应用数学和力学, 第 29 卷 第 12 期
2008 年 12 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 29, No. 12, Dec. 15, 2008

文章编号: 1000- 0887(2008)12- 1495- 07

膜盘联轴器非对称弯曲的一种解析解法*

朱可柯, 朱如鹏

(南京航空航天大学 机电学院, 南京 210016)

(陈立群推荐)

摘要: 考虑到膜盘的内外缘的刚性远较膜面为大, 并且非对称弯曲是在高速旋转运动下, 而引进了中面等半径圆假设, 即膜盘中面上的每个同心圆变形前后半径不变, 但同心圆所在的平面各自发生了角度不同的偏转. 在此基础上, 通过能量变分原理, 导出了相应变形的 Euler 方程. 该方程具有首次积分, 忽略一些次要项后, 可得到变形的解析解. 通过对双曲型面的膜盘计算表明, 非对称弯曲下的八面体剪应力在径向及厚向上都变化很小, 可近似认为不变, 但周向上呈明显脉动变化, 因此非对称弯曲对膜盘的疲劳寿命有重要影响.

关 键 词: 膜盘; 弯曲; 应力; 变形

中图分类号: TH133.4 文献标识码: A

引 言

膜盘联轴器是一种通过极薄的变厚度圆盘型面(最薄处仅 0.2~ 0.4 mm)来传递扭矩的挠性联轴器(图 1), 它是近几年发展起来的新型联轴装置, 具有结构简单, 无需润滑, 运行平衡, 振动小, 噪声低等特点, 被广泛应用于机电航空、石油化工等领域[1- 2].

膜盘联轴器在工作时, 如果被联接两轴间有角度不对中, 则膜盘内外缘间有弯矩 M 作用, 使内外缘产生角度偏转 α, 从而产生非对称弯曲(图 2). 文献[1]给出了非常简略的弯曲应力工程应用经验公式, 文献[2]也用有限元方法对 NML 系列膜盘联轴器进行了计算仿真. 但目前仍缺乏对膜盘弯曲问题的系统的理论研究.

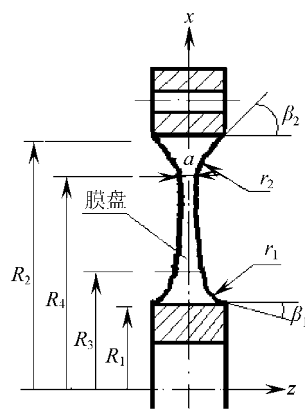

图 1 膜盘联轴器结构图

膜盘是变厚度圆薄板, 由于变厚度板弯曲问题的控制方程极为复杂, 直接求解是相当困难的. Paris 和 Delevn、郭毅和王桂芳等分别以边界元法或摄动法等多种方法对圆形薄板的非对称问题进行了研究[3- 4]. 但膜盘工作时有其特定的力学环境, 从而有可能采用更进一步的力学假设以简化问题的求解.

膜盘的内外缘刚性远较盘面为大, 因而可认为内外缘完全刚性. 更进一步, 考虑到膜盘的非对称弯曲是在高速旋转运动下的弯曲, 在任一瞬时, 膜板中面上的任一圆周将变形成为一个椭圆. 但由于轴对称性, 在一个旋转周期内, 圆周上的任一固定点将经历椭圆一周, 因而该点对圆心的平均径向位移为 0. 由

* 收稿日期: 2007- 06-05; 修订日期: 2008-10-16
作者简介: 朱可柯(1965—), 男, 湖南衡阳人, 博士研究生(联系人. E- mail: zhukekezhu@126.com).

此,为简化问题,可假定该点(总体上)没有径向位移,于是得到下列等半径圆假设:

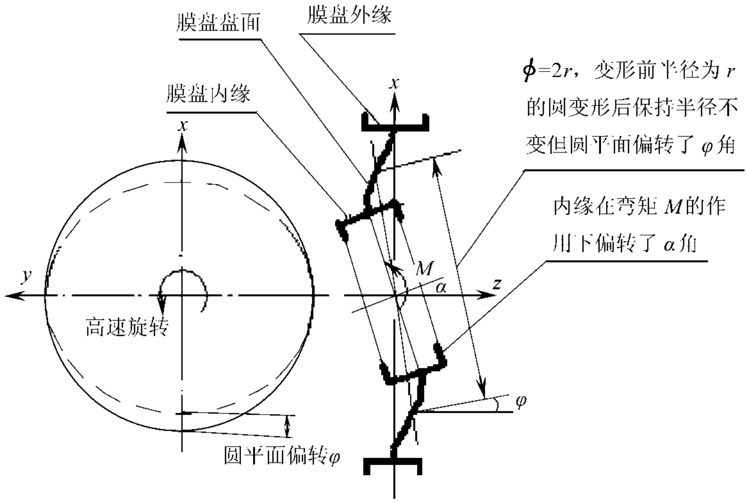

图 2 膜盘的非轴对称弯曲及等半径圆假设

盘中面上的每个同心圆变形后仍为与原半径相等的圆,但其所在的圆平面各自发生了角度不同的偏转(图 2).

在此假设的基础上就可以大大简化对膜盘弯曲变形的求解.

1 膜盘弯曲应力应变分析

1.1 膜盘的位移场

如图 2,坐标原点取为盘中面圆心,x、z 轴如图,y 轴垂直纸面向外,设 x、y、z 的单位矢分别为$\boldsymbol{m}$、$\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{n}$,膜盘内、外缘的半径分别为R_1、R_2. 设膜盘变形前中面上半径为 r 的圆变形后的偏转角为 $\varphi = \varphi(r)$,变形前为$\{r, \theta, z\}$ 的一点的位矢为

$$\boldsymbol{r}_1 = r\cos\theta\boldsymbol{m} + r\sin\theta\boldsymbol{k} + z\boldsymbol{n},$$

则根据等半径圆假设,变形后该点的位矢成为

$$\boldsymbol{r}_2 = (r\cos\theta\cos\varphi + z\sin\varphi)\boldsymbol{m} + r\sin\theta\boldsymbol{k} + (z\cos\varphi - r\cos\theta\sin\varphi)\boldsymbol{n},$$

于是,该点的位移为 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, 即

$$\begin{cases} u^x = r\cos\theta\cos\varphi + z\sin\varphi - r\cos\theta, \\ u^y = 0, \\ u^z = z\cos\varphi - r\cos\theta\sin\varphi - z. \end{cases}$$

而在圆柱坐标系下位移场的逆变分量为

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} = \frac{\partial(r, \theta, z)}{\partial(x, y, z)}\begin{pmatrix} u^x \\ u^y \\ u^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^x \\ u^y \\ u^z \end{pmatrix},$$

从而得

$$\begin{cases} u^1 = r\cos^2\theta(\cos\varphi - 1) + z\cos\theta\sin\varphi, \\ u^2 = \dfrac{1}{2}\sin2\theta(1 - \cos\varphi) - \dfrac{z}{r}\sin\theta\sin\varphi, \\ u^3 = z(\cos\varphi - 1) - r\cos\theta\sin\varphi. \end{cases} \tag{1}$$

其协变分量为

$$\begin{cases} u_1 = r\cos^2\theta(\cos\varphi - 1) + z\cos\theta\sin\varphi, \\ u_2 = \dfrac{1}{2}r^2\sin2\theta(1-\cos\varphi) - rz\sin\theta\sin\varphi, \\ u_3 = z(\cos\varphi - 1) - r\cos\theta\sin\varphi, \end{cases} \tag{2}$$

位移场的协变导数为

$$u^i_{;j} = u^i_{,j} + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} u^k, \quad u_{i;j} = u_{i,j} + \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} u_k,$$

式中, $\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}$ 为 Christoffel 符号.

将各数据代入, 有

$$\begin{bmatrix} u^1_{;1} & u^1_{;2} & u^1_{;3} \\ u^2_{;1} & u^2_{;2} & u^2_{;3} \\ u^3_{;1} & u^3_{;2} & u^3_{;3} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos^2\theta(\cos\varphi - 1) + z\varphi'\cos\theta\cos\varphi - r\varphi'\cos^2\theta\sin\varphi & r\sin2\theta\sin^2\dfrac{\varphi}{2} & \cos\theta\sin\varphi \\ \dfrac{\sin2\theta(1-\cos\varphi)}{2r} - \dfrac{z\varphi'\sin\theta\cos\varphi}{r} + \dfrac{1}{2}\varphi'\sin2\theta\sin\varphi & \sin^2(\cos\varphi - 1) & -\dfrac{\sin\theta\sin\varphi}{r} \\ -\cos\theta\sin\varphi - r\varphi'\cos\theta\cos\varphi - z\varphi'\sin\varphi & r\sin\theta\sin\varphi & \cos\varphi - 1 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} u_{1;1} & u_{1;2} & u_{1;3} \\ u_{2;1} & u_{2;2} & u_{2;3} \\ u_{3;1} & u_{3;2} & u_{3;3} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos^2\theta(\cos\varphi - 1) + z\varphi'\cos\theta\cos\varphi - r\varphi'\cos^2\theta\sin\varphi & r\sin2\theta\sin^2\dfrac{\varphi}{2} & \cos\theta\sin\varphi \\ \dfrac{1}{2}r\sin2\theta(1-\cos\varphi) - rz\varphi'\sin\theta\cos\varphi + \dfrac{1}{2}\varphi'\sin2\theta\sin\varphi & r^2\sin^2(\cos\varphi - 1) & -r\sin\theta\sin\varphi \\ -\cos\theta\sin\varphi - r\varphi'\cos\theta\cos\varphi - z\varphi'\sin\varphi & r\sin\theta\sin\varphi & \cos\varphi - 1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

1.2 膜盘的应力应变场

Lagrange 应变张量为

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i;j} + u_{j;i} + u^k_{;i}u_{k;j}),$$

将各数据代入, 得

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} z\varphi'\cos\theta + \dfrac{1}{2}z^2\varphi'^2 + \dfrac{1}{4}r^2\varphi'^2\cos^2\theta & -\dfrac{1}{2}rz\varphi'\sin\theta & -\dfrac{1}{2}r\varphi'\cos\theta \\ -\dfrac{1}{2}rz\varphi'\sin\theta & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{2}r\varphi'\cos\theta & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

应力张量 $\sigma^{ij} = E^{ijlm}e_{lm}$($E^{ijlm}$ 为弹性模量) 得

$$\begin{pmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} & \sigma^{13} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} & \sigma^{23} \\ \sigma^{31} & \sigma^{32} & \sigma^{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (\lambda+2\mu)z\varphi'\cos\theta+\frac{\lambda+2\mu}{4}r^2\varphi'^2\cos^2\theta+\frac{\lambda+2\mu}{2}z^2\varphi'^2 & -\mu\frac{z}{r}\varphi\sin\theta & -\mu r\varphi'\cos\theta \\ -\mu\frac{z}{r}\varphi'\sin\theta & \frac{2\lambda z\varphi'\cos\theta+\lambda z^2\varphi'^2}{2r^2}+\frac{\lambda}{4}\varphi'^2\cos^2\theta & 0 \\ -\mu r\varphi'\cos\theta & 0 & \lambda z\varphi'\cos+\frac{\lambda}{2}z^2\varphi'^2+\frac{\lambda}{4}r^2\varphi'^2\cos^2\theta \end{pmatrix}, \tag{6}$$

其中, λ、μ为 Lam 系数.

1.3 膜盘的弹性应变能

膜盘内弹性能量密度为

$$\begin{aligned} J = \frac{1}{2}\sigma^{ij}e_{ij} = {} & \frac{\lambda+2\mu}{4}z^2\varphi'^2+\frac{\mu}{2}r^2\varphi'^2\cos^2\theta+\frac{\lambda+\mu}{2}z^2\varphi'^2\cos^2\theta+ \\ & \frac{\lambda+2\mu}{2}r^2z\varphi'^3\cos^3\theta+\frac{\lambda+2\mu}{2}z^3\varphi'^3\cos\theta+\frac{\lambda+2\mu}{16}r^4\varphi'^4\cos^2\theta\cos2\theta+ \\ & \frac{\lambda+2\mu}{8}z^4\varphi'^4+\frac{\lambda+2\mu}{4}r^2z^2\varphi'^4\cos^2\theta. \end{aligned} \tag{7}$$

设膜盘厚度型面方程为 $b = b(r)$, 外力矩为 M, 并注意到 $\varphi(R_2) = 0$, 则系统总能量为

$$\begin{aligned} H = {} & \iiint_\Omega J\,\mathrm{d}V - M\varphi(R_1) = \\ & \int_{R_2}^{R_1}\left(\int_{-b/2}^{b/2}\int_0^{2\pi} Jr\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r + M\varphi\Big|_{R_2}^{R_1} = \int_{R_2}^{R_1}F(r,\varphi')\,\mathrm{d}r, \end{aligned} \tag{8}$$

式中

$$\begin{aligned} F(r,\varphi') = {} & M\varphi'+\frac{\pi\mu}{2}r^3b\varphi'^2+\frac{\pi(\lambda+3\mu)}{24}rb^3\varphi'^2+\frac{3\pi(\lambda+2\mu)}{32}r^5b\varphi'^4+ \\ & \frac{\pi(\lambda+2\mu)}{48}r^3b^3\varphi'^4+\frac{\pi(\lambda+2\mu)}{320}rb^5b\varphi'^4. \end{aligned} \tag{9}$$

1.4 变分原理与膜盘的变形转角方程

系统总能量 $H = H(\varphi)$ 是关于弯曲转角 $\varphi = \varphi(r)$ 的泛函. 在平衡状态时, 能量取极小值, 故根据能量变分原理, 有 $\delta H = 0$, 从而得相应的 Euler 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\right) = 0,$$

即

$$\begin{aligned} & \frac{3\mu}{\lambda+2\mu}r^2b\varphi'+\frac{\lambda+3\mu}{12(\lambda+2\mu)}b^3\varphi'+\frac{\mu}{\lambda+2\mu}r^3b'\varphi'+\frac{\lambda+3\mu}{4(\lambda+2\mu)}rb^2b'\varphi'+ \\ & \frac{15}{8}r^4b\varphi'^3+\frac{1}{4}r^2b^3\varphi'^3+\frac{1}{80}b^5\varphi'^3+\frac{3}{8}r^5b'\varphi'^3+\frac{1}{4}r^3b^2b'\varphi'^3+ \\ & \frac{1}{16}rb^4b'\varphi'^3+\frac{\mu}{\lambda+2\mu}r^3b\varphi''+\frac{\lambda+3\mu}{12(\lambda+2\mu)}rb^3\varphi''+\frac{9}{8}r^5b\varphi'^2\varphi''+ \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4}r^3b^3\varphi'^2\varphi'' + \frac{3}{80}rb^5\varphi'^2\varphi'' = 0, \tag{10}$$

并且有边界条件(一个固定边界, 一个自然边界):

$$\begin{cases} \varphi(R_2) = 0, \\ \mu r^3 b\varphi' + \frac{\lambda+3\mu}{12}rb^3\varphi' + \frac{3}{8}(\lambda+2\mu)r^5 b\varphi'^3 + \frac{\lambda+2\mu}{12}r^3b^3\varphi'^3 + \\ \qquad \frac{\lambda+2\mu}{80}rb^5\varphi'^3 \big|_{r=R_1} = -\frac{M}{\pi}. \end{cases} \tag{11}$$

由于泛函 $H = \int_{R_2}^{R_1} F(r, \varphi')\,\mathrm{d}r$ 中, 被积式不显含 φ, 故 Euler 方程有首次积分[5]:

$$\varphi'^3 + \left[\frac{240\mu r^2 + 20(\lambda+2\mu)b^2}{(\lambda+2\mu)(90r^4+20r^2b^2+3b^4)}\right]\varphi' + \frac{240M}{\pi(\lambda+2\mu)(90r^5b+20r^3b^3+3b^5)} = 0.$$

若考虑到 $\varphi'^3 \ll \varphi'$, 则有

$$\varphi' \approx -\frac{12M}{12\pi\mu r^3 b + \pi(\lambda+3\mu)rb^3}, \tag{12}$$

于是

$$\varphi(r) = 12M\int_r^{R_1}\frac{\mathrm{d}t}{12\pi\mu t^3 b + \pi(\lambda+3\mu)tb^3}. \tag{13}$$

特别, 内缘处有

$$\varphi_1 = \varphi(R_1) = 12M\int_{R_2}^{R_1}\frac{\mathrm{d}r}{12\pi\mu r^3 b + \pi(\lambda+3\mu)rb^3}, \tag{14}$$

从而膜盘的非对称弯曲刚度:

$$K_M = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\varphi_1} = 1\Big\backslash\left(12\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{12\pi\mu r^3 b + \pi(\lambda+3\mu)rb^3}\right). \tag{15}$$

将 $\varphi(r)$ 代入应力公式就可求得膜盘非对称弯曲时的应力.

2 典型膜盘型面的非对称弯曲计算

本文使用 Mathematica 软件对 40Cr 钢制的典型膜盘型面——双曲厚度型面的膜盘进行了计算分析.

计算数据如下:

膜盘内半径 $R_1 = 50$ mm, 膜盘外半径 $R_2 = 100$ mm, 膜盘外径处厚度 $t_0 = 0.3$ mm, 并取弹性模量 $E = 206$ GPa, Poisson 比 $\nu = 0.3$, 弯矩 $M = 200$ N·m.

于是 Lam 系数:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 118.85\ \mathrm{GPa},$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = 79.23\ \mathrm{GPa}.$$

其型面厚度方程为

$$b(r) = \frac{3\,000}{r^2}\ (\text{单位: mm}), \qquad 50\ \mathrm{mm} \leqslant r \leqslant 100\ \mathrm{mm}.$$

经过计算分析可知, 对双曲型膜盘, 非对称弯曲下的八面体应力在径向及厚向上变化都很小(图 3、图 4), 但周向上有较大的脉动变化(图 5), 因而膜盘的非对称弯曲对膜盘的疲劳寿命

有重要影响．弯曲偏转角 φ随半径的变化如图6，而弯曲刚度为 K_M = 18.8 (kN・m)/(°)，与文献[2]的 16.4 (kN・m)/(°) 十分接近．

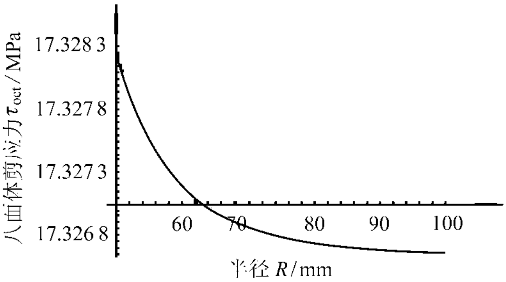

图 3　八面体剪应力的径向变化
(外表面, 0°方向)

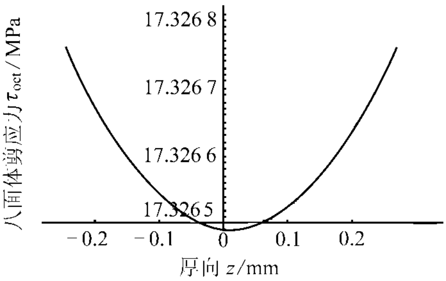

图 4　八面体剪应力的厚向变化
(R = 75 mm, 0°方向)

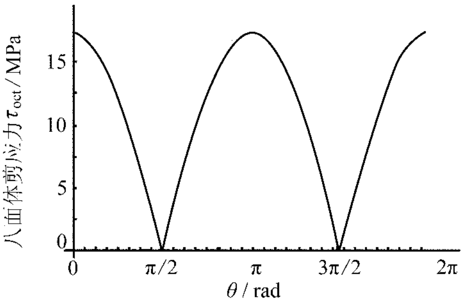

图 5　八面体剪应力的周向变化
(R = 75 mm, 外表面)

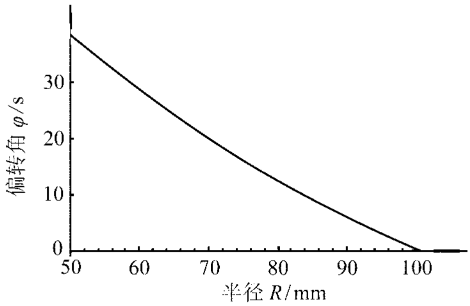

图 6　变形转角

3　结　　论

1) 膜盘的非对称弯曲可通过变形前后中面圆半径不变的合理假设, 大大简化其求解过程而可得到解析解．

2) 对双曲型膜盘, 非对称弯曲下的八面体剪应力在径向及厚向上都变化很小, 可近似认为不变, 但周向上呈明显脉动变化, 因此非对称弯曲对膜盘的疲劳寿命有重要影响．

[参　考　文　献]

[1]　花家寿. 新型联轴器与离合器[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1989.

[2]　郭小明, 王顺玉, 龚建民. 膜盘联轴器力学性能研究与优化设计[J]. 东南大学学报, 1993, **23**(6): 135- 138.

[3]　Paris F, Delevn S. Boundary element method applied to the analysis of thin plates[J]. *Computers and Structure*, 1987, **25**(2): 225- 233.

[4]　郭毅, 王桂芳. 圆形弹性薄板非轴对称大挠度问题的一个解法[J]. 应用数学和力学, 1998, **19**(9): 837- 845.

[5]　欧斐君, 梁建华. 变分法及其应用[M]. 西安: 陕西科学技术出版社, 1987.

[6]　薛大为. 板壳理论[M]. 北京: 北京工业学院出版社, 1988.

An Analytic Solution to the Unsymmetrical Bending Problem of Diaphragm Coupling

ZHU Ke-ke, ZHU Ru-peng
(College of Mechanical and Electrical Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, P. R. China)

Abstract: As the rigidity of either the hub or rim of the diaphragm coupling is much larger than that of the disk, and the unsymmetrical bending is under the condition of high speed revolution, a hypothesis was supposed that each circle in the middle plane before deformation remains its radius unchangeable after deformation but the plane on which the circle lies has a varying deflecting angle. Upon this and through the principle of energy variation, the corresponding Euler's equation, which has the primary integral, can be obtained. After some subsidiary factors were neglected, the analytic solution was achieved. Applying these formulas to a hyperbolic model of diaphragm, the results show that the octahedral shear stress varying less along either radial or thickness direction, but fluctuated greatly and periodically along circumferential direction, thus the unsymmetrical bending affects the material's fatigue significantly.

Key words: diaphragm coupling; bending; stress; deformation