ 为式(8) 的解. 令 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{w}) = (C_1, \cdots, C_n)$ 及 $D(\boldsymbol{w}) = C_{n+1}$, 由引理 2.1 可知, 对于任意满足 $u_{n+1} = D(\boldsymbol{w})\cdot v = 1$ 及 $F(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{w})\cdot v, \boldsymbol{w}) = 0$ 的 v 和 $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{w})\cdot v$ 为原方程(6) 的解. 从而定理得证. □

显然, 在 $AC = BD$ 模式里, 选取的 $\boldsymbol{D}' = \boldsymbol{0}$, $g = 1$, 而 v 为单个函数, 且 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{w})$ 为平凡的对角矩阵, 即为单个算子.

但是一般来讲, 由定理 2.1 得到的 $D(\boldsymbol{w})$ 是比较复杂的部分非线性算子, 其系数包含 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 及其各阶导数项. 因此 $D(\boldsymbol{w})\cdot v = 1$ 也不是容易求解的. 但是对于一些特殊的 $\boldsymbol{f}$, $D(\boldsymbol{w})$ 的形式是很简单的, 甚至是常系数的微分算子. 在第 3 节中我们将给出具体的算例.

2.2　直接对角化

利用定理 1.1 我们也可以将 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{w})$ 直接进行对角化. 此时设 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{w})$ 的形式如下:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix} D_{11} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & D_{mm} & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}, \tag{10}$$

而待求的变换为 n 阶方阵, 设为 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{w}) = (C_{ij})_{n\times n}$, 满足

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{C}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{w}), \tag{11}$$

不妨设 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{w})$ 具有如下形式:

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,m} & C_{1,m+1} & \cdots & C_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{m,1} & \cdots & C_{m,m} & C_{m,m+1} & \cdots & C_{m,n} \\ 0 & \cdots & 0 & C_{m+1,m+1} & \cdots & C_{m+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & C_{n,n} \end{pmatrix}_{n\times n}. \tag{12}$$

由式(10) ~ (12) 不难得到如下 n 个独立的方程组:

$$\begin{cases} \begin{cases} A_{11}C_{1i} + \cdots + A_{1i}C_{ni} = 0, \\ \vdots \\ A_{m1}C_{1i} + \cdots + A_{mi}C_{ni} = 0, \end{cases} & i = m+1, \cdots, n. \\ \begin{cases} A_{11}C_{1j} + \cdots + A_{1m}C_{mj} = 0, \\ \vdots \\ A_{j-1,1}C_{1j} + \cdots + A_{j-1,m}C_{mj} = 0, \\ A_{j+1,1}C_{1j} + \cdots + A_{j+1,m}C_{mj} = 0, \\ \vdots \\ A_{m1}C_{1j} + \cdots + A_{mm}C_{mj} = 0, \end{cases} & j = 1, \cdots, m. \end{cases} \tag{13}$$

不难看出当 $m \leqslant n$ 时, 上述 n 个方程组均满足定理 1.1 的条件, 因而可以利用共轭算子的性质求出每个方程组的非平凡解. 由此得到

定理 2.2　若 $m \leqslant n$. 则存在形如式(12) 的部分非线性算子矩阵 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{w})$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{w})$, 使得原方程(6) 有如下形式的解:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{D}(\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f},\ F(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}) = 0. \tag{14}$$

对应于 $AC = BD$ 模式, 我们选取的是 $\boldsymbol{D}' = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{w} + \boldsymbol{f}$.

3　在弹性力学中的应用

3.1　平面应力方程

非齐次平面应力方程[1]可以写为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f},\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \Delta & 0 & \Delta \end{pmatrix},\ \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \sigma_y \end{pmatrix},\ \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ -f_{xy} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

其中, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. f_x 和 f_y 为充分光滑的函数, 分别表示板在点 (x, y) 处关于 x 方向和 y 方向的受力. 而 $f_{xy} = (1+\mu)((\partial/\partial x)f_x + (\partial/\partial y)f_y)$, μ 为 Poisson 比.

为了简化问题, 我们仅考虑 $f_{xy} = 0$ 的情形, 即

$$\frac{\partial}{\partial x}f_x(x, y) + \frac{\partial}{\partial y}f_y(x, y) = 0, \tag{16}$$

引入新的未知函数 u_4, 由此得到齐次化后的方程为:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & f_x \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & f_y \\ \Delta & 0 & \Delta & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{u} = (\sigma_x\quad \tau_{xy}\quad \sigma_y\quad u_4)^{\mathrm{T}}.$$

同样利用定理 1.1 可以求得算子向量 $\boldsymbol{C} = (C_1, C_2, C_3, C_4)^{\mathrm{T}}$ 使得 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} = 0$, 其中 C_4 是一个以 f 及其各阶导数的多项式为系数的三阶偏微分算子. 因此对于一般的满足式(16) 的 f_x 和 f_y 很难求得 $C_4 v = 1$ 的解. 为此, 需要对 f 进一步加以限制, 从而使得 C_4 为一简单算子, 一般取为常系数的算子. 我们发现, 若 f_x 和 f_y 同时满足如下等式时,

$$\frac{\partial}{\partial y}f_x(x, y) - \frac{\partial}{\partial x}f_y(x, y) = 0, \tag{17}$$

可以得到简单的 $D = C_4 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, 从而式(15) 有如下形式的解:

$$\begin{cases} u_1 = \left(-f_x\frac{\partial}{\partial x} + f_y\frac{\partial}{\partial y}\right)v, \\ u_2 = \left(-f_y\frac{\partial}{\partial x} - f_x\frac{\partial}{\partial y}\right)v, \\ u_3 = \left(f_x\frac{\partial}{\partial x} - f_y\frac{\partial}{\partial y}\right)v,\quad \Delta v = 1. \end{cases} \tag{18}$$

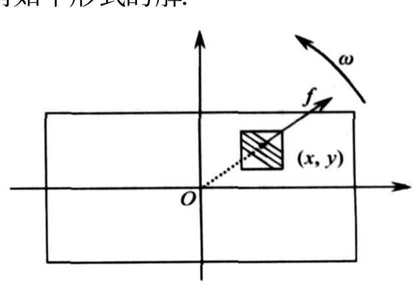

图 1　板绕原点匀速旋转时的受力

关于 f 的限制条件(16) 和(17) 是有一定力学意义的. 下面我们举一个具体的力学问题来说明这一点. 如图 1, 板绕原点以角速度 ω 匀速旋转, 其在点 (x, y) 处所受的离心力为 f.

若设板的密度 ρ 与距离的平方成反比, 即 $\rho = k/(x^2 + y^2)$, 其中 k 为常数. 则易知板在点 (x, y) 处的受力 f 分别沿 x 方向和 y 方向的分量为 $f_x = (k\omega^2 x)/(x^2 + y^2)$ 和 $f_y = k\omega^2 y/(x^2 + y^2)$. 易验证此时 f_x 和 f_y 满足等式(16) 和(17), 故可按照式(18) 求解.

3.2　柱壳的弯曲问题

用位移表示柱壳弯曲问题的平衡微分方程为[7]

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial \alpha^2}+\dfrac{1-\mu}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial \beta^2}\right)u+\dfrac{1+\mu}{2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta}+\dfrac{\mu}{R}\dfrac{\partial w}{\partial \alpha}+\dfrac{1-\mu^2}{E\delta}q_1=0, \\ \dfrac{1+\mu}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}+\left(\dfrac{\partial^2}{\partial \beta^2}+\dfrac{1-\mu}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\right)v+\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial w}{\partial \beta}-\dfrac{1}{R^2}R'w+\dfrac{1-\mu^2}{E\delta}q_2=0, \\ \dfrac{\mu}{R}\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}+\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial v}{\partial \beta}+\dfrac{w}{R^2}+\dfrac{\delta^2}{12}\nabla^4 w-\dfrac{1-\mu^2}{E\delta}q_3=0, \end{cases} \tag{19}$$

其中, u、v、w 表示位移, α、β 表示角度, $R=R(\beta)$ 为只关于 β 的函数, E 为弹性模量, δ 为板的厚度, q_1、q_2、q_3 为荷载, $\nabla^2=\partial^2/\partial \alpha^2+\partial^2/\partial \beta^2$ 为 Laplace 算子. 文献[7] 中为了简化计算, 而将 R 视为常数. 事实上, 利用定理 2.2 可以很好的解决上述方程.

首先将上述方程写成式(6) 的形式, 则

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial \alpha^2}+\dfrac{1-\mu}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial \beta^2} & \dfrac{1+\mu}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} & \dfrac{\mu}{R}\dfrac{\partial}{\partial \alpha} \\ \dfrac{1+\mu}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} & \dfrac{\partial^2}{\partial \beta^2}+\dfrac{1-\mu}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial \alpha^2} & \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial}{\partial \beta}-\dfrac{1}{R^2}R' \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{f}=\begin{pmatrix} -\dfrac{1-\mu^2}{E\delta}q_1 \\ -\dfrac{1-\mu^2}{E\delta}q_2 \end{pmatrix}, \\ F(u,v,w)=\dfrac{\mu}{R}\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}+\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial v}{\partial \beta}+\dfrac{w}{R^2}+\dfrac{\delta^2}{12}\nabla^4 w-\dfrac{1-\mu^2}{E\delta}q_3. \end{cases} \tag{20}$$

由式(13) 知, 我们需要求解以下 3 个方程组和方程:

$$\begin{cases} A_{11}C_{13}+A_{12}C_{23}+A_{13}C_{33}=0, \quad A_{11}C_{12}+A_{12}C_{22}=0, \\ A_{21}C_{13}+A_{22}C_{23}+A_{23}C_{33}=0, \quad A_{21}C_{11}+A_{22}C_{21}=0, \end{cases}$$

由定理 1.1 解得

$$\begin{cases} C_{11}=A_{22}, \quad C_{21}=-A_{21}, C_{12}=A_{12}, \quad C_{22}=-A_{11}, \\ C_{13}=\mu\dfrac{\partial^3}{\partial \alpha^3}-\dfrac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2}, \quad C_{23}=(\mu+2)\dfrac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta}+\dfrac{\partial^3}{\partial \beta^3}, \quad C_{33}=-R\nabla^4. \end{cases} \tag{21}$$

从而得到 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$ 和 F 分别为

$$\begin{cases} D_{11}=\dfrac{1-\mu}{2}\nabla^4, \quad D_{22}=-\dfrac{1-\mu}{2}\nabla^4, \\ F(\boldsymbol{Cv})=D_{31}v_1+D_{32}v_2+D_{33}v_3-\dfrac{1-\mu^2}{E\delta}q_3. \end{cases} \tag{22}$$

其中

$$D_{31}=\frac{1-\mu}{2R}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\mu\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}-\frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\right), \quad D_{32}=-\frac{1-\mu}{2R}\frac{\partial}{\partial \beta}\left((2+\mu)\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\right),$$

$$D_{33}=-\frac{\delta^2}{12}\left(R\nabla^8+4R'\frac{\partial}{\partial \beta}\nabla^6+2R''\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}+3\frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\right)\nabla^4+\right.$$
$$\left.4R'''\frac{\partial}{\partial \beta}\nabla^4+R''''\nabla^4\right)+\frac{\mu^2-1}{R}\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4}.$$

综上, 由式(21) 和(22) 我们将方程组(19) 化为如式(14) 的对角化的形式.

3.3 旋转壳的无矩理论

旋转壳无矩理论的平衡方程[7]如下:

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{R_1}\dfrac{\partial F_{T1}}{\partial\alpha}+\dfrac{\cot(\alpha)}{R_2}(F_{T1}-F_{T2})+\dfrac{1}{R_2\sin(\alpha)}\dfrac{\partial F_{T12}}{\partial\beta}+q_1=0,\\
\dfrac{1}{R_1}\dfrac{\partial F_{T12}}{\partial\alpha}+\dfrac{2\cot(\alpha)}{R_2}F_{T12}+\dfrac{1}{R_2\sin(\alpha)}\dfrac{\partial F_{T2}}{\partial\beta}+q_2=0,\\
\dfrac{F_{T1}}{R_1}+\dfrac{F_{T2}}{R_2}=q_3,
\end{cases}
\tag{23}
$$

其中, α、β 为角度; q_1、q_2 和 q_3 分别为经线方向(即 α 方向)、纬线方向(即 β 方向)和法线方向的荷载, 都是 α、β 的已知函数; F_{T1}、F_{T2} 分别为经线方向和纬线方向的拉压力, $F_{T12}=F_{T21}$ 为经线及纬线方向的平错力, 都是 α、β 的未知函数; R_1、R_2 为半径且只与 α 有关, 并满足

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}(R_2\sin(\alpha))=R_1\cos(\alpha).
\tag{24}
$$

由式(23)第3式及式(24)解得

$$
F_{T2}=R_2q_3-\frac{R_2}{R_1}F_{T1},\quad R_1=\frac{1}{\cos(\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}(R_2\sin(\alpha)),
$$

将其代入到式(23)的前两式, 为利用定理2.2求解, 写成式(6)的形式, 则得到

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}
\dfrac{\cos(\alpha)(2R_2\cos(\alpha)+R_2'\sin(\alpha)+R_2\sin(\alpha)(\partial/\partial\alpha))}{R_2\sin(\alpha)(R_2'\sin(\alpha)+R_2\cos(\alpha))} & \dfrac{1}{R_2\sin(\alpha)}\dfrac{\partial}{\partial\beta}\\
-\dfrac{\cos\alpha}{\sin(\alpha)(R_2'\sin(\alpha)+R_2\cos(\alpha))}\dfrac{\partial}{\partial\beta} & \dfrac{\cos(\alpha)(2R_2'\sin(\alpha)+2R_2\cos(\alpha)+R_2\sin(\alpha)(\partial/\partial\alpha))}{R_2\sin(\alpha)(R_2'\sin(\alpha)+R_2\cos(\alpha))}
\end{pmatrix},\\
\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}
-\dfrac{R_2\cos(\alpha)^2q_3-R_2\cos(\alpha)\sin(\alpha)q_1+\sin(\alpha)\cos(\alpha)q_3R_2'+\cos(\alpha)^2R_2'q_1-R_2'q_1}{\sin(\alpha)(R_2'\sin(\alpha)+R_2\cos(\alpha))}\\
\dfrac{R_2\cos(\alpha)q_3'+R_2'q_2+R_2'\sin(\alpha)q_3'+R_2\sin(\alpha)\cos(\alpha)q_2-R_2'\cos(\alpha)^2q_2}{\sin(\alpha)(R_2'\sin(\alpha)+R_2\cos(\alpha))}
\end{pmatrix},\\
\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}F_{T1}\\F_{T12}\end{pmatrix},\ F\equiv 0,
\end{cases}
\tag{25}
$$

其中, $q_3'=\partial q_3/\partial\beta$. 由式(13)知, 需要求解 $A_{11}C_{12}+A_{12}C_{22}=0$ 和 $A_{21}C_{11}+A_{22}C_{21}=0$. 利用定理1.1得到 $\boldsymbol{C}$ 中元素均为一阶微分算子:

$$
\begin{cases}
C_{11}=-R_2\sin(\alpha)\dfrac{\partial}{\partial\alpha}-2R_2\cos(\alpha)-3R_2'\sin(\alpha),\quad C_{21}=-R_2\dfrac{\partial}{\partial\beta},\\
C_{12}=-\dfrac{(R_2'\sin(\alpha)+R_2\cos(\alpha))^2}{\cos(\alpha)^2}\dfrac{\partial}{\partial\beta},\\
C_{22}=[R_2R_2'\tan(\alpha)\sin(\alpha)+R_2^2\sin(\alpha)]\dfrac{\partial}{\partial\alpha}+7R_2R_2'\sin(\alpha)+2R_2^2\cos(\alpha)+\\
\qquad 2R_2R_2''\tan(\alpha)\sin(\alpha)+2R_2R_2'\tan(\alpha)^2\sin(\alpha)+R_2'^2\tan(\alpha)\sin(\alpha).
\end{cases}
\tag{26}
$$

进而得到 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$ 为二阶的对角偏微分算子矩阵:

$$
D_{11}=[-R_2^2\cos\alpha(\sin\alpha)^2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-R_2(R_2'\sin\alpha+R_2\cos\alpha)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+
$$

$$
5\cos\alpha R_2(R_2'(\cos\alpha)^2-\sin\alpha R_2\cos\alpha-R_2')\frac{\partial}{\partial\alpha}+\cos\alpha(-6(\cos\alpha)^2R_2^2+
3(\cos\alpha)^2R_2'^2+3(\cos\alpha)^2R_2''R_2-13R_2'R_2\sin\alpha\cos\alpha+2R_2^2-
3R_2''R_2-3R_2'^2)]/[(R_2'\sin\alpha+R_2\cos\alpha)R_2\sin\alpha],
$$

$$
D_{22}=[R_2^2(\cos\alpha)^2(\sin\alpha)^2(R_2'\sin\alpha+R_2\cos\alpha)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-R_2\cos\alpha(-(\cos\alpha)^2R_2^2-
R_2'^2+(\cos\alpha)^2R_2'^2-2\cos(\alpha)R_2\sin\alpha R_2')\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+R_2\cos\alpha(-12R_2R_2'(\cos\alpha)^4-
3(\cos\alpha)^3R_2\sin\alpha R_2''+5(\cos\alpha)^3R_2^2\sin\alpha-4(\cos\alpha)^3R_2'^2\sin\alpha+9R_2R_2'(\cos\alpha)^2+
4\cos\alpha R_2'^2\sin\alpha+3\cos\alpha R_2\sin\alpha R_2''+3R_2R_2')\frac{\partial}{\partial\alpha}+4R_2^2R_2''\cos\alpha-
11(\cos\alpha)^5R_2^2R_2''-18R_2'^2(\cos\alpha)^5R_2+7(\cos\alpha)^3R_2^2R_2''+4R_2^2\sin\alpha R_2'+
11R_2'^2(\cos\alpha)^3R_2+2\sin\alpha R_2^2R_2'(\cos(\alpha))^2+7R_2'^2\cos\alpha R_2-
2R_2'^3\sin\alpha(\cos\alpha)^4-2R_2^3(\cos\alpha)^3+2R_2'^3\sin\alpha(\cos\alpha)^2+
8R_2'\sin\alpha R_2''(\cos\alpha)^2R_2+6(\cos\alpha)^5R_2^3+23R_2'(\cos\alpha)^4R_2^2\sin\alpha-
8R_2'\sin\alpha R_2''(\cos\alpha)^4R_2]/[\sin\alpha\cos\alpha^2R_2(R_2'\sin\alpha+R_2\cos\alpha)].
$$

综上, 由式(26)及上式我们将方程(25)化为如式(14)的对角化的形式.

3.4 在动载荷作用下框架结构大变形分析

平面框架结构中每个微元的运动微分方程[8]如下:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial S}(\lambda_1\sin(\theta))-\dfrac{\partial}{\partial S}(\lambda_2\cos(\theta))-\rho\ddot{W}+F_x=0,\\
\dfrac{\partial}{\partial S}(\lambda_1\cos(\theta))+\dfrac{\partial}{\partial S}(\lambda_2\sin(\theta))-\rho\ddot{U}+F_y=0,\\
\dfrac{\partial\lambda_3}{\partial S}-\lambda_2=0,\quad \dfrac{\partial\theta}{\partial S}+\dfrac{\partial\theta_0}{\partial S}-\lambda_3=0,
\end{cases}
\tag{27}
$$

其中, W、U、θ、λ_1、λ_2、λ_3 都是关于弧长坐标 S 和时间 T 的函数, θ_0 为初始转角, F_x 和 F_y 为荷载, $\ddot{U}=\partial^2U/\partial T^2$, $\ddot{W}=\partial^2W/\partial T^2$. 显然这是一个非线性的方程组.

由式(27)的后两式可以解得 $\lambda_2=\partial^2\theta/\partial S^2+\partial^2\theta_0/\partial S^2$ 和 $\lambda_3=\partial\theta/\partial S+\partial\theta_0/\partial S$, 将其代入到式(27)得到只关于 λ_1、U、W 和 θ 的方程

$$
\begin{cases}
\left(\sin(\theta)\dfrac{\partial}{\partial S}+\cos(\theta)\theta'\right)\lambda_1-\rho\ddot{W}+F_1=0,\\
\left(\cos(\theta)\dfrac{\partial}{\partial S}-\sin(\theta)\theta'\right)\lambda_1-\rho\ddot{U}+F_2=0,
\end{cases}
\tag{28}
$$

其中

$$
\begin{cases}
\theta'=\dfrac{\partial\theta}{\partial S},\quad \theta_0'=\dfrac{\partial\theta_0}{\partial S},\\
F_1=F_x-\cos(\theta)(\theta'''+\theta_0''')+\sin(\theta)\theta'(\theta''+\theta_0''),\\
F_2=F_y+\sin(\theta)(\theta'''+\theta_0''')+\cos(\theta)\theta'(\theta''+\theta_0'').
\end{cases}
\tag{29}
$$

这显然是一个非线性的方程组, 但是如果将式(28)的未知函数分为 $\boldsymbol{u}=(\lambda_1, W, U)$ 和 $\boldsymbol{w}=(\theta)$ 两个部分, 则不难看出式(28)关于 $\boldsymbol{u}$ 为线性的, 即其为部分非线性的.

为了便于求解, 将式(28)写成形如式(6)的矩阵形式

$$
\boldsymbol{A}(\theta)=\begin{pmatrix} \sin\theta\dfrac{\partial}{\partial S}+\theta'\cos\theta & -\rho\dfrac{\partial^2}{\partial T^2} & 0 \\ \cos\theta\dfrac{\partial}{\partial S}-\theta'\sin\theta & 0 & -\rho\dfrac{\partial^2}{\partial T^2} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ W\\ U\end{pmatrix},\ \boldsymbol{f}=-\begin{pmatrix}F_1\\ F_2\end{pmatrix},\ F\equiv 0. \tag{30}
$$

引入新的未知函数 V, 得到形如式(8)的齐次化后的方程

$$
\boldsymbol{A}(\theta)=\begin{pmatrix} \sin(\theta)\dfrac{\partial}{\partial S}+\cos(\theta)\theta' & -\rho\dfrac{\partial^2}{\partial T^2} & 0 & F_1 \\ \cos(\theta)\dfrac{\partial}{\partial S}-\sin(\theta)\theta' & 0 & -\rho\dfrac{\partial^2}{\partial T^2} & F_2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ W\\ U\\ V\end{pmatrix},\ F\equiv 0. \tag{31}
$$

利用定理2.2可求得部分线性算子向量 $\boldsymbol{C}(\theta)=(C_1, C_2, C_3, C_4)^{\mathrm{T}}$, 使得 $\boldsymbol{A}(\theta)\cdot\boldsymbol{C}(\theta)=\boldsymbol{0}$, 其系数包含 θ 及其各阶导数. 令 $\boldsymbol{C}(\theta)=(C_1, C_2, C_3)$ 及 $D(\theta)=C_4$. 显然对于任意满足 $D(\theta)\cdot v=1$ 的 θ 和 v, $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{C}(\theta)\cdot v$ 为式(28)的解. 但是 $D(\theta)$ 的形式是比较复杂的, 我们这里就不列出了. 以下仅就一种特殊情况给出方程(30)的一组精确解.

假设 $\theta=\theta(t)$, $\theta_0=\theta_0(t)$ 只与 t 有关, F_x, F_y 为常数, 则由式(29)知 $F_1=F_x$, $F_2=F_y$ 亦为常数. 此时我们可以很容易求得线性算子向量 $\boldsymbol{C}(\theta)=(C_1, C_2, C_3, C_4)^{\mathrm{T}}$:

$$
\begin{aligned}
C_1=&-\rho[(-F_2^2(\sin\theta)^2+2F_2F_1\sin\theta\cos\theta-F_1^2(\cos\theta)^2)\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\\
&2\dot\theta(-3F_2^2\cos\theta\sin\theta+4F_2F_1(\cos\theta)^2-2F_2F_1(\sin\theta)^2+3F_1^2\cos\theta\sin\theta-\\
&F_1F_2)\frac{\partial}{\partial t}(3F_2^2\ddot\theta\cos\theta\sin\theta+18F_2F_1\dot\theta^2\sin\theta\cos\theta-4F_2F_1\ddot\theta(\cos\theta)^2+\\
&2F_1F_2\ddot\theta(\sin\theta)^2-3F_1^2\ddot\theta\sin\theta\cos\theta+4F_1^2\dot\theta^2(\sin\theta)^2-5F_1^2\dot\theta^2(\cos\theta)^2+\\
&F_1F_2\ddot\theta+F_2^2\dot\theta^2+5F_2^2\dot\theta^2(\cos\theta)^2+2F_1^2\dot\theta^2-4F_2^2\dot\theta^2(\sin\theta)^2)],\\
C_2=&(F_2\sin\theta-F_1\cos\theta)^2\sin\theta\frac{\partial}{\partial s},\quad C_3=(F_2\sin\theta-F_1\cos\theta)^2\cos\theta\frac{\partial}{\partial s},\\
C_4=&-\rho\frac{\partial}{\partial s}(2F_2\dot\theta(\sin\theta-F_1\cos\theta)\frac{\partial}{\partial t}+F_2\ddot\theta\sin\theta+4F_2\dot\theta^2\cos\theta-\\
&F_1\ddot\theta\cos\theta+4F_1\dot\theta^2\sin\theta).
\end{aligned}
$$

使得 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}=0$, 其中 $\dot\theta=\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$, 则 $D(\theta)v=C_4v=1$ 为如下形式的微分方程:

$$
D(\theta)v=a_1\frac{\partial^2 v}{\partial s\partial t}+a_2\frac{\partial v}{\partial s}=1,
$$

其中, a_1、a_2 为仅关于 t 的函数, 不难解得

$$
\begin{aligned}
v(s,t)=f(t)+&\left[((\tan(\theta))^2+1)\left(g(s)-\right.\right.\\
&\left.\left.\frac{1}{2}s\int\frac{F_2\sin(\theta)-F_1\cos(\theta)}{\rho\sqrt{\dot\theta}}\mathrm{d}t\right)\right]\Big/[\sqrt{\dot\theta}(-F_2\tan(\theta)+F_1)^2],
\end{aligned}
$$

其中, f 和 g 为任意函数. 这样对任意的 $\theta(t)$ 及上述的 v, 我们可以解得原方程(30)的解为

$$
\lambda_1=C_1(\theta)v,\quad W=C_2(\theta)v,\quad U=C_3(\theta)v.
$$

[参 考 文 献]

[1] 张鸿庆. 弹性力学方程组一般解的统一理论[J]. 大连工学院学报, 1978, **18**(3): 25-47.

[2] 张鸿庆, 杨光. 变系数偏微分方程组一般解的构造[J]. 应用数学和力学, 1991, **12**(2): 135-139.

[3] ZHANG Hong-qing, MEI Jian-qin. The computational differential algebraic geometrical method of constructing the fundamental solutions of system of PDEs[A]. Proceeding of the 5th UK Conference on Boundary Integral Methods[C]. Liverpool: Liverpool University Press, 2005, 82-89.

[4] 张鸿庆. 数学机械化中的 $AC = BD$ 模式[J]. 系统科学与数学, 2008, **28**(8): 1030-1039.

[5] ZHANG Hong-qing, FAN En-gui. Application of mechanical methods to partial differential equations [A]. In: Wang D M, Gao X S, Eds. Mathematics Mechanization and Applications[C]. London: Academic Press, 2000, 409-539.

[6] 张鸿庆, 冯红. 非齐次线性算子方程组一般解的代数构造[J]. 大连理工大学学报, 1994, **34**(3): 249-255.

[7] 徐芝纶. 弹性力学, 第四版[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[8] 胡育佳, 朱媛媛, 程昌钧. 在动载荷作用下框架结构大变形分析的微分代数方法[J]. 应用数学与力学, 2008, **29**(4): 398-408.

Analytic Solutions of a Class of Nonlinear Partial Differential Equations

ZHANG Hong-qing, DING Qi

(Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116023, P. R. China)

Abstract: Firstly, an approach is presented for computing the adjoint operator vector of a class of nonlinear (i. e. partial-nonlinear) operator matrix by generalizing the method presented by Zhang et al. and the conjugate operators. Secondly, a united theory is given for solving a class of nonlinear (i. e. partial-nonlinear and including all linear) and non-homogeneous differential equations by the mathematics-mechanization method. In other words, a transformation is constructed by homogenization and triangulation which can reduce the original system to the simpler one which is diagonal. Finally, some practical applications are given in elasticity equations.

Key words: AC = BD model; partial-nonlinear; adjoint; conjugate; plate and shell