

# 流体饱和多孔隙介质波动方程小波有限差分法\*

贺英, 韩波

(哈尔滨工业大学 数学系, 哈尔滨 150001)

(郭兴明推荐)

**摘要:** 研究流体饱和多孔隙介质中波动方程的数值模拟. 针对求解二维弹性波方程问题, 提出小波有限差分法. 该方法综合了小波多分辨分析计算灵活、计算效率高特性和有限差分易于实现的优点. 数值模拟的结果显示, 此方法对于求解流体饱和多孔隙介质方程的数值模拟是有效稳定的.

**关键词:** 小波多分辨分析; 数值模拟; 双相介质; 有限差分法

**中图分类号:** O175.2; O357      **文献标识码:** A

## 引 言

许多实际问题的数学模型都可以归结为偏微分方程的形式, 由于此类问题的解析解很难求得, 因此多采用数值方法来求解. 近年来, 由于地震波在流体饱和多孔隙介质中传播的数值模拟在许多实际领域, 如地球物理勘探, 地震工程, 岩石动力学等都有应用, 所以受到越来越多的关注. 1956 年 Biot<sup>[1-2]</sup> 首先建立了流体饱和多孔隙介质中弹性波传播理论. 此后, 出现了许多求解孔隙介质中波传播的数值方法. 针对二维各相异性孔隙介质波动方程, Dai 等<sup>[3]</sup> 研究了非均匀孔隙介质中波动方程的速度-应力有限差分法. Prevost<sup>[4]</sup> 提出了有限元方法求解流体饱和多孔隙介质波动方程. Narasimhan 等<sup>[5]</sup> 使用积分有限差分法, 分析了孔隙介质的流体流动. Pedercin 等<sup>[6]</sup> 针对三维蠕变孔隙介质提出了变分边界有限差分法. 邵秀民等<sup>[7]</sup> 讨论了流体饱和多孔隙介质中波传播问题的有限元解, 并提出了一种新型的无反射边界条件. 针对三维非均匀孔隙介质波传问题, Sun 等<sup>[8]</sup> 研究了非均匀网格有限差分法. 传统的数值方法在求解孔隙介质中波动方程问题上取得了一定成功, 但由于实际地下介质结构复杂且求解过程中随网格的增加而增大, 这些都不可避免地降低了传统数值方法的计算效率.

小波方法是一种新发展起来用于求解弹性波波动方程的新方法. 此方法的主要思想利用小波分解算法把波场函数分解到不同分辨率尺度空间上. 小波具有消失矩特性, 使得小波基分解下的函数和微分算子有很好的估计. 因此计算效率和存储量得到了优化. 小波方法已被

\* 收稿日期: 2008-03-20; 修订日期: 2008-09-23

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(40774056)

作者简介: 贺英(1978—), 女, 黑龙江哈尔滨人, 博士生(联系人. Tel: + 86-451-86401135; E-mail: happy-birdzhp@sdu.edu.cn).

应用于求解各种波动方程. Hong 等<sup>[9]</sup> 引进了小波基方法求解二维 SH 和 P-SV 弹性波方程. Mustafa 等<sup>[10]</sup> 采用自适应小波基方法求解偏微分方程. Xiang 等<sup>[11]</sup> 采用 B 样条小波作为尺度函数, 提出了一种新型的有限元方法. 但是, 在求解偏微分方程问题中, 小波方法并不能完全取代传统的数值方法. 在求解过程中, 可以利用小波多分辨分析特性和传统的有限差分或有限元法相结合. 例如, 张新明等<sup>[12]</sup> 将小波分析引入到有限元中, 以小波基函数来代替多项式函数作为有限元法中的插值函数来求解二维流体饱和多孔隙介质波动方程.

综上所述, 为了模拟流体饱和多孔隙介质弹性波波动方程, 本文设计了小波有限差分法. 在新算法中, 采用二阶精度的中心差分来代替时间导数, 而空间系数和微分算子由小波基来表示. 在新算法中, 小波多分辨分析的灵活性、计算效率高等特性和有限差分法易于实现的优点得到充分结合.

## 1 控制方程

地震波在流体饱和多孔隙介质与单相介质中的传播存在着很大的差异, 流体饱和多孔隙介质中, 除了包括在固体弹性介质中含有的 P 波和 S 波外, 还存在着慢 P 波, 这种慢 P 波是由固体骨架相对于孔隙流体运动产生的. 建立在连续介质力学和宏观本构关系基础上, Biot<sup>[1-2]</sup> 首次提出了流体饱和多孔隙介质波传播理论.

描述统计上述各向同性、局部均匀的孔隙弹性介质模型的物理参数有:  $\mu$  表示孔隙介质的切变模量、 $\lambda_b$  表示固体骨架的 Lame 系数、 $\lambda$  表示双相介质 Lame 系数、 $\beta$  表示孔隙率、 $\rho$  表示密度、 $\rho_s$  表示固体密度、 $\rho_f$  表示流体密度、 $K_s$  表示固体的体变模量、 $K_f$  表示流体的体变模量、 $K_b$  表示多孔骨架的体变模量.

由 Biot 理论可知, 在一些假设条件之下, 忽略了流体的粘质性的影响, 二维流体饱和多孔隙介质波动方程控制方程表示为

$$2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \frac{\partial u_x}{\partial z} + \mu \frac{\partial u_z}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \alpha M \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \alpha M \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \right] = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2} - f_1, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \frac{\partial u_x}{\partial z} + \mu \frac{\partial u_z}{\partial x} \right] + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \alpha M \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \alpha M \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \right] = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial t^2} - f_2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \alpha M \frac{\partial u_x}{\partial x} + \alpha M \frac{\partial u_z}{\partial z} + M \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + M \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \right] = \rho_f \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + m \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2} - f_1, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \alpha M \frac{\partial u_x}{\partial x} + \alpha M \frac{\partial u_z}{\partial z} + M \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + M \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \right] = \rho_f \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + m \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial t^2} - f_2, \quad (4)$$

其中,  $u_x$ 、 $u_z$  表示波场函数的固相位移,  $\omega_x$ 、 $\omega_z$  表示波场函数的流体相对于固体的位移,  $f_1 = \beta f$ ,  $f_2 = (1 - \beta)f$  是与震源函数  $f$  相关的函数. 上述方程中参数之间的关系如下:

$$K_b = \lambda_b + \frac{2}{3}\mu, \quad \alpha = 1 - \frac{K_b}{K_s}, \quad \rho = (1 - \beta)\rho_s + \beta\rho_f,$$

$$M = \frac{K_s}{\alpha + \beta(K_s/K_f - 1)}, \quad \lambda = \lambda_b + \alpha^2 M.$$

并且  $\Omega = \{(x, z) : x \in [0, a], z \in [0, b]\}$  为求解区域.

初始条件为

$$u_x(x, z, 0) = 0, \frac{\partial u_x(x, z, 0)}{\partial t} = 0, u_z(x, z, 0) = 0, \frac{\partial u_z(x, z, 0)}{\partial t} = 0, \quad (5)$$

$$\omega_x(x, z, 0) = 0, \frac{\partial \omega_x(x, z, 0)}{\partial t} = 0, \omega_z(x, z, 0) = 0, \frac{\partial \omega_z(x, z, 0)}{\partial t} = 0. \quad (6)$$

由于数值模拟只能对有限区域模拟, 必然存在边界效应, 为了消除这种人为反射, 在进行数值模拟时必须采用人工边界条件. 本文采用廖氏吸收边界作为边界条件<sup>[7]</sup>, 相关内容见参考文献[13-14].

把人工边界向外延拓两排网格, 第1排是由  $x = 0, x = a, z = b$  边沿外法线方向分别延拓  $\Delta x$  和  $\Delta z$  距离. 第2排是由第1排向外继续延拓  $2C_a \Delta t$  距离. 边界延拓情况如图1.

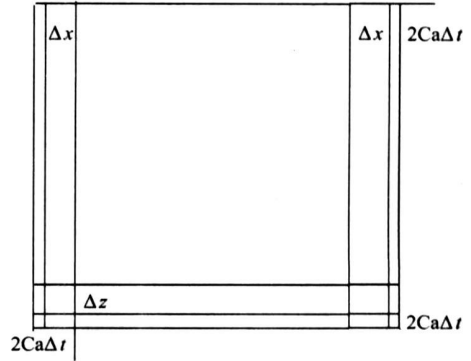


图1 边界的延拓

则新的边界计算为

$$U(\Delta x + 2C_a \Delta t, z, t + \Delta t) = a_1 U(\Delta x + 2C_a \Delta t, z, t) + a_2 U(\Delta x, z, t) + a_3 U(0, z, t) - U(\Delta x, z, t - \Delta t), \quad (7)$$

$$U(a + \Delta x + 2C_a \Delta t, z, t + \Delta t) = a_1 U(a + \Delta x + 2C_a \Delta t, z, t) + a_2 U(a + \Delta x, z, t) + a_3 U(a, z, t) - U(a + \Delta x, z, t - \Delta t), \quad (8)$$

$$U(x, b + \Delta z + 2C_a \Delta t, t + \Delta t) = a_1 U(x, b + \Delta z + 2C_a \Delta t, t) + a_2 U(x, b + \Delta z, t) + a_3 U(x, b, t) - U(x, b + \Delta z, t - \Delta t), \quad (9)$$

其中

$$\begin{cases} U = (u_x, u_z, \omega_x, \omega_z)^T, & a_1 = \frac{1+s}{1+2s}, & a_2 = 1+s, & a_3 = -\frac{2s^2}{1+2s}, \\ s = \frac{C_a \Delta t}{\Delta x} \text{ 或 } s = \frac{C_a \Delta t}{\Delta z}, \end{cases} \quad (10)$$

$C_a$  是人工边界上的入射波, 此入射波相当于双相介质中3种波: 快P波, 慢P波和S波的合成. 根据反射系数最小化原则, 即可使用如下公式来求解  $C_a$ :

$$\max_{j=1,2,3} \left| \frac{C_a}{C_j} - 1 \right| = \min_{c_{\min} \leq C \leq c_{\max}} \max_{j=1,2,3} \left| \frac{C}{C_j} - 1 \right|, \quad (11)$$

其中

$$C_{\max} = C_{p_1}, \quad C_{\min} = \min\{C_s, C_{p_2}\},$$

$C_{p_1}, C_{p_2}, C_s$  分别是快P波, 慢P波和S波的波速. 则方程(7)~(11)构成了无反射边界条件.

## 2 小波有限差分法

有限差分法在求解地球物理问题中已经被广泛使用. 此方法简单且易于实现, 缺点是采用有限差分法计算时, 为了提高精度需要增加大量的网格数, 从而加大了计算量. 本文考虑使用具有良好局部性的小波多分辨分析来减少计算量.

下面采用小波有限差分法离散控制方程(1)~(4). 等式右端的时间导数使用二阶精度的中心差分来离散, 空间波场系数和微分算子用紧支撑小波基来分解. 则二维控制方程可以离散为

$$\rho_1 u_{x,J}^{n+1} + \rho_1 \omega_{x,J}^{n+1} = (2\mu + \lambda) u_{x,J}^n + \mu u_{x,J_{zz}}^n + (\mu + \lambda) u_{z,J_{xz}}^n + \alpha M \omega_{x,J_{xx}}^n + \alpha M \omega_{z,J_{xz}}^n + 2\rho_1 u_{x,J}^n - \rho_1 u_{x,J}^{n-1} + 2\rho_1 \omega_{x,J}^n - \rho_1 \omega_{x,J}^{n-1} + f_{1,J}^n = \Phi_1, \tag{12}$$

$$\rho_1 u_{z,J}^{n+1} + \rho_1 \omega_{z,J}^{n+1} = (\mu + \lambda) u_{z,J_{xz}}^n + \mu u_{z,J_{xx}}^n + (2\mu + \lambda) u_{z,J_{zz}}^n + \alpha M \omega_{z,J_{xz}}^n + \alpha M \omega_{z,J_{zz}}^n + 2\rho_1 u_{z,J}^n - \rho_1 u_{z,J}^{n-1} + 2\rho_1 \omega_{z,J}^n - \rho_1 \omega_{z,J}^{n-1} + f_{2,J}^n = \Phi_2, \tag{13}$$

$$\rho_1 u_{x,J}^{n+1} + m \omega_{x,J}^{n+1} = \alpha M u_{x,J_{xx}}^n + \alpha M u_{z,J_{xz}}^n + M \omega_{x,J_{xx}}^n + M \omega_{z,J_{xz}}^n + 2\rho_1 u_{x,J}^n - \rho_1 u_{x,J}^{n-1} + 2m \omega_{x,J}^n - m \omega_{x,J}^{n-1} + f_{1,J}^n = \Phi_3, \tag{14}$$

$$\rho_1 u_{z,J}^{n+1} + m \omega_{z,J}^{n+1} = \alpha M u_{x,J_{xz}}^n + \alpha M u_{z,J_{zz}}^n + M \omega_{x,J_{xz}}^n + M \omega_{z,J_{zz}}^n + 2\rho_1 u_{z,J}^n - \rho_1 u_{z,J}^{n-1} + 2m \omega_{z,J}^n - m \omega_{z,J}^{n-1} + f_{2,J}^n = \Phi_4, \tag{15}$$

其中,  $u_{x,J}^n$  表示在  $J$  尺度下位移函数  $u_x$  在  $n$  时刻的近似估计,  $\omega_{x,J_{xx}}^n$  表示在  $J$  尺度下位移函数  $u_x$  在  $n$  时刻关于  $x, z$  偏导数的近似估计.  $\mu = \mu \Delta t^2, \lambda = \lambda \Delta t^2, M = M \Delta t^2, f = f \Delta t^2$ .

整理得

$$\begin{cases} u_{x,J}^{n+1} = \frac{\rho_1 \Phi_3 - m \Phi_1}{\rho_1^2 - \rho_m}, & u_{z,J}^{n+1} = \frac{\rho_1 \Phi_4 - m \Phi_2}{\rho_1^2 - \rho_m}, \\ \omega_{x,J}^{n+1} = \frac{\rho_1 \Phi_1 - \rho \Phi_3}{\rho_1^2 - \rho_m}, & \omega_{z,J}^{n+1} = \frac{\rho_1 \Phi_2 - \rho \Phi_4}{\rho_1^2 - \rho_m}. \end{cases} \tag{16}$$

初始条件离散为

$$u_{x,J}^0 = u_{x,J}^1 = 0, u_{z,J}^0 = u_{z,J}^1 = 0, \omega_{x,J}^0 = \omega_{x,J}^1 = 0, \omega_{z,J}^0 = \omega_{z,J}^1 = 0. \tag{17}$$

边界条件离散为

$$U_J^{j+1}(\Delta x + 2C_a \Delta t, z) = a_1 U_J^j(\Delta x + 2C_a \Delta t, z) + a_2 U_J^j(\Delta x, z) + a_3 U_J^j(0, z) - U_J^{j-1}(\Delta x, z), \tag{18}$$

$$U_J^{j+1}(a + \Delta x + 2C_a \Delta t, z) = a_1 U_J^j(a + \Delta x + 2C_a \Delta t, z) + a_2 U_J^j(a + \Delta x, z) + a_3 U_J^j(a, z) - U_J^{j-1}(a + \Delta x, z), \tag{19}$$

$$U_J^{j+1}(x, b + \Delta z + 2C_a \Delta t) = a_1 U_J^j(x, b + \Delta z + 2C_a \Delta t) + a_2 U_J^j(x, b + \Delta z) + a_3 U_J^j(x, b) - U_J^{j-1}(x, b + \Delta z), \tag{20}$$

其中,  $U_j^n = (u_{x,J}^n, u_{z,J}^n, \omega_{x,J}^n, \omega_{z,J}^n)^T$  表示位移向量函数  $U$  在时刻  $n$  下在  $J$  尺度下的近似估计.

### 2.1 在 $J$ 尺度下函数 $u_x^n$ 的近似估计

在  $J$  尺度下函数  $u_x^n$  的近似估计  $u_{x,J}^n$  可以通过在子空间  $W_J$  和  $V_J$  中的正交映射表示.

$$u_{x,J}^n = \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{k_1, k_2} d_{k_1, k_2}^{h,j} \phi_{k_1, k_2}^{h,j}(x, z) + \sum_{k_1, k_2} d_{k_1, k_2}^{v,j} \phi_{k_1, k_2}^{v,j}(x, z) + \sum_{k_1, k_2} d_{k_1, k_2}^{d,j} \phi_{k_1, k_2}^{d,j}(x, z) \right] + \sum_{k_1, k_2} s_{k_1, k_2}^J \Phi_{k_1, k_2}^J(x, z), \tag{21}$$

其中,  $\Phi(x, z) = \phi(x) \phi(z)$  是  $L^2(R^2)$  空间的尺度函数,  $\{\phi^\lambda(x, z), \lambda = h, v, d\}$  是相应的小波函数. 系数  $s_{k_1, k_2}^J$  满足:

$$s_{k_1, k_2}^j = \langle u_x^n, \Phi_{k_1, k_2}^j \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_x^n(x, z) \Phi_{k_1, k_2}^j(x, z) dx dz. \quad (22)$$

水平、垂直和对角细节系数  $d_{k_1, k_2}^{hj}, d_{k_1, k_2}^{vj}, d_{k_1, k_2}^{dj}$  满足:

$$d_{k_1, k_2}^{\lambda j} = \langle u_x^n, \phi_{k_1, k_2}^{\lambda j} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_x^n(x, z) \phi_{k_1, k_2}^{\lambda j}(x, z) dx dz, \quad \lambda = h, v, d. \quad (23)$$

### 2.2 算子 $T$ 的矩阵表示形式

下面先简要地回顾 Beylkinas<sup>[15]</sup> 所提出算子  $T$  的非标准形式, 以及 Hajji 等<sup>[16]</sup> 所提出的二维紧支撑小波基分解下的算子矩阵表达式. 然后在小波域下讨论微分算子  $\partial x^2$  或  $\partial x \partial z$  的分解形式.

在实际应用中, 我们一般考虑多分辨分析空间是有限维的. 算子  $T$  的非标准形式可以写成算子集合的形式:

$$T_n = \left\{ \left\{ A_j, B_j, C_j \right\}_{n-J \leq j \leq n-1}, T_{n-J} \right\}, \quad (24)$$

其中,  $V_n$  是最细的尺度空间,  $V_{n-J}$  是最粗的尺度空间,  $J$  是多分辨分析空间分解的尺度数.  $A_j = Q_j T Q_j, B_j = Q_j T P_j, C_j = P_j T Q_j, T_j = P_j T P_j$ , 其中  $P_j, Q_j$  分别是  $V_n$  和  $W_n$  空间上的正交映射.

由  $Q_j = Q_j^h + Q_j^v + Q_j^d$ , 算子  $A_j, B_j, C_j$  可以整理为

$$A_j = \sum_{\lambda \lambda' = h, v, d} A_j^{\lambda \lambda'} = \sum_{\lambda \lambda' = h, v, d} Q_j^{\lambda} T Q_j^{\lambda'}, \quad (25)$$

$$B_j = \sum_{\lambda = h, v, d} B_j^{\lambda} = \sum_{\lambda} Q_j^{\lambda} T P_j, \quad C_j = \sum_{\lambda = h, v, d} C_j^{\lambda} = \sum_{\lambda} P_j T Q_j^{\lambda}. \quad (26)$$

算子  $T$  的非标准形式改写为

$$T_n = \left\{ \left\{ A_j^{\lambda \lambda'}, B_j^{\lambda}, C_j^{\lambda} \right\}_{n-J \leq j \leq n-1; \lambda, \lambda' = h, v, d}, T_{n-J} \right\}, \quad (27)$$

其中

$$A_j^{\lambda \lambda'}: W_j^{\lambda'} \rightarrow W_j^{\lambda}, \quad \lambda, \lambda' = h, v, d,$$

$$B_j^{\lambda}: V_j \rightarrow W_j^{\lambda}, \quad \lambda = h, v, d, \quad C_j^{\lambda}: W_j^{\lambda} \rightarrow V_j, \quad \lambda = h, v, d.$$

下面以函数  $u_x$  为例, 介绍算子  $T_j = P_j T P_j$  作用于函数  $u_x$  的矩阵表示:

$$T_j u_x(x, z) = P_j T P_j(u_x) = P_j T \sum_{k_1, k_2=0}^{2^j-1} s_{k_1, k_2}^j \Phi_{k_1, k_2}^j(x, z) = \sum_{k_3, k_4=0}^{2^j-1} s_{k_3, k_4}^j \Phi_{k_3, k_4}^j(x, z), \quad (28)$$

其中  $s_{k_1, k_2}^j = \langle u_x, \Phi_{k_1, k_2}^j \rangle, s_{k_3, k_4}^j = \sum_{k_1, k_2=0}^{2^j-1} \langle \Phi_{k_3, k_4}^j, T(\Phi_{k_1, k_2}^j) \rangle s_{k_1, k_2}^j.$

定义矩阵  $T^j$ , 其元素表示为  $2^j \times 2^j$  矩阵块  $T^{j, k_3, k_4} (k_3, k_4 = 0, 1, \dots, 2^j - 1)$ ,

$$T^j = \begin{pmatrix} T^{j, 0, 0} & T^{j, 0, 1} & \dots & T^{j, 0, 2^j-1} \\ T^{j, 1, 0} & T^{j, 1, 1} & \dots & T^{j, 1, 2^j-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ T^{j, 2^j-1, 0} & T^{j, 2^j-1, 1} & \dots & T^{j, 2^j-1, 2^j-1} \end{pmatrix}, \quad (29)$$

其中, 矩阵块  $T^{j, k_3, k_4}$  的元素表示为

$$T_{k_1, k_2}^{j, k_3, k_4} = \langle \Phi_{k_3, k_4}^j, T(\Phi_{k_1, k_2}^j) \rangle, \quad k_1, k_2 = 0, 1, \dots, 2^j - 1.$$

那么算子  $T_j$  作用在  $u_x$  上的矩阵表达式中的元素均可由  $s^j = (s_{k_1, k_2}^j)$  表示. 依此类推, 算

子  $T_n$  中的  $A^{j, \lambda, \lambda}, B^{j, \lambda}, C^{j, \lambda}, T^j$  可以表示为

$$A_{k_1, k_2}^{j, \lambda, \lambda, k_3, k_4} = \sum_{m_1, m_2, m_3, m_4=0}^{L-1} G_{m_1, m_2}^{\lambda} G_{m_3, m_4}^{\lambda} T_{m_1+2k_1, m_2+2k_2}^{j+1, m_3+2k_3, m_4+2k_4}, \quad (30)$$

$$B_{k_1, k_2}^{j, \lambda, k_3, k_4} = \sum_{m_1, m_2, m_3, m_4=0}^{L-1} H_{m_1, m_2} G_{m_3, m_4}^{\lambda} T_{m_1+2k_1, m_2+2k_2}^{j+1, m_3+2k_3, m_4+2k_4}, \quad (31)$$

$$C_{k_1, k_2}^{j, \lambda, k_3, k_4} = \sum_{m_1, m_2, m_3, m_4=0}^{L-1} G_{m_1, m_2}^{\lambda} H_{m_3, m_4} T_{m_1+2k_1, m_2+2k_2}^{j+1, m_3+2k_3, m_4+2k_4}, \quad (32)$$

$$T_{k_1, k_2}^{j, k_3, k_4} = \sum_{m_1, m_2, m_3, m_4=0}^{L-1} H_{m_1, m_2} H_{m_3, m_4} T_{m_1+2k_1, m_2+2k_2}^{j+1, m_3+2k_3, m_4+2k_4}. \quad (33)$$

## 2.3 小波域上微分算子 $\partial x^2$ 和 $\partial x \partial z$ 分解形式

对于  $T = \partial x \partial z$ ,

$$\begin{aligned} T_{k_1, k_2}^{j, k_3, k_4} &= \langle \Phi_{k_3, k_4}, T(\Phi_{k_1, k_2}) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{k_3, k_4}(x, z) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} [\Phi_{k_1, k_2}(x, z)] dx dz = \\ &= \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{j, k_3}(x) \frac{\partial}{\partial x} (\phi_{j, k_1}(x)) dx \right] \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{j, k_4}(z) \frac{\partial}{\partial z} (\phi_{j, k_2}(z)) dz \right] = \\ &= 2^j r_{k_3-k_1} \cdot 2^j r_{k_4-k_2}, \end{aligned}$$

其中  $r_l = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x-l) \phi(x) dx$ .

对于  $T = \partial x^2$ ,

$$\begin{aligned} T_{k_1, k_2}^{j, k_3, k_4} &= \langle \Phi_{k_3, k_4}, T(\Phi_{k_1, k_2}) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{k_3, k_4}(x, z) \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\Phi_{k_1, k_2}(x, z)] dx dz = \\ &= \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{j, k_3}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\phi_{j, k_1}(x)) dx \right] \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{j, k_4}(z) \phi_{j, k_2}(z) dz \right] = \\ &= 2^j r_{\frac{2}{k_3} k_1} \cdot \delta_{k_2 k_4}, \end{aligned}$$

其中,  $r_l^{(2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x-l) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x) dx$ . 那么矩阵块  $T^n$  就由系数  $r_l, r_l^{(2)}$  完全决定, 关于求解系数  $r_l, r_l^{(2)}$  的问题请参照文献[15].

因为小波多分辨分析具有消失矩特性, 所以一般来说微分算子和波场函数的表达式是稀疏. 即使在最细尺度空间  $V^n$  上, 微分算子和波场函数矩阵表达式很稠密, 粗一级尺度空间上的矩阵也会很稀疏. 这样我们可以忽略足够小的那部分细节, 即忽略所有比某个特定阈值小的系数, 令其值为 0.

不失一般性, 以两尺度空间  $V_1, V_2$  为例介绍算法, 那么算法步骤如下:

步骤 1 给定迭代总时间  $T$ , 阈值  $\varepsilon$ ;

步骤 2 采用有限差分法离散时间导数(如方程(12)~(15)).

步骤 3 使用 Daubechies 紧支撑正交小波基分解空间波场函数和微分算子;

步骤 4 把波场函数映射到较粗的尺度空间  $V_1$  上, 得到系数  $s_{k_1, k_2}^1$ ;

步骤 5 计算差分方程(16)中算子的矩阵表达式. 然后由迭代公式(16), 初始条件(17)和吸收边界条件(18)~(20)来模拟位移函数  $u_x, u_z, \omega_x, \omega_z$  的近似解;

步骤 6 重构较细尺度空间  $V_2$  的系数  $s_{k_1, k_2}^2$ ;

步骤 7 重复步骤 5, 直至求得原始空间下位移函数  $u_x$ 、 $u_z$ 、 $\omega_x$ 、 $\omega_z$  的近似解.

### 3 稳定性条件

为了保证数值计算的稳定性及控制数值频散, 参照弹性波方程数值解的稳定性条件<sup>[17]</sup>, 方程(12) ~ (15) 稳定需要满足

$$\Delta t \leq \frac{h}{(V_p^2 + V_s^2)^{1/2}}, \tag{34}$$

其中,  $\Delta t$  是时间步长,  $h$  是空间步长,  $V_p$  和  $V_s$  分别是 P 波和 S 波的波速.

### 4 数值模拟

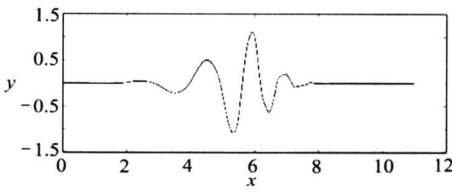
为了验证新方法有效性, 用小波有限差分法求解流体饱和和多孔隙介质弹性波数值模拟问题. 首先, 选取一个均匀模型. 震源函数为振幅 0.6 m、频率 80 Hz 的正弦函数.

描述地下介质的物理参数满足

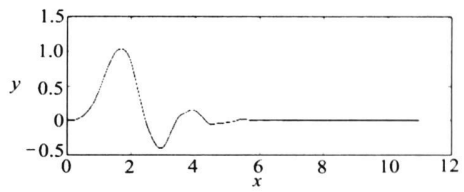
$$\lambda_b = 3.3568 \times 10^6 \text{ Pa}, \mu = 4.32 \times 10^6 \text{ Pa}, K_f = 1.25 \times 10^6 \text{ Pa}, \beta = 0.4,$$

$$K_s = 6.296 \times 10^6 \text{ Pa}, \rho_t = 1.000 \text{ kg/m}^3, \rho_s = 2.400 \text{ kg/m}^3, m = 722.$$

第 1 个算例中, 我们选取时间步长  $\Delta t = 0.002 \text{ s}$ , 求解区域为  $[0, 1500 \text{ m}] \times [0, 1500 \text{ m}]$ , 震源位于  $(400 \text{ m}, 700 \text{ m})$ , 空间步长  $\Delta x = \Delta z = 10 \text{ m}$ , 具有 6 阶消失矩的 Daubechies 小波作为小波基, 相应的小波函数和尺度函数图像见图 2. 阈值为  $\varepsilon = 10^{-3} \text{ m}$ . 选定初始网格为  $200 \times 200$ , 分解的最大尺度为 5. 采用小波有限差分法模拟流体饱和和多孔隙介质波动方程的地震合成记录图如图 3.

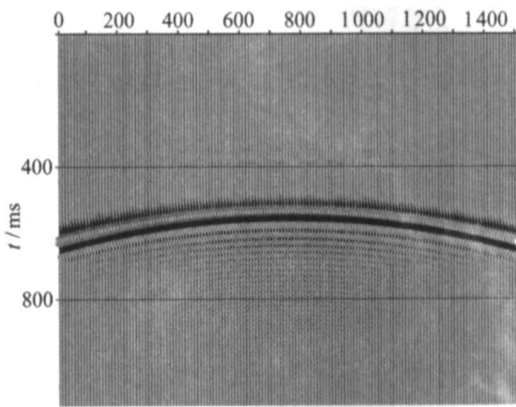


(a) db 6 小波函数

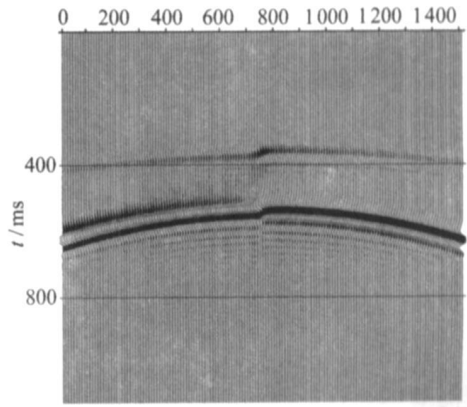


(b) db 6 尺度函数

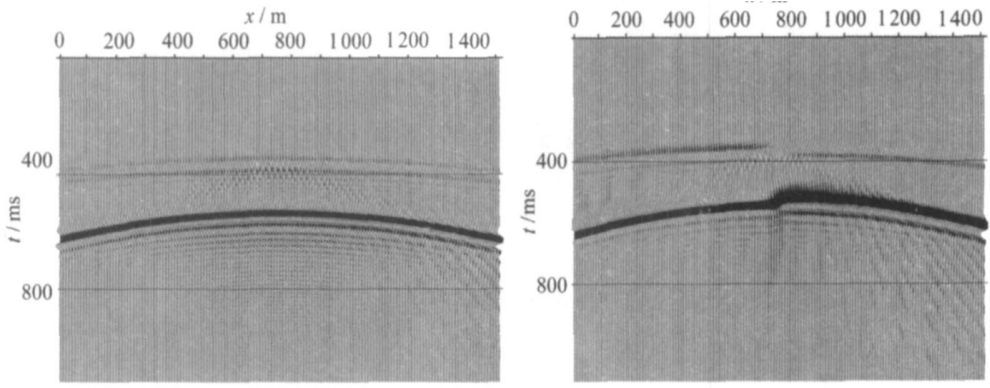
图 2 db 6 的尺度函数和小波函数



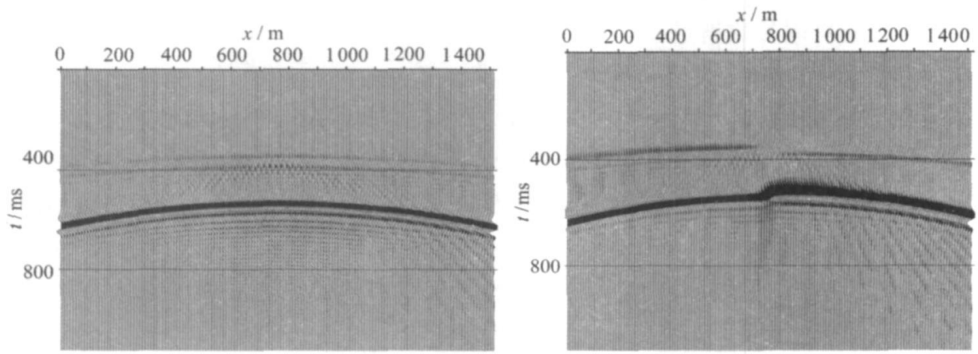
(a)



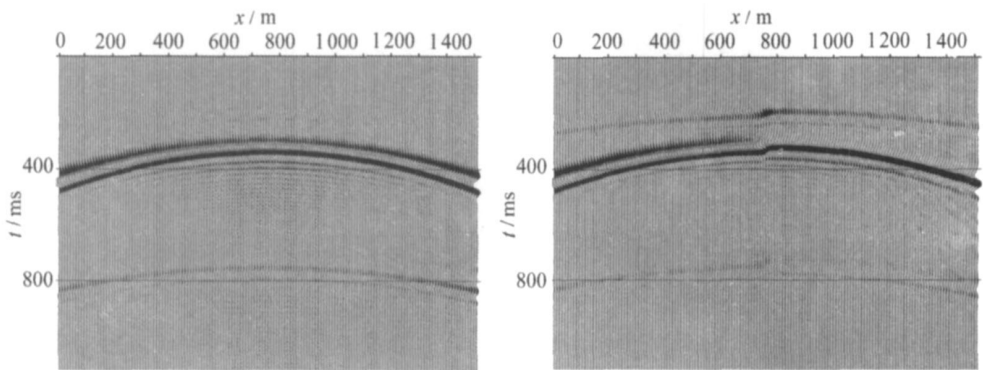
(b)



(c) (d)  
图3 均匀介质模型的位移函数的地震合成记录图



(a) (b)



(c) (d)

图4 双层介质模型的位移函数的地震合成记录图

第2个算例中,我们考虑的介质为双层介质.上下层介质孔隙率的取值分别为0.2和0.4,除孔隙率之外的其他参数取值以及求解区域,震源位置和时间空间步长的选取与例1相同.图4给出了双层模型的地震合成记录图,可以从图象中清晰的看到界面反射.图3和图4都可以观察到波的频散和耗散.数值模拟试验是在配置为 Intel Core Dou 1.6 GHz 的电脑平台下运行的.



## 5 结 论

本文结合廖氏吸收边界,提出了小波有限差分法,并使用新方法研究了流体饱和多孔介质波动方程数值模拟。此方法结合了小波多分辨分析和有限差分法二者的优点,在小波域上求解,减少了计算量,增加了计算效率。数值试验结果表明,此方法是可行有效的。

致谢 作者感谢哈尔滨工业大学创新团队资助计划对本文的资助。

### [参 考 文 献]

- [1] Biot M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid: low-frequency range[J]. *Acoustical Society of America*, 1956, **28**(2): 168-178.
- [2] Biot M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid: higher-frequency range[J]. *Acoustical Society of America*, 1956, **28**(2): 168-178.
- [3] Dai N, Vafidis A, Kanasevich E R. Wave propagation in heterogeneous, porous media: A velocity-stress, finite-difference method[J]. *Geophysics*, 1995, **60**(2): 327-340.
- [4] Prevost J H. Wave propagation in fluid saturated porous media: an efficient finite element procedure [J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 1985, **4**(4): 183-202.
- [5] Narasimhan T N, Witherspoon P A. An integrated finite difference method for analyzing fluid flow in porous media[J]. *Water Resources Research*, 1976, **12**(1): 57-64.
- [6] Pedercini M, Patera A T, Cruz M E. Variational bound finite element methods for three-dimensional creeping porous media and sedimentation flows[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1998, **26**(2): 145-175.
- [7] 邵秀民, 蓝志凌. 流体饱和多孔介质波动方程的有限元解法[J]. *地球物理学报*. 2000, **43**(2): 264-277.
- [8] SUN Wei-tao, YANG Hui-zhu. Elastic wavefield calculation for heterogeneous anisotropic porous media using the 3D irregular-grid finite-difference[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, **16**(4): 283-299.
- [9] Hong T K, Kennett B L N. A wavelet-based method for simulation of two-dimensional elastic wave propagation[J]. *Geophysical Journal International*, 2002, **150**(3): 610-638.
- [10] Mustafa M T, Siddiqui A A. Wavelet optimized finite difference method with non-static regridding [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, **18**(6): 203-211.
- [11] Xiang J W, Chen X F, He Z J, et al. The construction of 1D wavelet finite elements for structural analysis[J]. *Computational Mechanics*, 2007, **40**(2): 325-339.
- [12] 张新明, 刘克安, 刘家琦. 流体饱和多孔介质二维弹性波方程正演模拟的小波有限元法[J]. *地球物理学报*, 2005, **48**(5): 1156-1166.
- [13] LIAO Zhen-peng, Wong H L, YANG Bai-po, et al. A transmitting boundary for transient wave analyses [J]. *Scientia Sinica, A*, 1984, **27**(10): 1063-1076.
- [14] LIAO Zhen-peng, Wong H L. A transmitting boundary for the numerical simulation of elastic wave propagation[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 1984, **3**(4): 174-183.
- [15] Beylkin G. On the representation of operators in bases of compactly supported wavelets[J]. *SIAM Numerical Analysis*, 1992, **29**(1): 1716-1740.
- [16] Hajji M A, Melkonian S, Vaillancourt V. Representation of differential operator in wavelet basis[J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2004, **47**(6): 1011-1033.

- [17] Kelly K R, Ward R W, Treitel S, et al. Synthetic seismograms: a finite-difference approach[J]. *Geophysics*, 1976, 41(1): 2-27.

## Wavelet Finite-Difference Method for the Numerical Simulation of Wave Propagation in Fluid-Saturated Porous Media

HE Ying, HAN Bo

(Department of Mathematics, Harbin Institute of Technology,  
Harbin 150001, P. R. China)

**Abstract:** The numerical simulation of wave propagation in fluid-saturated porous media is considered. A wavelet finite-difference method was proposed for solving the 2-D elastic wave equation. This algorithm combines the flexibility and computational efficiency of wavelet multiresolution method with the easy implementation of finite-difference method. And the orthogonal wavelet basis provides a natural framework, which adapts spatial grids to local wavefield properties. Numerical results illustrate the value of the approach as an accurate and stable tool for the simulation of wave propagation in fluid-saturated porous media.

**Key words:** wavelet multiresolution method; numerical simulation; fluid-saturated porous medium; finite-difference method