

# 有限土层轴对称 Biot 固结的一个新的解析解\*

艾智勇, 王全胜

(同济大学 地下建筑与工程系; 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092)

(郭兴明推荐)

摘要: 提出一个新的解析方法来研究有限土层的轴对称 Biot 固结. 从轴对称 Biot 固结的控制方程出发, 结合 Laplace 变换的微分性质, 建立了 Laplace 和 Hankel 变换域内有限土层地基表面 ( $z = 0$ ) 和任意深度  $z$  处基本变量之间的关系. 然后结合有限土层的边界条件, 推导出 Laplace 和 Hankel 变换域内任意一点的解析解. 通过进行 Laplace 逆变换和 Hankel 逆变换得到了物理域内的解. 编制了计算程序, 并对有限土层轴对称固结进行了数值分析.

关键词: 轴对称 Biot 固结; 有限土层; Laplace 变换; Hankel 变换

中图分类号: TU43:0343 文献标识码: A

## 引 言

Biot<sup>[1]</sup>首先提出了能考虑饱和土中固相与液相耦合作用的三维固结理论, 之后对于 Biot 固结方程的研究取得了许多进展. McNamée 和 Gibson<sup>[2-3]</sup>、Schiffman 和 Fungaroli<sup>[4]</sup>所提出的位移函数法是求解 Biot 固结最为成功的解析方法之一. 数值方法诸如有限元法<sup>[5]</sup>、边界元法<sup>[6]</sup>、以及有限层法<sup>[7-9]</sup>已被用来求解较为复杂的固结问题. 本文提出一个新的解析方法来求解有限土层的轴对称 Biot 固结, 该方法能够避免引入位移函数<sup>[2-4]</sup>, 并直接利用 Hankel 和 Laplace 变换技术在变换域内求出其解析解.

## 1 控制方程

轴对称 Biot 固结的控制方程为<sup>[1]</sup>

$$\dots^2 u_r - \frac{1}{r^2} u_r + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial r} - \frac{1}{G} \frac{\partial \sigma}{\partial r} = 0, \quad (1a)$$

$$\dots^2 u_z + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} - \frac{1}{G} \frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0, \quad (1b)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{k}{\gamma_w} \dots^2 \sigma, \quad (1c)$$

式中,  $u_r$ 、 $u_z$  分别是  $r$  和  $z$  方向的位移;  $e = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$  是体积应变;  $\dots^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

\* 收稿日期: 2008-06-15; 修订日期: 2008-10-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50578121)

作者简介: 艾智勇(1966-), 男, 江西余江人, 副教授, 博士(联系人. Tel: +86-21-65982201; Fax: +86-21-65985210; E-mail: zhiyongai@tongji.edu.cn).

是柱坐标系下的 Laplace 算子;  $G$ 、 $\nu$  分别是土体的剪切模量和 Poisson 比;  $k$  是渗透系数,  $\gamma_w$  为水的重度,  $\sigma$  表示超孔隙水压力(以压应力为正). 根据 Darcy 定律,  $z$  方向的流量为  $Q = \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial \sigma}{\partial z}$ .

轴对称 Biot 固结的本构方程为

$$\alpha_r + \sigma = \lambda e + 2G \varepsilon_r, \quad (2a)$$

$$\alpha_\theta + \sigma = \lambda e + 2G \varepsilon_\theta, \quad (2b)$$

$$\alpha_z + \sigma = \lambda e + 2G \varepsilon_z, \quad (2c)$$

$$\alpha_{rz} = G \gamma_{rz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{rz}, \quad (2d)$$

式中,  $\alpha_r$ 、 $\alpha_\theta$  和  $\alpha_z$  分别为  $r$ 、 $\theta$  和  $z$  轴方向的正应力, 并且以拉应力为正;  $\alpha_z$  为剪应力;  $\varepsilon = \frac{\partial u_r}{\partial r}$ ,

$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$  分别表示  $r$  和  $z$  方向的正应变;  $\gamma_{rz} = \frac{\partial u_s}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}$  为剪应变;  $E$  为弹性模量.

## 2 均匀有限饱和土层的解析解

Laplace 变换及其逆变换的定义为<sup>[10]</sup>

$$f(r, z, s) = \int_0^\infty f(r, z, t) e^{-st} dt, \quad f(r, z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f(r, z, s) e^{st} ds, \quad (3)$$

式中,  $s$  为变量  $t$  相应的 Laplace 变换参数.

$m$  阶 Hankel 变换及其逆变换的定义<sup>[11]</sup>

$$f(\xi, z, s) = \int_0^\infty f(r, z, s) J_m(\xi r) r dr, \quad f(r, z, s) = \int_0^\infty f(\xi, z, s) J_m(\xi r) \xi d\xi \quad (4)$$

式中,  $J_m(\xi r)$  为  $m$  阶的 Bessel 函数.

对式(1a)进行关于  $t$  的 Laplace 变换得

$$\dots^2 u_r - \frac{1}{r^2} u_r + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial r} - \frac{1}{G} \frac{\partial \sigma}{\partial r} = 0, \quad (5)$$

式中,  $u_r$  为  $u_r$  相应关于  $t$  的 Laplace 变换域内的量, 其余类似.

对式(5)进行一阶 Hankel 变换得

$$\frac{d^2 u_r}{dz^2} - \frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)} \xi^2 u_r - \frac{1}{(1-2\nu)} \xi \frac{du_z}{dz} + \frac{1}{G} \xi \sigma = 0, \quad (6)$$

式中,  $u_r$  为  $u_r$  相应 Hankel 变换域内的量, 其余类似.

关于  $z$  的 Laplace 变换及相应的逆变换<sup>[10]</sup>为

$$\hat{f}(\xi, p, s) = \int_0^\infty f(\xi, z, s) e^{-pz} dz, \quad f(\xi, z, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \hat{f}(\xi, p, s) e^{pz} dp, \quad (7)$$

式中,  $p$  为变量  $z$  相应的 Laplace 变换参数.

对式(6)进行关于  $z$  的 Laplace 变换得

$$\left[ p^2 - \frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)} \xi^2 \right] \hat{u}_r - \frac{1}{(1-2\nu)} p \xi \hat{u}_z + \frac{1}{G} \xi \hat{\sigma} =$$

$$p u_r(0) + u_r'(0) - \frac{1}{(1-2\nu)} \xi u_z(0), \quad (8)$$

式中,  $\hat{u}_r$  为  $u_r$  相应关于  $z$  的 Laplace 变换域内的量, 其余类似.  $u_r'(0)$  表示  $u_r$  的关于  $z$  的导数, 并取  $z = 0$  时的值.  $u_r(0)$ 、 $u_z(0)$  分别为  $u_r$  和  $u_z$  取  $z = 0$  时的值.

对式(2d)进行关于  $t$  的 Laplace 变换得

$$\sigma_{rz} = G \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right). \quad (9)$$

对式(9)进行关于  $r$  的一阶 Hankel 变换得

$$\sigma_{rz} = G \left( \frac{du_r}{dz} - \xi u_z \right). \quad (10)$$

上式中令  $z = 0$  得

$$u_r'(0) = \xi u_z(0) + \frac{1}{G} \sigma_{rz}(0). \quad (11)$$

把式(11)代入式(8)得

$$\left( p^2 - \frac{M\xi^2}{G} \right) \hat{u}_r - \frac{M-G}{G} p \xi \hat{u}_z + \frac{1}{G} \xi \hat{\sigma} = p u_r(0) - \frac{M-2G\xi}{G} \xi u_z(0) + \frac{1}{G} \sigma_{rz}(0), \quad (12)$$

式中 
$$M = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

同理,由式(1b)可得

$$\left( \frac{M}{G} p^2 - \xi^2 \right) \hat{u}_z + \frac{M-G}{G} p \xi \hat{u}_r - \frac{1}{G} p \hat{\sigma} = \xi u_r(0) + \frac{M}{G} p u_z(0) + \frac{1}{G} \sigma_z(0). \quad (13)$$

对式(1c)进行关于  $t$  的 Laplace 变换,并假设初始时刻土体的体积应变为 0,得

$$s \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \frac{k}{\gamma_w} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \sigma. \quad (14)$$

对式(14)进行关于  $r$  的零阶 Hankel 变换得

$$\frac{d^2 \sigma}{dz^2} - \xi^2 \sigma - \frac{s \gamma_w}{k} \xi u_r - \frac{s \gamma_w}{k} \frac{du_z}{dz} = 0. \quad (15)$$

对式(15)进行关于  $z$  的 Laplace 变换得

$$(p^2 - \xi^2) \hat{\sigma} - \frac{s \gamma_w}{k} p \hat{u}_z - \frac{s \gamma_w}{k} \xi \hat{u}_r = p \sigma(0) + \sigma'(0) - \frac{s \gamma_w}{k} u_z(0). \quad (16)$$

对流量  $Q$  进行关于  $t$  的 Laplace 变换后,再对其进行关于  $r$  的零阶 Hankel 变换得

$$Q = \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial \sigma}{\partial z}. \quad (17)$$

上式中令  $z = 0$  得

$$\sigma'(0) = \frac{\gamma_w}{k} Q(0). \quad (18)$$

把式(18)代入式(16)得

$$(p^2 - \xi^2) \hat{\sigma} - \frac{s \gamma_w}{k} p \hat{u}_z - \frac{s \gamma_w}{k} \xi \hat{u}_r = p \sigma(0) - \frac{s \gamma_w}{k} u_z(0) + \frac{\gamma_w}{k} Q(0). \quad (19)$$

式(12)、(13)、(19)是关于  $\hat{u}_r$ 、 $\hat{u}_z$  和  $\hat{\sigma}$  的 3 个联立方程,求解该联立方程,并进行关于  $p$  的 Laplace 逆变换得

$$u_r(z) = \Phi_{11} u_r(0) + \Phi_{12} u_z(0) + \Phi_{13} \sigma(0) + \Phi_{14} \sigma_{rz}(0) + \Phi_{15} \sigma_z(0) + \Phi_{16} Q(0), \quad (20)$$

$$u_z(z) = \Phi_{21} u_r(0) + \Phi_{22} u_z(0) + \Phi_{23} \sigma(0) + \Phi_{24} \sigma_{rz}(0) + \Phi_{25} \sigma_z(0) + \Phi_{26} Q(0), \quad (21)$$

$$\sigma(z) = \Phi_{31} u_r(0) + \Phi_{32} u_z(0) + \Phi_{33} \sigma(0) + \Phi_{34} \sigma_{rz}(0) + \Phi_{35} \sigma_z(0) + \Phi_{36} Q(0). \quad (22)$$

结合式(20)、(21)、(22),由式(2c)、(10)、(17)可求得如下结果:

$$\sigma_{rz}(z) = \Phi_{41} u_r(0) + \Phi_{42} u_z(0) + \Phi_{43} \sigma(0) + \Phi_{44} \sigma_{rz}(0) + \Phi_{45} \sigma_z(0) + \Phi_{46} Q(0), \quad (23)$$

$$\sigma_z(z) = \Phi_{51} u_r(0) + \Phi_{52} u_z(0) + \Phi_{53} \sigma(0) + \Phi_{54} \sigma_{rz}(0) + \Phi_{55} \sigma_z(0) + \Phi_{56} Q(0), \quad (24)$$

$$Q(z) = \Phi_{61} u_r(0) + \Phi_{62} u_z(0) + \Phi_{63} \sigma(0) + \Phi_{64} \sigma_{rz}(0) + \Phi_{65} \sigma_z(0) + \Phi_{66} Q(0), \quad (25)$$

式中,  $\Phi_{ij} (i = 1, 2, \dots, 6; j = 1, 2, \dots, 6)$  为  $\xi$  和  $s$  的函数.

式(20)~(25)可以简记为如下的矩阵形式:

$$\mathbf{B}(\xi, z, s) = \Phi(\xi, z, s) \cdot \mathbf{B}(\xi, 0, s), \quad (26)$$

式中,  $\mathbf{B}(\xi, z, s) = [u_r, u_z, \sigma, \sigma_{rz}, \sigma_z, Q]_{z=z}^T$ ,  $\Phi(\xi, z, s)$  是六阶传递矩阵, 它建立了 Laplace 和 Hankel 变换域内基本变量在地表面 ( $z = 0$ ) 与任意深度  $z$  之间的关系.  $\Phi_{ij}$  的具体元素见附录.

结合边界条件, 由式(26)便可以求得变换域内任意一点的位移、应力、超孔隙水压力和流量的解.

如图 1 所示, 考虑有限均匀饱和土层受一均匀圆形荷载  $q(0 \leq r \leq a)$  作用, 并假定荷载在  $t = 0^+$  时刻加载在土体上, 以后保持不变. 对于更复杂的荷载作用, 也可以类似地进行分析.

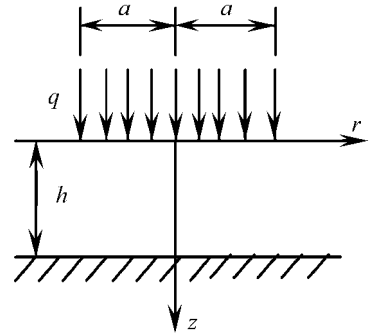


图 1 有限均匀饱和土层

对荷载进行关于  $t$  的 Laplace 变换得

$$q(r, 0, s) = \int_0^{\infty} q(r, 0, t) e^{-st} dt = \frac{q}{s}. \quad (27)$$

对上式进行零阶 Hankel 变换得

$$q(\xi, 0, s) = \int_0^{\infty} \frac{q}{s} J_0(\xi r) r dr = \frac{qaJ_1(\xi a)}{\xi s}. \quad (28)$$

假设土层表面透水, 则

$$\alpha_r(\xi, 0, s) = -q(\xi, 0, s), \quad \alpha_z(\xi, 0, s) = 0, \quad \sigma(\xi, 0, s) = 0. \quad (29)$$

如果有限均匀饱和土层的底部固定, 则有如下两种可能的透水条件:

当底部透水时

$$u_r(\xi, h, s) = 0, \quad u_z(\xi, h, s) = 0, \quad \sigma(\xi, h, s) = 0. \quad (30)$$

当底部不透水时

$$u_r(\xi, h, s) = 0, \quad u_z(\xi, h, s) = 0, \quad Q(\xi, h, s) = 0. \quad (31)$$

结合边界条件, 由式(26)可求得  $\mathbf{B}(\xi, 0, s)$  和  $\mathbf{B}(\xi, h, s)$  中的所有量. 因此土层中任意一点在变换域内的解可表示为

$$\mathbf{B}(\xi, z, s) = \Phi(\xi, z - h, s) \cdot \mathbf{B}(\xi, h, s), \quad (32)$$

式(32)就是有限均匀饱和土层轴对称固结在变换域内的解.

### 3 数值算例

为了获得物理域内的解, 我们分别对变量  $s$  和  $\xi$  进行 Laplace 逆变换和 Hankel 逆变换. 对于 Laplace 逆变换, 本文采用 Talbot<sup>[10]</sup> 所提出的方法; 该方法用于固结分析的可行性和有效性已被 Booker 和 Small<sup>[7-9]</sup> 所证明. Hankel 逆变换采用 Ai 等<sup>[12]</sup> 所提出的方法. 为分析方便, 引入无量纲参数  $c = 2Gk/\gamma_w$  和  $\tau = ct/a^2$ . 本文所有算例均考虑有限饱和土层表面透水, 底面固定且不透水.

为了证明本文方法的合理性和正确性, 对有限均匀饱和土层轴对称固结进行了数值计算, 并与 Booker 和 Small<sup>[9]</sup> 的结果进行了对比. 计算参数和结果见图 2. 由图 2 的对比可知: 本文与 Booker 和 Small<sup>[9]</sup> 的结果是一致的.

本文对 Poisson 比  $\nu$  对轴对称固结过程中的地表沉降以及超孔隙水压力的影响进行了分析和计算, 具体的参数和结果见图 2 和图 3. 由图 2 和图 3 可知: 随着 Poisson 比  $\nu$  的减小(从 0.49 到 0), 地表位移增大, 而超孔隙水压力减小.

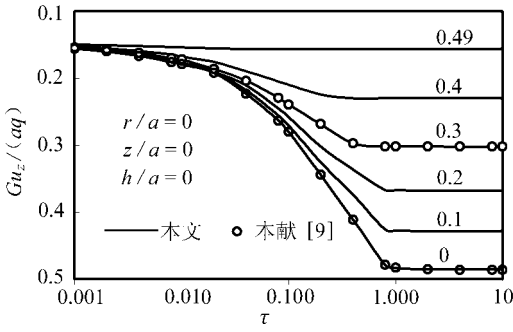


图2 Poisson 比  $\nu$  对地表沉降的影响

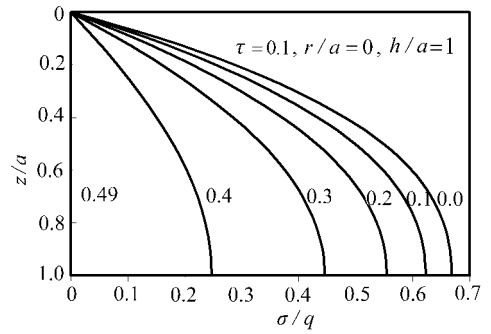


图3 Poisson 比  $\nu$  对超孔隙水压力的影响

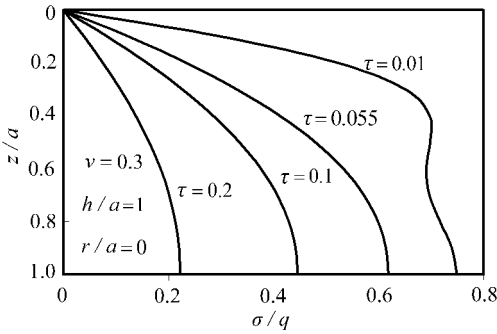


图4 超孔隙水压力随时间的变化

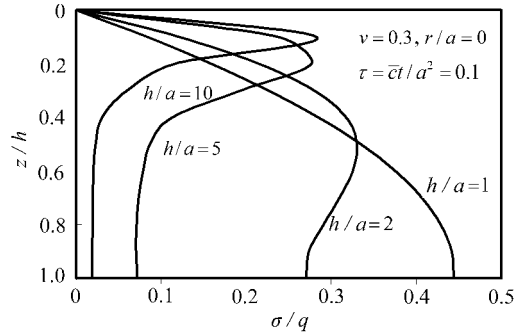


图5 厚度  $h$  对超孔隙水压力的影响

本文还对轴对称固结过程中荷载作用中心线下 ( $r/a = 0$ ) 超孔隙水压力的分布进行了分析和计算. 计算参数和结果见图 4. 由图 4 可知: 随着时间的增加, 超孔隙水压力逐渐变小, 但随深度增加而增加.

同时, 本文也对有限土层厚度对轴对称固结过程中荷载作用中心线下超孔隙水压力分布的影响进行了分析和计算. 计算参数和结果见图 5. 由图 5 可知: 随着厚度的增加, 超孔隙水压力逐渐变小, 并存在一个峰值.

### 4 结 论

本文提出了一个新方法来求解有限土层的轴对称 Biot 固结. 从轴对称 Biot 固结的控制方程出发, 结合 Laplace 变换的微分性质, 建立了 Laplace 和 Hankel 变换域内地表 ( $z = 0$ ) 和任意深度  $z$  处的位移、应力、超孔隙水压力和流量之间的关系. 结合有限土层的边界条件, 获得了 Laplace 和 Hankel 变换域内任意一点的位移、应力、超孔隙水压力和流量的解析解. 通过进行 Laplace 逆变换和 Hankel 逆变换, 得到了物理域内的解. 编制了计算程序, 并对轴对称固结进行了数值分析与计算. 计算结果显示本文方法能精确有效地求解固结问题. 本文还讨论了 Poisson 比  $\nu$  对地表沉降发展和超孔隙水压力的影响、超孔隙水压力随时间的分布、以及土层厚度对超孔隙水压力的影响. 结合传递矩阵法的概念<sup>[12-13]</sup>, 本文方法可以扩展到层状地基的 Biot 固结分析中去. 另外, 本文方法也能用来求解诸如渗透各向异性 and 考虑流体可压缩性等更为复杂的 Biot 固结问题; 而求解这些固结问题时, 位移函数难以获得; 相关的研究成果, 作者将另文介绍.

## 附 录

$$\Phi_{11} = \frac{2G\xi^2 C}{Ms} (\text{ch}\xi z - \text{ch}\varphi) + (\text{ch}\xi z + \xi z \text{sh}\xi) = \Phi_{44},$$

$$\Phi_{12} = \frac{2G\xi^2 C}{Ms} \left( \text{sh}\xi z - \frac{\xi}{q} \text{sh}\varphi \right) + \xi \text{ch}\xi z = -\Phi_{54},$$

$$\Phi_{13} = \frac{\xi C}{Ms} (\text{ch}\xi z - \text{ch}\varphi) = -\frac{\xi C \Phi_{26}}{M} = -\frac{C \Phi_{31}}{2GMs} = -\frac{\xi C \Phi_{35}}{Ms} = \frac{C \Phi_{46}}{2GM} = -\frac{\Phi_{53}}{2G\xi} = -\frac{\Phi_{62}}{2G\xi s} = -\frac{\Phi_{64}}{s},$$

$$\Phi_{14} = \frac{\xi C}{Ms} \left( \text{sh}\xi z - \frac{\xi}{q} \text{sh}\varphi \right) + \frac{1}{2G\xi} (\text{sh}\xi z + \xi z \text{ch}\xi),$$

$$\Phi_{15} = \frac{\xi C}{Ms} (\text{ch}\xi z - \text{ch}\varphi) + \frac{1}{2G\xi} \xi z \text{sh}\xi = \frac{\Phi_{42}}{4G^2 \xi^2} = -\frac{\Phi_{51}}{4G^2 \xi^2} = -\Phi_{24},$$

$$\Phi_{16} = \frac{1}{s} \left( \text{sh}\xi z - \frac{\xi}{q} \text{sh}\varphi \right) = -\frac{\Phi_{32}}{2G\xi s} = -\frac{\Phi_{34}}{s} = -\frac{\Phi_{36}}{2G\xi},$$

$$\Phi_{21} = \frac{2G\xi C}{Ms} (q \text{sh}\varphi - \xi \text{sh}\xi) - \xi z \text{ch}\xi z = -\Phi_{45},$$

$$\Phi_{22} = \frac{2G\xi^2 C}{Ms} (\text{ch}\varphi - \text{ch}\xi) + (\text{ch}\xi z - \xi z \text{sh}\xi) = \Phi_{55},$$

$$\Phi_{23} = \frac{C}{Ms} (q \text{sh}\varphi - \xi \text{sh}\xi) = -\frac{\Phi_{43}}{2G\xi} = \frac{\Phi_{61}}{2G\xi s} = \frac{\Phi_{65}}{s},$$

$$\Phi_{25} = \frac{C}{Ms} (q \text{sh}\varphi - \xi \text{sh}\xi) + \frac{1}{2G\xi} (\text{sh}\xi z - \xi z \text{ch}\xi),$$

$$\Phi_{33} = \text{ch}qz = \Phi_{66},$$

$$\Phi_{36} = \frac{M}{qC} \text{sh}qz = \frac{M^2 \Phi_{63}}{q^2 C^2},$$

$$\Phi_{41} = 2G \left[ \frac{2G\xi^2 C}{Ms} (\xi \text{sh}\xi - q \text{sh}qz) + \xi (\text{sh}\xi z + \xi z \text{ch}\xi) \right],$$

$$\Phi_{52} = 2G \left[ \frac{2G\xi^3 C}{Ms} \left( \frac{\xi}{q} \text{sh}qz - \text{sh}\xi \right) + \xi (\text{sh}\xi z - \xi z \text{ch}\xi) \right],$$

$$C = \frac{2Gk(1-\nu)}{\nu_w(1-2\nu)}, \quad q = \sqrt{\xi^2 + s/C}.$$

其中

## [参 考 文 献]

- [1] Biot M A. General theory of three- dimensional consolidation[J]. *Journal of Applied Physics*, 1941, **12**(2): 155- 164.
- [2] McNamee J, Gibson R E. Displacement functions and linear transforms applied to diffusion through porous elastic media[J]. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1960, **13**(1): 98- 111.
- [3] McNamee J, Gibson R E. Plane strain and axially symmetric problem of the consolidation of a semi- infinite clay stratum[J]. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1960, **13**(2): 210- 227.
- [4] Schiffman R L, Fungaroli A A. Consolidation due to tangential loads[A]. In: *Proceedings of the 6th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering* [C]. Toronto: University of Toronto Press, 1965, **1**: 188- 192.
- [5] Christian J T, Boehmer J W. Plane strain consolidation by finite elements[J]. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, 1970, **96**(4): 1435- 1457.
- [6] Cheng A H D, Liggett J A. Boundary integral equation method for linear porous- elasticity with applications to soil consolidation [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1984, **20**(2): 255- 278.

- [7] Booker J R, Small J C. Finite layer analysis of consolidation I [J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1982, **6**(2): 151– 171.
- [8] Booker J R, Small J C. Finite layer analysis of consolidation II [J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1982, **6**(2): 173– 194.
- [9] Booker J R, Small J C. A method of computing the consolidation behavior of layered soils using direct numerical inversion of Laplace transforms[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1987, **11**(4): 363– 380.
- [10] Talbot A. The accurate numerical inversion of Laplace transforms[J]. *Journal of Institute of Mathematics and Its Application*, 1979, **23**(1): 97– 120.
- [11] Sneddon I N. *The Use of Integral Transform*[M]. New York: McGraw– Hill, 1972.
- [12] Ai Z Y, Yue Z Q, Tham L G, et al. Extended Sneddon and Muki solutions for multilayered elastic materials [J]. *International Journal of Engineering Science*, 2002, **40**(13): 1453– 1483.
- [13] Ai Z Y, Cheng Z Y, Han J. State space solution to three– dimensional consolidation of multi– layered soils [J]. *International Journal of Engineering Science*, 2008, **46**(5): 486– 498.

## A New Analytical Solution for Axisymmetric Biot's Consolidation of a Finite Soil Layer

AI Zhi– yong, WANG Quan– sheng

(Department of Geotechnical Engineering; Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, P. R. China)

**Abstract:** A new analytical method is presented to study the axis– symmetric Biot's consolidation of a finite soil layer. Starting from the governing equations of axis– symmetric Biot's consolidation, and based on the property of the Laplace transform, the relationship of basic variables for a point of a finite soil layer was established between the ground surface ( $z = 0$ ) and the depth  $z$  in the Laplace and Hankel transform domain. Combined with the boundary conditions of the finite soil layer, the analytical solution of any point in the transform domain can be obtained. The actual solution in the physical domain can be acquired by inverting the Laplace and the Hankel transforms. The numerical analysis for the axis– symmetric consolidation of a finite soil layer was carried out by program.

**Key words:** axisymmetric Biot's consolidation; finite soil layer; Laplace transform; Hankel transform