

对流扩散方程的混合时间间断 时空有限元方法*

刘 洋, 李 宏, 何斯日古楞

(内蒙古大学 数学科学学院, 呼和浩特 010021)

(周哲玮推荐)

摘要: 构造并分析二阶对流扩散方程的混合时间间断时空有限元格式. 利用混合有限元方法将二阶方程降阶, 利用空间连续而时间允许间断的时空有限元方法离散低阶方程. 证明数值解的稳定性、存在唯一性和收敛性. 最后通过数值结果验证该算法的有效性和可行性.

关键词: 对流扩散方程; 混合有限元法; 时间间断时空有限元法; 收敛性

中图分类号: O242.21 文献标识码: A

引 言

时空有限元方法将时间变量和空间变量统一考虑, 在时间和空间两个方向同时发挥有限元方法的优势, 提高数值解精度. 该方法有 3 种数值格式^[1-9]: 时空两个方向可以同时连续、在某一方向出现间断和时空同时允许间断. 起初间断有限元方法是由 Reed 和 Hill^[1]于 1973 年首先提出, 并应用于求解中子输运方程, 但这种方法长期以来一直没有得到很好的研究和应用. 直到 20 世纪 80 年代末由 Cockburn 和 Shu 等结合 Runge-Kutta 方法, 将间断有限元方法推广到一维和高维守恒律方程和方程组^[2-3], 这一方法才引起人们的足够重视. 随着该方法的发展, Vider Thom e 在文献[4]中利用时间方向允许出现间断而空间连续的时空有限元方法, 讨论了形如 $u_t + Au = f$ 的方程, 证明了解的唯一性, 并给出解的几种收敛性证明方法. 后期出现椭圆和抛物方程的时空混合间断有限元方法^[5-6], 文献[7]讨论抛物型方程的时间间断时空有限元方法, 证明了弱解的存在性及收敛性, 在文献[8]中, 同时考虑了非线性 Schrödinger 方程的时空都连续的全离散有限元方法和时间间断时空有限元方法, 对连续时空有限元方法证明了能量积分守恒, 同时讨论了空间连续、时间间断的有限元法的电荷近似守恒, 误差都为高阶量. 本文利用混合有限元方法和时间间断时空有限元方法相结合的技巧讨论如下对流扩散方程:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u(x, t) + \mathbf{b} \cdot \nabla u(x, t) + cu(x, t) = f(x, t), & \Omega \times J, \\ u(x, t) = 0, & \partial \Omega \times J, \\ u(x, 0) = u_0(x), & \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

* 收稿日期: 2008-03-01; 修订日期: 2008-10-16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10601022); 内蒙古自然科学基金资助项目(200607010106)

作者简介: 刘洋(1980-), 男, 辽宁铁岭人, 博士(联系人. Tel: +86-471-4991514; E-mail: L3385y@tom.com).

其中, $\Omega \in R^d (d = 1, 2, 3), J = (0, T], \mathbf{b} \in [L^\infty(0; T, W^1_\infty(\Omega))]^d, |\mathbf{b}| = \sqrt{\sum_{i=1}^d b_i^2(x, t)} \leq 1/2, c(x, t) \in [L^\infty(0; T, W^1_\infty(\Omega))], 1 \leq c(x, t), f \in L^2(0; T, L^2(\Omega)), u_0 \in L^2(\Omega).$

对于混合时间间断有限元方法处理二阶对流扩散问题的文献至今还没有见到. 本文分析二阶对流扩散方程的混合时间间断时空有限元格式, 证明有限元解的稳定性, 存在唯一性和收敛性. 最后通过数值算例验证所提出的混合时间间断时空有限元格式的可行性和有效性.

1 记号、定义和引理

为引进方程(1)的混合时间间断时空有限元方法, 首先将时间区间进行剖分, 设 $0 = t^0 < t^1 < \dots < t^N = T,$ 剖分区间为 $I_n = (t^n, t^{n+1}), k_n = t^{n+1} - t^n, (n = 0, 1, 2, \dots, N - 1).$ T_h 是 Ω 的正则剖分, 剖分单元为 $\tau.$ 定义时空域 $Q := \Omega \times J,$ 时空片 $S^n := \Omega \times I_n,$ 在每一个时空片 S^n 上的正则剖分为 $T_{h, n},$ 剖分单元为 $K = \tau \times I_n,$ 设 $h_n = \max_{K \in T_{h, n}} (h_K) (n = 0, 1, 2, \dots, N - 1),$

$h = \max_n h_n.$ 定义离散的逼近空间

$$\begin{aligned} V_{h, n} &= \left\{ v: v|_K \in P_k(\tau) \times P_k(I_n), \forall K \in T_{h, n} \right\}, \\ Q_{h, n} &= \left\{ v: v|_K \in P_m(\tau) \times P_m(I_n), \forall K \in T_{h, n} \right\}, \\ H_{h, n} &= \left\{ \varphi: \varphi|_K \in (Q_{h, n})^d, \dots \cdot \varphi|_K \in Q_{h, n}, \forall K \in T_{h, n} \right\}, \\ V_h &= \left\{ v: R^+ \times R^2 \rightarrow R, v|_{(t^n, t^{n+1})} \in V_{h, n} \right\}, \end{aligned}$$

P_k 表示至多为 k 次的多项式空间. 下面给出本文所用到的定义及引理.

定义 1 记时空片上的内积为

$$(\omega, v)_n = (\omega, v)_{S^n} = \int_{I_n} (\omega, v) ds, (\omega, v)$$

是空间域 Ω 上的内积, 相应的范数为

$$\|v\|_n = (v, v)_n^{1/2} = \left[\int_{I_n} \|v\|_\Omega^2 ds \right]^{1/2}.$$

定义 2 $t = t^n (n = 0, 1, 2, \dots, N - 1)$ 时, 空间 L^2 内积为 $\langle \omega, v \rangle_n = \langle \omega(\cdot, t^n), v(\cdot, t^n) \rangle_\Omega,$ 相应的范数为 $|v|_n = \langle v, v \rangle_n^{1/2}.$

定义 3 时间间断点处的左右极限为

$$v^\pm(x, t) = \lim_{s \rightarrow 0^\pm} v(x, t + s),$$

时间跳跃项 $[v] = v_+ - v_-.$ 定义范数

$$\|v\|^2 = \frac{1}{2} \left(|v|_N^2 + |v|_0^2 + \sum_{n=1}^{N-1} |[v]|_n^2 \right).$$

定义 4 空间 $L^2(J, L^2(\Omega))$ 上的范数

$$\|v\|_Q^2 = \int_0^T \|v\|_\Omega^2 dt.$$

定义 5 空间 $L^\infty(J, L^2(\Omega))$ 上的时间最大模空间 L^2 模: $\max_{t \in J=[0, T]} \|\cdot\|_\Omega,$ 其中 $\|\cdot\|_\Omega$ 表示空间区域上的 L^2 范数.

引理 1 引入投影算子 $P_h: H^1_0(\Omega) \rightarrow V_{h, n},$ 满足

$$(\dots \cdot X, u - P_h u) = 0, \quad \forall X \in H_{h, n}$$

且有误差估计

$$\|u - P_h u\| \leq Ch^{k+1} \|u\|_{k+1}.$$

引理 2 引进投影算子 $\Pi_h: (H^1(\Omega))^d \rightarrow H_{h,n}$ 若满足

$$(\cdot, \cdot)(\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v}), w) = 0, \quad \forall w \in V_{h,n},$$

则有

$$\|\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v}\| \leq Ch^{m+1} \|\mathbf{v}\|_{H^{m+1}(\text{div}, \Omega)}.$$

上述两个引理参见文献[9].

2 离散解的稳定性和存在唯一性

首先建立方程(1)的混合时间间断时空有限元格式, 为此设 $\phi = \cdot \cdot u$, 则原方程可改写为

$$\begin{cases} u_t - \cdot \cdot \phi + \mathbf{b} \cdot \phi + cu(x, t) = f, & \Omega \times J, \\ \phi - \cdot \cdot u = 0, & \Omega \times J, \\ u = 0, & \partial \Omega \times J, \\ u(x, 0) = u_0(x), & \Omega. \end{cases} \quad (2)$$

建立相应的弱形式为

$$\begin{cases} \int_0^{t^N} (u_t, w) dt - \int_0^{t^N} (\cdot \cdot \phi, w) dt + \int_0^{t^N} (\mathbf{b} \cdot \phi, w) dt + \\ \sum_{n=1}^{N-1} \langle [u], w_+ \rangle_n + \langle u_+, w_+ \rangle_0 + \int_0^{t^N} (cu, w) dt = \\ \langle u, w_+ \rangle_0 + \int_0^{t^N} (f, w) dt, & w \in H_0^1(Q), \\ \int_0^{t^N} (\phi, \mathbf{v}) dt + \int_0^{t^N} (u, \cdot \cdot \mathbf{v}) dt = 0, & \mathbf{v} \in (L_2(Q))^d, \\ u(x, 0) = u_0, & x \in \Omega \end{cases}$$

即在区间 $I_n = (t^n, t^{n+1})$ 上, 有

$$\begin{cases} (u_t, w)_n - (\cdot \cdot \phi, w)_n + (\mathbf{b} \cdot \phi, w)_n + \langle [u], w_+ \rangle_n + (cu, w)_n = \\ (f, w)_n, & w \in H_0^1(S^n), \\ (\phi, \mathbf{v})_n + (u, \cdot \cdot \mathbf{v})_n = 0, & \mathbf{v} \in (L_2(S^n))^d, \\ (u(0), w) = (u_0, w), & w \in H_0^1(S^n), \end{cases} \quad (3)$$

从而原问题的离散形式可叙述为: 求 $(u^h, \phi^h) \in V_{h,n} \times H_{h,n}$ 满足

$$\begin{cases} (u_t^h, w^h)_n - (\cdot \cdot \phi^h, w^h)_n + (\mathbf{b} \cdot \phi^h, w^h)_n + \langle [u^h], w_+^h \rangle_n + (cu^h, w^h)_n = \\ (f, w^h)_n, \\ (\phi^h, \mathbf{v}^h)_n + (u^h, \cdot \cdot \mathbf{v}^h)_n = 0, \\ (u^h(0), w^h) = (u_0, w^h). \end{cases} \quad (4)$$

在上述离散形式下, 有

定理 1 问题(4)的解 $(u^h, \phi^h) \in V_{h,n} \times H_{h,n}$ 满足

$$\max_{0 \leq n \leq N} (\|u^h\|_{\Omega_n} + \|\phi^h\|_{\Omega}) \leq M (\|u_0\|_{\Omega} + \|f\|_Q).$$

其中, M 是不依赖于 h_n 和 k_n 的常数.

证明 在问题(4)中对 n 求和, 并取 $w^h = u^h, v^h = \phi^h$, 可以得到

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_0^{t^N} (u^h, u^h) dt - \int_0^{t^N} (u^h, \dots \cdot \phi^h) dt + \int_0^{t^N} (\mathbf{b} \cdot \phi^h, u^h) dt + \\ & \sum_{n=1}^{N-1} \langle [u^h]_n, u_+^h \rangle_n + \langle u_+^h, u_+^h \rangle_0 + \int_0^{t^N} (cu^h, u^h) dt = \\ & \langle u^h, u_+^h \rangle_0 + \int_0^{t^N} (f, u^h) dt, \\ & \int_0^{t^N} (\phi^h, \phi^h) dt + \int_0^{t^N} (u^h, \dots \cdot \phi^h) dt = 0, \end{aligned} \right. \quad (5)$$

将上述方程两边相加有

$$\begin{aligned} & \int_0^{t^N} (u^h, u^h) dt + \int_0^{t^N} (\phi^h, \phi^h) dt + \int_0^{t^N} (\mathbf{b} \cdot \phi^h, u^h) dt + \\ & \sum_{n=1}^{N-1} \langle [u^h]_n, u_+^h \rangle_n + \langle u_+^h, u_+^h \rangle_0 + \int_0^{t^N} (cu^h, u^h) dt = \\ & \langle u^h, u_+^h \rangle_0 + \int_0^{t^N} (f, u^h) dt. \end{aligned} \quad (6)$$

将方程的第 1 项进行分步积分可以得到

$$\begin{aligned} & \| \| u^h \| \|^2 + \int_0^{t^N} (\phi^h, \phi^h) dt + \int_0^{t^N} (cu^h, u^h) dt = \\ & \langle u^h, u_+^h \rangle_0 + \int_0^{t^N} (f, u^h) dt + \int_0^{t^N} (\mathbf{b} \cdot \phi^h, u^h) dt. \end{aligned} \quad (7)$$

利用 Cauchy-Schwartz 不等式及 Young 不等式, 可得

$$\| \| u^h \| \|^2 + \int_0^{t^N} \| \phi^h \|_{\Omega}^2 dt + \int_0^{t^N} \| u^h \|_{\Omega}^2 dt \leq \| u_0^h \|_{\Omega}^2 + \int_0^{t^N} \| f \|_{\Omega}^2 dt. \quad (8)$$

上式两端对时间取最大模得

$$\max_{0 \leq t \leq T} (\| \| u^h \|_{\Omega}^2 + \| \phi^h \|_{\Omega}^2) \leq M (\| u_0^h \|_{\Omega}^2 + \| f \|_Q^2). \quad (9)$$

定理 1 得证.

定理 2 问题(4)的解 $(u^h, \phi^h) \in V_{h,n} \times H_{h,n}$ 是存在唯一的.

证明 要证明问题(4)的解是存在唯一的, 只需考虑其相应的齐次方程

$$\left\{ \begin{aligned} & (u_i^h, w^h)_n - (\dots \cdot \phi^h, w^h)_n + (\mathbf{b} \cdot \phi^h, w^h)_n + \langle u_+^h, w_+^h \rangle_n + (cu^h, w^h)_n = 0, \\ & (\phi^h, v^h)_n + (u^h, \dots \cdot v^h)_n = 0, \\ & (u^h(0), w^h) = 0. \end{aligned} \right.$$

由定理 1 的结论显然 $u^h = 0, \phi^h = 0$ 即相应的齐次问题解只有 0 解. 因此命题的唯一性得证.

由于微分方程是有限维的, 故由唯一性必有存在性成立.

3 收敛性及其证明

定理 3 设 (u, ϕ) 和 (u_h, ϕ_h) 分别是方程(2)和(4)的解, 则存在不依赖于时间步长 k_n 和空间步长 h_n 的常数 M , 使得

$$\begin{aligned} & \| \phi - \phi^h \|_Q + \| u - u^h \|_Q \leq \\ & M h^{\min(k+1, m+1)} (\| \| u \|_{k+1, Q} + \| \phi \|_{H^{m+1}(\text{div}, \Omega), Q} + \max_{i \in J = \{0, \dots, \tau\}} \| u \|_{\Omega}) \end{aligned}$$

成立.

证明 设

$$u - u^h = u - P_h u + P_h u - u^h = \zeta_1 + \zeta_2$$

$$\phi - \phi^h = \phi - \Gamma_h \phi + \Gamma_h \phi - \phi^h = \eta_1 + \eta_2.$$

由式(3)和式(4)有

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_0^{t^N} (u_t - u_t^h, w^h) dt - \int_0^{t^N} (\cdot \cdot \cdot (\phi - \phi^h), w^h) dt + \\ & \int_0^{t^N} (\mathbf{b} \cdot (\phi - \phi^h), w^h) dt + \sum_{n=1}^{N-1} \langle [u - u^h]_n, w_+^h \rangle_n + \\ & \langle (u_+ - u_+^h), w_+^h \rangle_0 + \int_0^{t^N} (c(u - u^h), w^h) dt = \langle u - u^h, w_+^h \rangle_0, \\ & \int_0^{t^N} (\phi - \phi^h, \mathbf{v}^h) dt + \int_0^{t^N} (u - u^h, \cdot \cdot \cdot \mathbf{v}^h) dt = 0. \end{aligned} \right. \quad (10)$$

上式中取 $w^h = \zeta_2, \mathbf{v}^h = \eta_2$, 并将两方程相加, 得

$$\int_0^{t^N} (u_t - u_t^h, \zeta_2) dt - \int_0^{t^N} (\cdot \cdot \cdot (\phi - \phi^h), \zeta_2) dt + \int_0^{t^N} (\mathbf{b} \cdot (\phi - \phi^h), \zeta_2) dt +$$

$$\sum_{n=1}^{N-1} \langle [u - u^h]_n, \zeta_{2+} \rangle_n + \langle (u_+ - u_+^h), \zeta_{2+} \rangle_0 + \int_0^{t^N} (c(u - u^h), \zeta_2) dt +$$

$$\int_0^{t^N} (\phi - \phi^h, \eta_2) dt + \int_0^{t^N} (u - u^h, \cdot \cdot \cdot \eta_2) dt =$$

$$\langle (u - u^h), \zeta_{2+} \rangle_0. \quad (11)$$

利用引理, 上面方程化简为

$$\int_0^{t^N} (\zeta_{1t}, \zeta_2) dt + \int_0^{t^N} (\zeta_{2t}, \zeta_2) dt + \int_0^{t^N} (c\zeta_2, \zeta_2) dt + \int_0^{t^N} (c\zeta_1, \zeta_2) dt +$$

$$\int_0^{t^N} (\mathbf{b} \cdot (\eta_1 + \eta_2), \zeta_2) dt + \sum_{n=1}^{N-1} \langle [\zeta_1]_n, \zeta_{2+} \rangle_n + \sum_{n=1}^{N-1} \langle [\zeta_2]_n, \zeta_{2+} \rangle_n +$$

$$\langle \zeta_{1+}, \zeta_{2+} \rangle_0 + \langle \zeta_{2+}, \zeta_{2+} \rangle_0 + \int_0^{t^N} (\eta_1, \eta_2) dt + \int_0^{t^N} (\eta_2, \eta_2) dt =$$

$$\langle (u - u^h), \zeta_{2+} \rangle_0. \quad (12)$$

由 $\| \cdot \|_v$ 的定义可将上面的方程化为

$$\| \zeta_2 \|_v^2 + \int_0^{t^N} (\zeta_{1t}, \zeta_2) dt + \int_0^{t^N} (c\zeta_2, \zeta_2) dt + \int_0^{t^N} (c\zeta_1, \zeta_2) dt +$$

$$\int_0^{t^N} (\mathbf{b} \cdot (\eta_1 + \eta_2), \zeta_2) dt + \sum_{n=1}^{N-1} \langle [\zeta_1]_n, \zeta_{2+} \rangle_n + \langle \zeta_{1+}, \zeta_{2+} \rangle_0 +$$

$$\int_0^{t^N} (\eta_1, \eta_2) dt + \int_0^{t^N} (\eta_2, \eta_2) dt =$$

$$\langle (u - u^h), \zeta_{2+} \rangle_0. \quad (13)$$

对上式左端的第 2 项进行分步积分通过整理可得到

$$\| \zeta_2 \|_v^2 + \int_0^{t^N} (c\zeta_2, \zeta_2) dt + \int_0^{t^N} (\eta_2, \eta_2) dt =$$

$$\langle \zeta_{1+}, \zeta_2, \zeta_{2+} \rangle_0 + \int_0^N (\zeta_2, \zeta_1) dt + \sum_{n=1}^{N-1} \langle \zeta_{1-}, [\zeta_2] \rangle_n - \langle \zeta_{1-}, \zeta_2 \rangle_N - \int_0^N (\eta_1, \eta_2) dt - \int_0^N (c\zeta_1, \zeta_2) dt - \int_0^N (\mathbf{b} \cdot (\eta_1 + \eta_2), \zeta_2) dt. \tag{14}$$

利用 Cauchy-Schwartz 不等式、Young 不等式和 $\|v\|$ 的定义可将上面的方程化为

$$\| \zeta_2 \|^2 + \frac{1}{2} \int_0^N \|\eta_2\|_{\Omega}^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^N \|\zeta_2\|_{\Omega}^2 dt \leq \frac{1}{2} \| \zeta_2 \|^2 + M \left(\sum_{n=1}^N | \zeta_{1-} |^2 + \| \zeta_1 \|_Q^2 + \| \eta_1 \|_Q^2 \right), \tag{15}$$

即得

$$\| \zeta_2 \|^2 + \| \eta_2 \|_Q^2 + \| \zeta_2 \|_Q^2 \leq M \left(\sum_{n=1}^N | \zeta_{1-} |^2 + \| \zeta_1 \|_Q^2 + \| \eta_1 \|_Q^2 \right). \tag{16}$$

结合引理 1 和引理 2 得

$$\| \eta_2 \|_Q^2 + \| \zeta_2 \|_Q^2 \leq M h^{2\min(k+1, m+1)} (\|u\|_{k+1, Q}^2 + \| \phi \|_{H^{m+1}(\text{div}, \Omega), Q}^2 + \max_{t \in J} \|u\|_{\Omega}^2). \tag{17}$$

利用三角不等式可得定理结论.

4 数值算例

为验证本文所提出的混合时间间断时空有限元方法格式的可行性, 考虑方程

$$\begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) + u(x, t) = f(x, t), & (x, t) \in (0, 1) \times (0, 1], \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \in [0, 1], \\ u(x, 0) = \sin(\pi x), & x \in [0, 1]. \end{cases} \tag{18}$$

其中, $(x, t) \in [0, 1] \times [0, 1], f(x, t) = \pi^2 e^{-t} \sin(\pi x)$.

容易验证方程的真解为 $u(x, t) = e^{-t} \sin(\pi x)$, 因此中间项为 $\phi(x, t) = \pi e^{-t} \cos(\pi x)$. 取 $V_{h, n}$ 和 $H_{h, n}$ 分别为 $[0, 1] \times H_0^1$ 和 $[0, 1] \times L^2$ 的子空间, 相应的基函数分别为

$$\begin{aligned} u^h(x, t) &= \frac{t^{n+1} - t}{\Delta t} \left\{ \frac{x^{i+1} - x}{\Delta x} u_1^1 + \frac{x - x^i}{\Delta x} u_2^1 \right\} + \frac{t - t^n}{\Delta t} \left\{ \frac{x^{i+1} - x}{\Delta x} u_1^2 + \frac{x - x^i}{\Delta x} u_2^2 \right\}, \\ \phi^h(x, t) &= \frac{t^{n+1} - t}{\Delta t} \left\{ \frac{x^{i+1} - x}{\Delta x} \phi_1^1 + \frac{x - x^i}{\Delta x} \phi_2^1 \right\} + \frac{t - t^n}{\Delta t} \left\{ \frac{x^{i+1} - x}{\Delta x} \phi_1^2 + \frac{x - x^i}{\Delta x} \phi_2^2 \right\}. \end{aligned}$$

表 1 和表 2 给出了近似解 u^h 和 ϕ^h 在 $L^2(J, L^2(\Omega))$ 模意义下的误差, 并给出了收敛阶.

表 1 $L^2(L^2)$ 误差及收敛阶

$\Delta t / \Delta x = 4$	$\ u - u^h\ _{L^2(L^2)}$	$\ u - u^h\ _{L^2(L^2)}$ 的阶	$\ \phi - \phi^h\ _{L^2(L^2)}$	$\ \phi - \phi^h\ _{L^2(L^2)}$ 的阶
(20, 5)	8.016 5E-004		0.005 2	
(40, 10)	2.070 9E-004	1.952 7	0.001 5	1.793 5
(80, 20)	5.487 6E-005	1.916 0	3.929 0E-004	1.932 7
(160, 40)	1.427 0E-005	1.943 2	1.016 3E-004	1.950 8
(320, 80)	3.647 2E-006	1.968 1	2.585 2E-005	1.975 0
(640, 160)	9.235 0E-007	1.981 6	6.692 1E-006	1.949 7

表 2

$L^2(L^2)$ 误差及收敛阶

$\Delta t / \Delta x = 3$	$\ u - u^h\ _{L^2(L^2)}$	$\ u - u^h\ _{L^2(L^2)}$ 的阶	$\ \phi - \phi^h\ _{L^2(L^2)}$	$\ \phi - \phi^h\ _{L^2(L^2)}$ 的阶
(18, 6)	0.001 1		0.002 1	
(36, 12)	2.820 6E- 004	1.963 4	6.298 6E- 004	1.737 3
(72, 24)	7.172 9E- 005	1.975 4	1.734 8E- 004	1.860 3
(144, 48)	1.815 9E- 005	1.981 9	4.550 5E- 005	1.930 7
(288, 96)	4.573 3E- 006	1.989 4	1.165 2E- 005	1.965 4
(576, 192)	1.149 6E- 006	1.992 1	3.114 4E- 006	1.903 6

由上述的数值计算结果可以看出, 当时空步长之比为 3 或 4 时(即 $\Delta t / \Delta x = 3$ 或 4), 其收敛阶与理论分析结果相吻合. 同时可以看出, 中间变量的引入并没有降低格式的精度, 而且对中间变量即 $\phi = u_x$ 的模拟结果也是令人相当满意的. 图 1、图 2 给出了 $t = 0.25, 0.5, 0.75$ 和 $t = 1$ 时精确解 (u, ϕ) 与数值解 (u^h, ϕ^h) 的比较结果, 剖分为 $(80, 20)$, 即 $N = 20, \Delta t = 1/20, \Delta x = 1/80$, 数值结果验证了本文提出的混合时间间断时空有限元方法, 对二阶对流扩散方程的有效性和可行性.

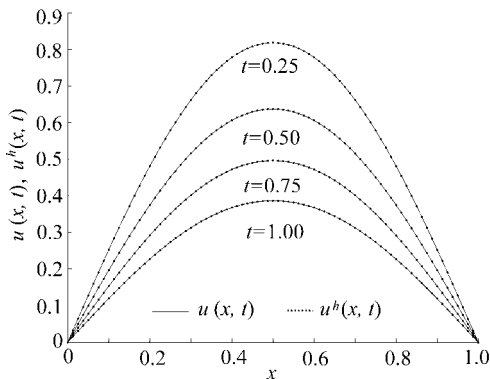


图 1 $N = 20, \Delta t = 1/20, \Delta x = 1/80$ 时, 时间在 $t = 0.25, 0.5, 0.75$ 和 $t = 1$ 处精确解 u 和近似解 u^h 的比较

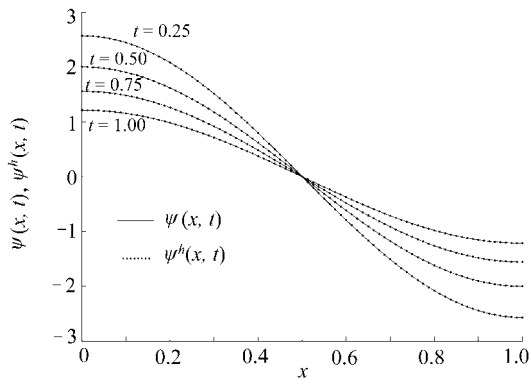


图 2 $N = 20, \Delta t = 1/20, \Delta x = 1/80$ 时, 时间在 $t = 0.25, 0.5, 0.75$ 和 $t = 1$ 处精确解 ϕ 和近似解 ϕ^h 的比较

致谢 作者感谢内蒙古大学 513 和内蒙古大学青年科学基金(ND0702)对本文的资助.

[参 考 文 献]

[1] Reed N H, Hill T R. Triangle mesh methods for the Neutron transport equation[R]. Los Alamos Scientific Laboratory, Report LA2 UR- 73- 479, 1973.

[2] Cockburn B, Lin S Y. TVB Runge- Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws III: one- dimensional systems[J]. *J Comp Phys*, 1989, **84** (1): 90- 113.

[3] Cockburn B, Hou S C, Shu C W. TVB Runge- Kutta local projection discontinuous Galerkin method for conservation laws IV: the multidimensional case[J]. *J Comp Phys*, 1990, **54** (3): 545- 581.

[4] Thom e Vider. *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*[M]. New York: Springer- Verlag, 1997.

[5] 李宏, 郭彦. 四阶抛物方程的间断时空混合有限元法[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版), 2006, **37** (1): 20- 22.

- [6] Brezzi F, Hughes T J R, Marini L D, *et al.* Mixed discontinuous galerkin methods for darcy flow[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2005, **22**(2): 119– 145.
- [7] 李宏, 刘儒勋. 抛物方程的时空有限元方法[J]. *应用数学和力学*, 2001, **22**(6): 613– 624.
- [8] 汤琼, 陈传森, 刘罗华. SchL-dinger 方程的时空有限元方法与守恒性[J]. *应用数学和力学*, 2006, **27**(3): 300– 304.
- [9] CHEN Zhang- xin. *Finite Element Methods and Their Applications*[M]. Berlin Heidelberg: Springer- Verlag, 2005.
- [10] YAN Jue, SHU Chi- wang. A Local discontinuous galerkin method for KdV- type equation[R]. NASA/CR- 2001- 211026 ICASE Report No. 2001- 20.

Mixed Time Discontinuous Space- Time Finite Element Method for Convection Diffusion Equations

LIU Yang, LI Hong, HE Siriguleng

(School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Huhhot 010021, P. R. China)

Abstract: A mixed time discontinuous space- time finite element scheme for second order convection diffusion problems is constructed and analyzed. The order of the equation was lowered by mixed finite element method. And the low order equation was discretized by space- time finite element method, continuous in space but discontinuous in time. The stability, existence, uniqueness and convergence of the approximate solutions were proved. Finally, numerical results were presented to illustrate the efficiency of the method.

Key words: convection diffusion equations; mixed finite element method; time discontinuous finite element method; convergence