

计算可压缩边界层转捩及湍流的一种新方法——PSE+ DNS*

董明^{1,3}, 张永明², 周恒¹

(1. 天津大学 力学系, 天津 300072;

2. 天津大学 机械工程学院, 天津 300072;

3. 天津市现代工程力学重点实验室, 天津 30072)

(我刊编委周恒来稿)

摘要: 提出了一种计算可压缩边界层转捩及湍流的新方法, 它尤其适用于从小扰动开始的转捩及湍流计算. 在层流阶段, 直至转捩中的 breakdown 开始前, 用抛物化稳定性方程(PSE)计算. 然后用直接数值模拟(DNS)计算转捩过程和湍流. 其入口条件是用 PSE 方法在该处得到的扰动. 在两个测试算例中, 包括亚音速和超音速边界层, 此法得到的转捩位置和湍流都与只用 DNS 计算整个过程所得的一致. 使用该方法的优点在于计算量比只用 DNS 方法小得多.

关键词: 转捩; 湍流; 抛物化稳定性方程; 直接数值模拟

中图分类号: O35; O357.4; O357.5 **文献标识码:** A

引言

可压缩边界层的转捩预测及湍流计算, 对很多工程和技术问题, 特别是飞行器设计, 是非常重要的. 超音速边界层的转捩及湍流的实验很难做而且费用高, 且无法得到比较详尽的数据. 因此, 用 DNS 提供的数据作为检验理论研究和工程计算方法的参考, 是目前唯一可行的方法.

但对于某些问题 DNS 花费也很高, 例如从小扰动开始的转捩, 因为这时需要一个在流向很长的计算域. 对于这样的问题, 寻找一个能大大减少计算量的方法就很有必要.

自然转捩可分为下面 4 个阶段. (i) 外界的扰动, 在感受性(receptivity)机理的作用下, 会在边界层中引发相应的扰动波. 对在高空飞行的飞行器来说, 这种外界扰动的幅值一般很小, 产生的边界层内扰动的初始幅值也就很小, 也就在 0.01% 量级. 此时扰动的演化遵循线性稳定性理论. (ii) 如果小扰动逐渐放大, 非线性作用将逐渐起到越来越重要的作用, 越来越多的

* 收稿日期: 2008-09-27; 修订日期: 2008-10-16

基金项目: 国家自然科学基金重点基金资助项目(10632050); 国家自然科学基金重大研究计划资助项目(90716007); 全国博士学位论文作者专项基金资助项目(200328)

作者简介: 董明(1981—), 男, 辽宁人, 博士(Tel: +86-22-27403374; E-mail: dongm27890175@126.com);

张永明(1979—), 男, 云南人, 博士(Tel: +86-22-27403374; E-mail: yongmingzh@yahoo.com.cn);

周恒(联系人, Tel: +86-22-27890533; Fax: +86-22-27407025; E-mail: hzhou1@tju.edu.cn).

谐波将产生, 平均流剖面逐渐变化. 不过在这个阶段剖面的变化非常缓慢. (iii) 当平均流剖面的变化导致其线性稳定性特征发生显著变化时, 从层流到湍流的转捩过程开始. (iv) 转捩完成后, 流动变为湍流. 图 1 是从层流到湍流转捩的示意图, 图中 (i) ~ (iv) 分别对应上文自然转捩过程中的 4 个阶段, A 点与 B 点分别为转捩阶段的起止点.

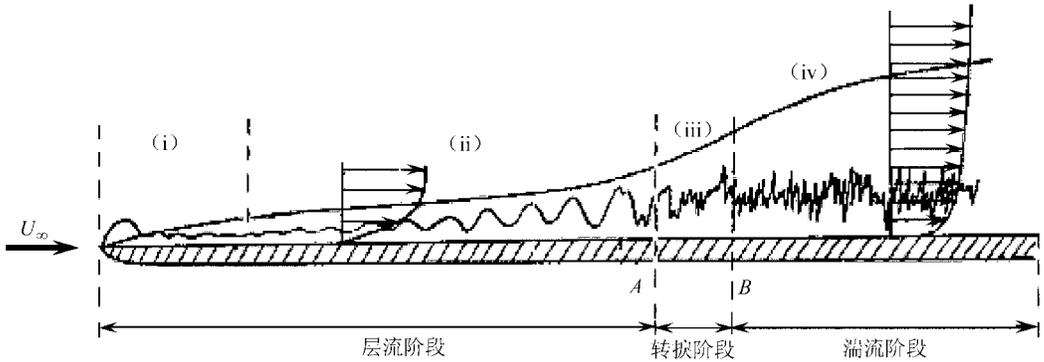


图 1 边界层问题示意图

用 DNS 方法计算上述过程, 要在计算域入口处引入小扰动. 原则上整个转捩过程都可以模拟. 但是, 如果扰动的初始幅值很小, 流向计算域就要很长, 这就需要用功能很强的计算机, 甚至这么大的计算量是承受不了的.

张永明和周恒曾用 PSE 方法对可压缩边界层中的扰动演化做了计算, 其结果与 DNS 所得一致, 证实了 PSE 方法的结果是可靠的^[1-2]. 他们还用 PSE 方法的结果进行了转捩预测, 结果同样和用 DNS 所得结果吻合得很好^[3]. 这启发我们也许可以用下述方法计算整个转捩过程, 先用 PSE 计算转捩中 breakdown 过程开始前的整个层流阶段, 然后将该处的扰动作为空间模式 DNS 的入口条件, 指望这样可直接进入 breakdown 阶段, 且整个层流到湍流的转捩过程及此后的湍流与只用 DNS 方法所得的吻合.

在 PSE 末端的扰动包含很多不同频率及波数的波, 但它们都是已知的, 所以将它们用作 DNS 的入口条件是很容易的.

后面将研究两个测试算例.

1 数值方法

在图 1 中 A 点之前, 流动都是层流, 用 PSE 方法计算. 事实上, A 点的位置是在计算过程中得到的, 而不是事先给出的. 然后将 A 点处的扰动作为第二段, 即空间模式 DNS 的入口条件, 并继续计算至湍流阶段.

1.1 PSE 方法

在 PSE 方法中, 扰动矢量 ϕ 表示为

$$\phi(x, y, z, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}_{mn}(x, y) e^{i \left[\int_0^x \alpha_{mn}(x) dx + n \beta z - m \omega t \right]}, \quad (1)$$

其中, $\hat{\phi}_{mn} = (\hat{\rho}, \hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{T})^T$ 为形状函数矢量, x 、 y 和 z 分别为流向、法向和展向坐标, t 为时间, α 为复数, 它的实部 α_r 表示流向波数, 虚部的相反数 $-\alpha_i$ 表示流向的增长率, β 为展向波数, ω 为频率, m 和 n 为模数.

控制方程和数值方法可见其它文章, 例如文献[1]. 最后的非线性抛物化稳定性方程形式如

$$V_{yy}^j \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{mn}}{\partial y^2} + \left(\hat{A}_{mn} \frac{\partial \hat{\phi}_{mn}}{\partial x} + \hat{B}_{mn} \frac{\partial \hat{\phi}_{mn}}{\partial y} + \hat{D}_{mn} \hat{\phi}_{mn} \right) = \hat{F}_{mn},$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2)$$

其中, V_{yy}^j 、 \hat{A} 、 \hat{B} 、 \hat{D} 是系数矩阵, \hat{F} 是非线性项矢量.

1.2 DNS 方法

控制方程为守恒型的三维可压缩方程组:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \mathbf{E}_{vj}}{\partial x_j}, \quad (3)$$

其中, x_j 为坐标, 且 $j = 1, 2, 3$ 分别表示 3 个方向; $\mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho e_s)^T$, u, v, w 为 3 个方向的速度, ρ 是密度, $e_s = (u^2 + v^2 + w^2)/2 + p/\vartheta(\gamma - 1)$, p 为压力, γ 为比热比; \mathbf{E}_j 与 \mathbf{E}_{vj} 分别为对流项与粘性项. 计算中, 对流项采用五阶迎风差分格式, 粘性项采用六阶中心型差分格式, 时间推进采用二阶 Runge-Kutta 法. 详见文献[4].

通常, DNS 在展向使用周期性边界条件. 为了符合这一条件, 在 PSE 计算中扰动也应满足同样的周期性. PSE 中的初始扰动的展向波数的公倍数不要比初始扰动的波数中最大的大太多, 否则计算量将大很多.

2 算例对比

研究的两个测试算例分别是超音速和亚音速平板边界层的转捩. 将结果与只用 DNS 方法所得的结果做对比.

2.1 超音速平板湍流边界层的转捩

来流 Mach 数为 4.5, 以来流速度、密度和粘性系数, 以及计算域入口处边界层排移厚度定义的 Reynolds 数为 17 000, 壁面为绝热条件. 遗憾的是, 由于计算量太大, 目前没有从小扰动开始的转捩的空间模式 DNS 的结果, 所以只好取黄章峰的时间模式 DNS 的结果^[5]作为对比的标准. 为了将时间模式 DNS 的结果与空间模式 DNS 的比较, 需要做一个时空变换. 张永明和周恒发现, 如果用形如 $x = 0.92 t$ 的变换, 用 PSE 方法预测的转捩位置将与黄章峰的结果吻合得很好^[3], 其中 0.92 为初始扰动的平均相速度, x 是到 PSE 计算域入口的距离, t 是从时间模式 DNS 开始所流逝的时间. 黄章峰^[5]的计算域为 $L_x \times L_y \times L_z = 31.4 \times 40 \times 20.1$, 计算网格点数为 $N_x \times N_y \times N_z = 128 \times 256 \times 128$, 流向与展向均为均匀网格, 法向为变间距网格, $\Delta y_w^+ = 0.38$. 这里, L_x, L_y, L_z 是以初始时刻的层流边界层排移厚度为特征量的无量纲长度, Δy_w^+ 为以壁面单位为特征量的壁面处法向无量纲网格宽度.

表 1 算例 1 的初始扰动参数

扰动情况	幅值	流向波数 α_i	流向增长率 $-\alpha_i$	展向波数 β_i	频率 ω
扰动 I	0.005	0.599	0.001 62	0.0	0.5
扰动 II	0.005	0.604	0.003 36	0.3	0.5
扰动 III	0.005	0.385	0.011 6	0.6	0.3

PSE 的基本流是来流 Mach 数 4.5、采用绝热壁面条件的相似性解, 在 PSE 计算的开始处边

界层的 Reynolds 数与黄章峰^[5]的相同, 即 17 000. 初始扰动与文献[5]中 PSE 计算所用的相同, 即 3 个小幅值的 T-S, 其参数见表 1. 作为入口条件, 它们都只是 y, z, t 的函数, 流向波数实际并不显式出现. 法向网格点数 $N_y = 301$, 流向步长 $\Delta x = 1$. 模数 m 的值从 -15 到 15, n 的值从 -7 到 7, 这样就把基本波的三次谐波都包含在内了.

在层流阶段, 摩擦因数 C_f 缓慢下降, 直至 $x = 228$ 处计算发散. PSE 计算发散表示层流到湍流的转捩中的 breakdown 开始了. 这一段如果用 DNS 计算, 所需计算时间要多将近 200 倍. 在 $x > 228$ 处, PSE 方法失效, 所以改用 DNS 方法. 我们选取 $x = 227$ 处为空间模式 DNS 计算域的入口.

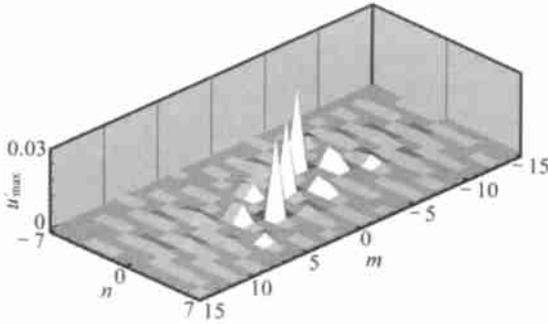
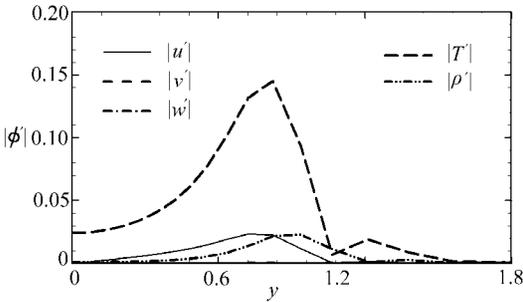
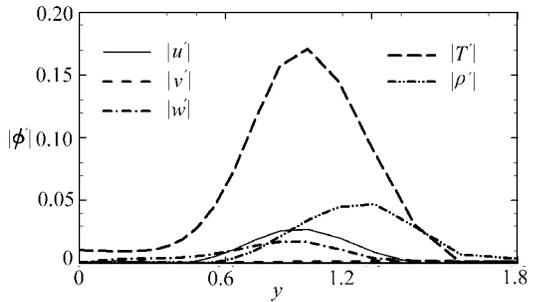


图 2 PSE 得到所有波的幅值

对应于 m (从 -15 到 15) 和 n (从 -7 到 7) 的范围, PSE 中共有 465 个波, 所以在空间模式 DNS 的入口处也有相同数目的波. 图 2 给出了在 $x = 227$ 处各个波的幅值在模数空间 (m, n) 中的分布. 可以看出, 有些波幅值很小. 因而, 也许我们可以在 DNS 计算的入口条件中略去一些波. 但这样做并没有带来太多好处, 因为靠减少入口处波的数量而减少的计算量是小到可以忽略不计的, 除非我们能够在一开始就减小 m 和 n 的取值范围, 且确有把握不影响最后的结果, 从而在 PSE 计算中减少一些计算量. 但目前我们无法给出如何这样做的具体方法.



(a) (0,0) 波的模值



(b) (3,2) 与 (3,-2) 波的模值

图 3 在 $x = 227$ 处 PSE 的计算结果

图 2 中的波中, 幅值最大的为 $(0, 0)$ 、 $(3, 2)$ 与 $(-3, -2)$ 模的波. 其中, $(0, 0)$ 模的波为基本流修正, 它的模值的法向分布如图 3(a) 所示. $(3, 2)$ 与 $(-3, -2)$ 波为一对共轭波, 它们的模值的分布相同, 如图 3(b) 所示.

从 $x = 227$ 处开始使用空间模式的 DNS.

入口条件为层流基本流叠加上 PSE 方法得到的在 $x = 227$ 处的全部扰动波, 壁面处使用无滑移和绝热条件, 上边界条件就是自由来流, 展向用周期边界条件. 计算域出口处加一个嵌边区以保证波不会反射进计算域. 计算域大小为 $L_x \times L_y \times L_z = 315 \times 40 \times 20.1$, 网格点数为 $N_x \times N_y \times N_z = 1261 \times 56 \times 128$, 流向与展向均为均匀网格, 法向为变间距网格, Δy_w^+ 为 0.36.

将 C_f 曲线与黄章峰^[5]所得的对比, 如图 4 所示. 正如我们所希望的那样, 计算域入口下

游很快进入 breakdown 阶段, 两段组合的 C_f 曲线与用 DNS 计算整个问题所得的吻合得很好. 图 5 与图 6 分别给出边界层排移厚度与形状因子. 可以看出, 吻合的情况也是令人满意的.

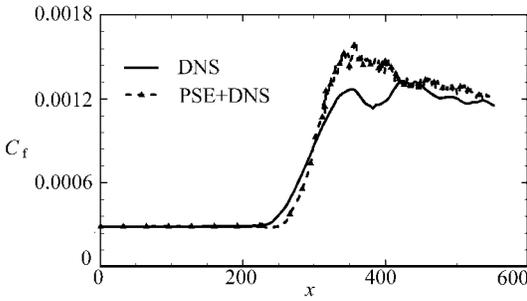


图 4 C_f 曲线的分布

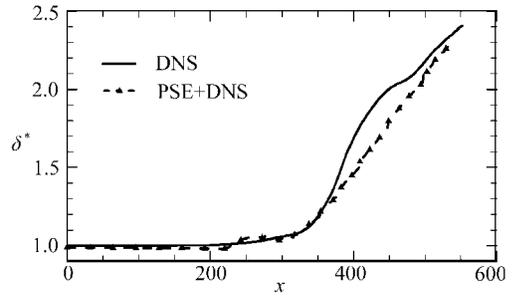


图 5 排移厚度的分布

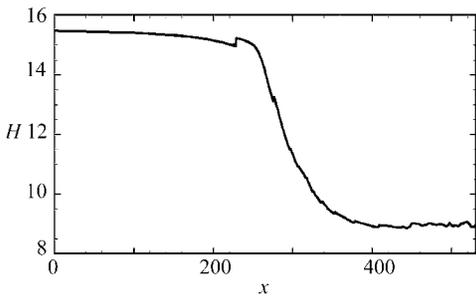


图 6 形状因子的分布

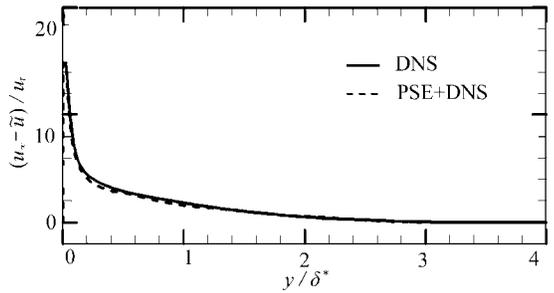


图 7(a) 亏损速度

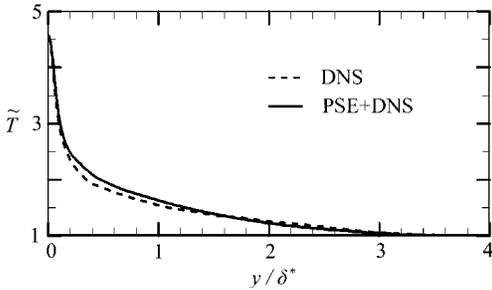


图 7(b) 温度

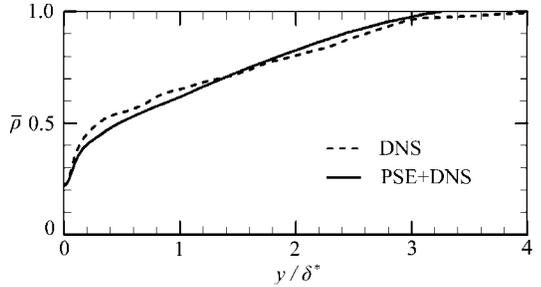


图 7(c) 密度

图 7 湍流区剖面的法向分布

在湍流区 $x = 530$ 处, 此法算出的亏损速度、温度和密度分布与只用 DNS 方法得到的吻合得很好, 如图 7 所示.

不同流向位置的流向平均速度在 Van Driest 变换以后几乎重合, 且均满足不可压缩壁面律, 如图 8 所示.

2.2 亚音速平板边界层的转捩

对于不可压缩平板边界层直至湍流的转捩问题, 李宁^[6]做过空间模式的 DNS, 可以此为参照来检验我们的方法. 为了与他的结果相匹配, 我们的可压缩流的程序中的 Mach 数取为 0.2.

以来流参数与计算域入口处边界层排移厚度定义的 Reynolds 数为 732. 李宁^[6]的计算域

的尺度为 $L_x \times L_y \times L_z = 640 \times 40 \times 26.0$, 这些长度已以入口处层流边界层的排移厚度无量纲化, 计算网格点数为 $N_x \times N_y \times N_z = 561 \times 151 \times 128$. 流向与展向均为均匀网格, 法向为变间距网格, 即用壁面单元为特征尺度的壁面处法向网格宽度, $\Delta y_w = 0.0319$.

与第一个测试算例相同, 用 PSE 方法计算边界层的层流阶段. 法向网格点数 $N_y = 301$, 流向步长 $\Delta x = 2$. 入口引入与文献[6]相同的 T-S 波, 其参数如表 2 所示. 方程 (1) 中 m 和 n 的范围为 -7 到 7 和 -3 到 3, 这保证了能包含了所有的基本波的三次谐波.

表 2 算例 2 的初始扰动参数

扰动情况	幅值	流向波数 α_i	流向增长率 $-\alpha_i$	展向波数 β	频率 ω
扰动 I	0.01	0.249	0.003 50	0.0	0.090 90
扰动 II	0.000 1	0.110	- 0.006 51	0.241 8	0.045 45
扰动 III	0.000 1	0.110	- 0.006 51	- 0.241 8	0.045 45

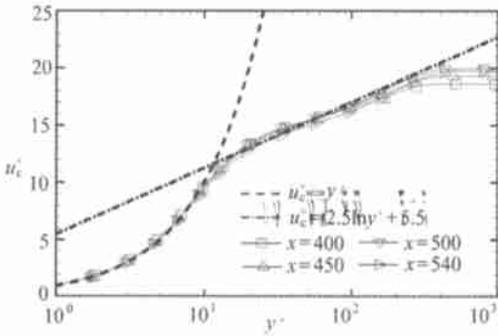


图 8 流向平均速度壁面律

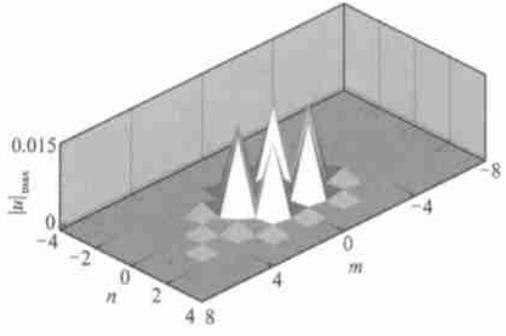


图 9 PSE 得到所有波的幅值

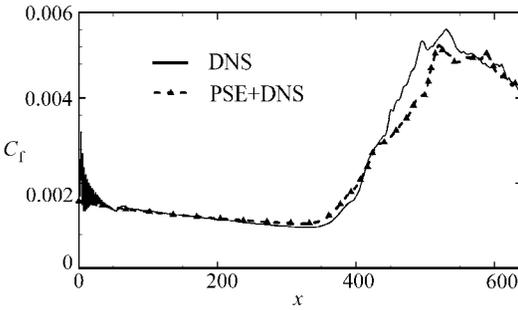


图 10 C_f 曲线的分布

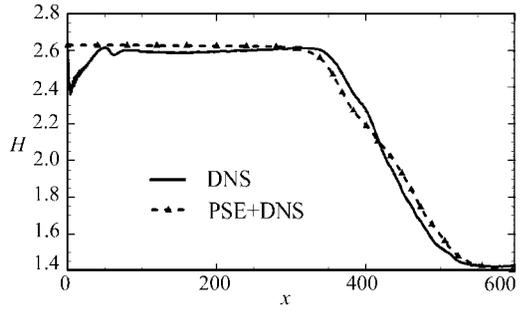


图 11 形状因子的分布

用 PSE 方法计算到 $x = 306$ 处, C_f 曲线开始快速上升, 该处即被认为是 breakdown 过程的起始位置. 层流阶段 PSE 的计算量又比李宁^[6]用 DNS 时的小两个数量级. PSE 方法中共包含了 105 个波. 它们在 $x = 306$ 处的幅值如图 9 所示.

从 $x = 306$ 处开始, 用空间模式的 DNS 继续计算. 边界条件同 2.1 节, 计算域为 $L_x \times L_y \times L_z = 334 \times 40 \times 26.0$, 计算网格点数为 $N_x \times N_y \times N_z = 669 \times 56 \times 128$. Δy_w 为 0.003 17.

图 10 给出了本文计算出的 C_f 曲线与李宁^[6]的对比. 又如所希望的那样, 在 $x = 306$ 处下游, 很快就进入 breakdown 过程, 且得到的 C_f 曲线与李宁^[6]完全用 DNS 得到的吻合得很好. 图 11 给出边界层的形状因子, 也是吻合得很好.

图 12 给出 $x = 560$ 处流向平均速度剖面. 可以看出我们的结果与李宁^[6]的结果吻合得很好. 图 13 给出该处壁面率的分布, 这反映出了典型的湍流统计特性.

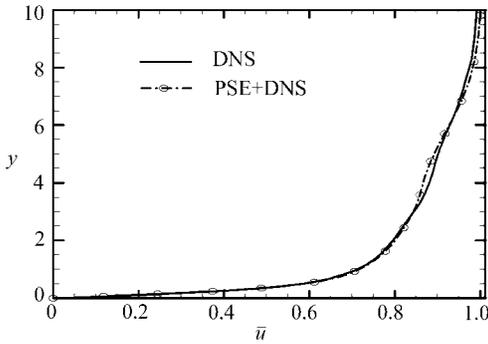


图 12 流向平均速度的对比

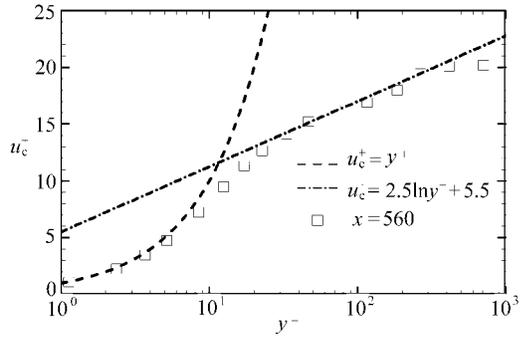


图 13 壁面率

3 结 论

1) 本文提出了一种新的计算可压缩边界层转捩和湍流的方法, 即 PSE+ DNS. 它尤其适用于从小扰动开始的计算.

2) 此方法得到的转捩位置、转捩过程及湍流流场都与完全用 DNS 所得的一致.

3) 对于从小扰动开始的转捩, 用 PSE 方法在层流阶段的计算量比用 DNS 方法的小两个数量级. 对于湍流阶段, 由于完全用 DNS 方法必须将层流区包含在内, 而新方法则不用, 所以我们的方法的计算量明显比完全用 DNS 方法的小得多.

注 本文的思想是在与周恒教授讨论中形成的, 文中的 PSE 计算由第二作者完成, DNS 计算由第一作者完成.

[参 考 文 献]

- [1] 张永明, 周恒. 抛物化稳定性方程在可压缩边界层中应用的检验[J]. 应用数学和力学, 2007, 28(8): 883– 893.
- [2] 张永明, 周恒. PSE 在超音速边界层二次失稳问题中的应用[J]. 应用数学和力学, 2008, 29(1): 1–7.
- [3] 张永明, 周恒. PSE 在可压缩边界层转捩问题中的应用[J]. 应用数学和力学, 2008, 29(7): 757–763.
- [4] 董明. 马赫数为 6 的零攻角钝锥湍流边界层空间演化的直接数值模拟[A]. 见: 第 6 届西北地区计算物理学术会议论文集[C]. 陕西汉中, 2008, 90– 97.
- [5] 黄章峰. 超音速平板边界层从层流到湍流的转捩机理及湍流特性[D]. 博士学位论文. 天津: 天津大学, 2006.
- [6] 李宁. 基于空间模式的平板边界层层流到湍流转捩的研究[D]. 博士学位论文. 天津: 天津大学, 2007.

A New Method for Computing Laminar– Turbulent Transition and Turbulence in Compressible Boundary Layers –PSE+ DNS

DONG Ming^{1,3}, ZHANG Yong– ming², ZHOU Heng¹

(1. Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China;

2. School of Mechanical Engineering, Tianjin University,
Tianjin 300072, P. R. China;

3. Tianjin Key Laboratory of Modern Engineering Mechanics,
Tianjin 300072, P. R. China)

Abstract: A new method for computing the laminar– turbulent transition and turbulence in compressible boundary layers was proposed. It is especially useful for the computation of laminar– turbulent transition and turbulence starting from small– amplitude disturbances. The laminar stage, up to the beginning of the breakdown in laminar– turbulent transition, was computed by parabolized stability equations (PSE). Then the direct numerical simulations (DNS) method was employed to compute the transition process and turbulent flow, for which the inflow condition was provided by using the disturbances obtained by PSE method up to that stage. In the two test cases, including a subsonic and a supersonic boundary layer, the transition locations and the turbulent flow obtained by this method agree well with those obtained by using only DNS method for the whole process. The merit of using our method is that the computational cost is much smaller than that using only DNS method.

Key words: transition; turbulence; parabolized stability equations; direct numerical simulations