

# 混沌 Mathieu-Duffing 振子的开闭环控制<sup>\*</sup>

沈建和<sup>1,2</sup>, 陈树辉<sup>1</sup>

(1. 中山大学 应用力学与工程系, 广州 510275;

2. 福建师范大学 数学与计算机科学学院, 福州 350007)

(陈立群推荐)

**摘要:** 基于开闭环控制的思想, 设计了一类由外激励与线性误差反馈组成的开闭环控制器, 研究了 Mathieu-Duffing 振子混沌轨道至任意目标周期轨道的控制问题; 同时, 利用 Liapunov 稳定性理论与二阶常微分方程初值问题的一个比较定理, 证明了上述开闭环控制夹带盆(basin of entrainment)的全局性. 最后, 利用数值模拟, 验证了理论结果的正确性.

**关键词:** Mathieu-Duffing 振子; 混沌控制; 开闭环控制; 全局夹带盆

**中图分类号:** O322      **文献标识码:** A

## 引 言

自上个世纪混沌发现以来, 由于其具有初值敏感性、遍历性等特殊的动力学性质, 许多科学以及工程领域的学者开始怀疑: 混沌作为一种广泛存在的运动形式, 它是否可控、可驾驭? 直到 1990 年, Ott、Grebogi 和 Yorke 的创新性工作<sup>[1]</sup>发表以后, 这个疑问才被消除. 文献[1]指出: 由于混沌的遍历性, 通过对系统参数的微调, 可实现对不稳定的目标周期轨道的镇定, 即实现混沌轨道至目标周期轨道的控制. 此后, 混沌控制的研究吸引了来自数学、力学、物理、化学乃至社会科学等领域学者的广泛关注. 许多行之有效的混沌控制方法被提出, 诸多混沌控制的潜在应用被发现或预测. 关于混沌控制的理论、方法及工程应用, 可见综述性的文献[2-4]以及文献[5].

对于混沌控制, 应该说, 至今没有严格的定义. 普遍承认的说法是: 通过对混沌系统进行有目的扰动, 使之出现期望的动力学行为. 关于混沌控制的方法, 可以分为两大类: 即反馈控制与非反馈控制, 它们有各自的优缺点<sup>[6]</sup>. 1995 年, Jackson 等<sup>[6]</sup>比较了反馈控制与非反馈控制的优缺点, 并联合两者的优点提出了复杂系统动力学控制的开闭环控制方法. 开闭环控制方法具有很强的鲁棒性与抗噪声能力<sup>[7]</sup>, 因此, 自该法提出以来, 已被广泛应用于多种控制问题. Wheeler 和 Schieve<sup>[8]</sup>应用该法, 研究了噪声环境下神经系统混沌响应至周期响应的控制. Chen 等应用开闭环控制方法, 研究了离散动力系统混沌、超混沌的控制问题<sup>[9]</sup>以及同步问题<sup>[10]</sup>. 同时, Chen 等提出了改进的开闭环控制方法<sup>[11]</sup>以及参数开闭环控制方法<sup>[12]</sup>, 分别研究了混沌

\* 收稿日期: 2008-07-19; 修订日期: 2008-11-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10672193)

作者简介: 沈建和(1980—), 男, 福建漳州人, 博士(联系人, E-mail: jianheshen@sina.com).

振动系统以及离散系统的控制问题. Tian 等<sup>[13]</sup>将受控系统在目标动力学位置 Taylor 展开至高阶, 提出了非线性开闭环控制方法.

然而, 开闭环控制方法<sup>[6]</sup>及其改进<sup>[11-13]</sup>的一个必要步骤就是在目标动力学(goal dynamics)处的 Taylor 展开. 这意味着: 开闭环控制方法只是局部有效. 因此, 若受控动力学的初始位置不在目标动力学的附近, 该法可能失效. 故在实际应用中, 对于开闭环控制方法的夹带盆(basin of entrainment)的估计是十分重要的, 有时甚至也是十分困难的. 在目标动力学具有指数型有界的条件下, Jackson 等<sup>[6]</sup>证明了自治 Duffing 振子、Lorenz 系统以及 Rössler 系统开闭环控制的夹带盆的全局性; 同时, 对 Chua 电路的开闭环控制局部夹带盆的大小进行了估计. Chen 等<sup>[9-10]</sup>对于几类离散混沌、超混沌动力系统的开闭环控制的夹带盆也做出了估计.

对于非自治 Mathieu-Duffing 振子, 本文基于开闭环控制的思想, 设计了一类由外激力与线性误差反馈组成的开闭环控制器, 研究其混沌轨道至任意的目标周期、高周期轨道的控制问题; 同时, 利用 Liapunov 稳定性理论<sup>[14]</sup>与二阶常微分方程初值问题的一个比较定理, 证明了上述开闭环混沌控制夹带盆的全局性.

## 1 Mathieu-Duffing 振子的周期倍化分岔与混沌

考虑由如下二阶非自治微分方程描述的 Mathieu-Duffing 振子:

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} - (\alpha + \beta\sin(\Omega t))x + \gamma x^3 = 0, \quad (1)$$

这里, 点“ $\cdot$ ”表示对时间的导数. 方程(1)可用于描述某些力学与工程问题, 如带有简谐变速度的轴向运动梁的单模横向振动<sup>[15]</sup>.

若以方程(1)的参激振幅作为控制参数, 而将其它参数固定为

$$\xi = 0.125, \alpha = 1.0, \Omega = 2.0, \gamma = 1.0, \quad (2)$$

则在参激振幅的连续变化下, Mathieu-Duffing 振子经连续的周期倍化分岔进入混沌<sup>[16]</sup>. 根据文献[16]的结果, 方程(1)的部分分岔、混沌动力学行为可以归结如下:

a) 当  $\beta \in (3.60, 4.82577)$  时, Mathieu-Duffing 振子做稳定的周期-1 运动, 这里周期-1 代表  $T = 2\pi/\Omega = \pi$ ,  $\beta_1 = 4.82577$  为首次周期倍化分岔值;

b) 当  $\beta \in (4.82577, 5.19379)$  时, Mathieu-Duffing 振子做稳定的周期-2 运动,  $\beta_2 = 5.19379$  为第 2 次周期倍化分岔值;

c) 当  $\beta \in (5.19379, 5.25254)$  时, Mathieu-Duffing 振子做稳定的周期-4 运动,  $\beta_3 = 5.25254$  为第 3 次周期倍化分岔值;

d) 当  $\beta \in (5.25254, 5.264566)$  时, Mathieu-Duffing 振子做稳定的周期-8 运动,  $\beta_4 = 5.264566$  为第 4 次周期倍化分岔值;

e) 当  $\beta \in (5.264566, 5.26710)$  时, Mathieu-Duffing 振子做稳定的周期-16 运动,  $\beta_5 = 5.26710$  为第 5 次周期倍化分岔值, 等等;

f) 当  $\beta \approx 5.30$  时, Mathieu-Duffing 振子进入混沌运动, 无穷多条不稳定的周期轨道镶嵌于混沌吸引子中. 当  $\beta = 5.30$  时, Mathieu-Duffing 振子的混沌轨道的时程图、平面相图可见图 1~2.

基于增量谐波平衡法, 文献[16]也给出了确定参数条件下 Mathieu-Duffing 振子的周期、倍周期轨道的近似解析表达式. 例如, 当  $\beta = 4.60$  时, Mathieu-Duffing 振子的周期-1 轨道的近似解析表达式为

$$\begin{aligned}
 x(t) = & 0.586\ 535\ 390\ 432\ 512 - 0.718\ 365\ 761\ 542\cos(\Omega t) + \\
 & 0.056\ 036\ 773\ 531\cos(2\Omega t) + 0.118\ 463\ 162\ 681\cos(3\Omega t) - \\
 & 0.016\ 142\ 904\ 707\cos(4\Omega t) - 0.006\ 967\ 913\ 833\cos(5\Omega t) + \\
 & 0.002\ 047\ 153\ 488\cos(6\Omega t) + 0.000\ 092\ 090\ 702\cos(7\Omega t) - \\
 & 0.000\ 128\ 184\ 885\cos(8\Omega t) + 2.342\ 016\ 089\ 748\sin(\Omega t) - \\
 & 0.226\ 516\ 753\ 320\sin(2\Omega t) - 0.075\ 278\ 874\ 083\sin(3\Omega t) + \\
 & 0.020\ 442\ 538\ 724\sin(4\Omega t) - 0.002\ 304\ 437\ 953\sin(5\Omega t) - \\
 & 0.000\ 458\ 622\ 014\sin(6\Omega t) + 0.000\ 410\ 264\ 565\sin(7\Omega t) - \\
 & 0.000\ 073\ 631\ 481\sin(8\Omega t), \tag{3}
 \end{aligned}$$

其中,  $\Omega = 2.0$ .

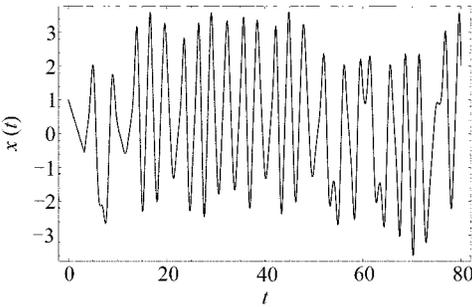


图1 当  $\beta = 5.30$  时 Mathieu-Duffing 振子混沌轨道的时程图

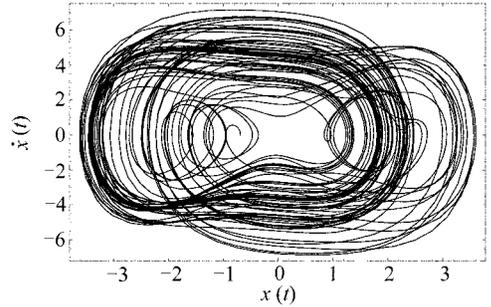


图2 当  $\beta = 5.30$  时 Mathieu-Duffing 振子混沌轨道的平面相图

## 2 开闭环控制器

假设  $(x(t), \dot{x}(t))$  是方程(1)任意的目标周期轨道, 而  $(y(t), \dot{y}(t))$  是方程(1)的混沌轨道. 我们的目标是: 通过设计适当的控制器, 使得方程(1)的混沌轨道都能被控制至任意的目标周期轨道, 即使得有如下关系成立:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t) - x(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |\dot{y}(t) - \dot{x}(t)| = 0, \tag{4}$$

当参激振幅  $\beta = \beta_p$  时, 目标周期轨道  $x = x(t)$  满足

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} - (\alpha + \beta_p \sin(\Omega t))x + \gamma x^3 = 0, \tag{5}$$

而当参激振幅  $\beta = \beta_c$  时, 混沌轨道  $y = y(t)$  满足

$$\ddot{y} + 2\xi\dot{y} - (\alpha + \beta_c \sin(\Omega t))y + \gamma y^3 = 0. \tag{6}$$

对方程(6)施加控制器  $u(t)$  的作用, 可得受控方程

$$\ddot{y} + 2\xi\dot{y} - (\alpha + \beta_c \sin(\Omega t))y + \gamma y^3 = u(t). \tag{7}$$

引入误差变量:  $e = y - x$ , 则方程(7)化为

$$(\ddot{e} + \ddot{x}) + 2\xi(\dot{e} + \dot{x}) - (\alpha + \beta_c \sin(\Omega t))(e + x) + \gamma(e + x)^3 = u(t), \tag{8}$$

整理方程(8)可得

$$\ddot{e} + 2\xi\dot{e} - (\alpha + \beta_c \sin(\Omega t) - 3\gamma x^2)e + 3\gamma x e^2 + \gamma e^3 + \Delta\beta \sin(\Omega t)x = u(t), \tag{9}$$

其中,  $\Delta\beta = \beta_p - \beta_c$ .

若控制器设计为

$$u(t) = u_o(t) + u_c(t), \tag{10}$$

其中

$$u_0(t) = \Delta \beta x \sin(\Omega t) \quad (11)$$

与

$$u_c(t) = [k_1 - (\alpha + \beta_c \sin(\Omega t)) + 3\lambda x^2](y - x) + (k_2 + 2\xi)(y - x) \quad (12)$$

可分别视为控制器(10)的开环与闭环部分,  $k_i (i = 1, 2)$  为反馈系数, 那么, 误差系统(9)化为

$$\ddot{e} - k_2 e - k_1 e + 3\lambda x e^2 + \lambda e^3 = 0, \quad (13)$$

显然,  $e = 0$  是非自治二阶方程(13)的平衡点. 根据微分方程理论, 由  $x(t)$  的有界性可知: 方程(13)在平衡点  $e = 0$  处的局部稳定性由其线性化方程

$$\ddot{e} - k_2 e - k_1 e = 0 \quad (14)$$

决定.

根据 Hurwitz 判据, 若反馈系数  $k_i (i = 1, 2)$  为负, 则方程(14)全局渐近稳定, 即方程(13)局部渐近稳定. 事实上, 在第3节, 我们将证明: 方程(13)为全局渐近稳定. 这表明: 混沌 Mathieu-Duffing 振子的开闭环控制的夹带盆为全局. 在相空间中吸引盆上任一点出发的混沌轨道, 在控制器(10)的作用下, 都可被夹带至目标周期轨道.

### 3 夹带盆的全局性

首先, 给出二阶常微分方程初值问题的一个比较定理.

引理 1 考虑如下二阶非线性常微分方程的初值问题:

$$\begin{cases} \ddot{z}_1 = f(t, z_1, z_1'), \\ z_1(t_0) = z_0, z_1'(t_0) = z_0' \end{cases} \quad (15)$$

与

$$\begin{cases} \ddot{z}_2 = F(t, z_2, z_2'), \\ z_2(t_0) = z_0, z_2'(t_0) = z_0'. \end{cases} \quad (16)$$

若对于任意的  $(t, z_i, z_i') \in R^3 (i = 1, 2)$ , 方程(15)与(16)的右端向量场满足

$$f(t, z_1, z_1') \leq F(t, z_2, z_2'), \quad (17)$$

那么, 对于初值问题(15)与(16)的解  $z_1(t)$  与  $z_2(t)$ , 有

$$z_1(t) \leq z_2(t), \quad t \geq t_0.$$

证明 定义函数  $\phi(t) = z_1(t) - z_2(t)$ , 则由式(17)式可知

$$\ddot{\phi}(t) = \ddot{z}_1(t) - \ddot{z}_2(t) = f(t, z_1, z_1') - F(t, z_2, z_2') \leq 0, \quad (18)$$

因此

$$\dot{\phi}(t) \leq \dot{\phi}(t_0) = 0, \quad t \geq t_0, \quad (19)$$

进一步的有

$$\phi(t) \leq \phi(t_0) = 0, \quad t \geq t_0 \quad (20)$$

即

$$z_1(t) \leq z_2(t), \quad t \geq t_0, \quad (21)$$

得证.

定义  $M_1 = \min_{t \in [0, T]} x(t)$ ,  $M_2 = \max_{t \in [0, T]} x(t)$ , 其中,  $T$  为周期轨道  $x(t)$  的周期. 考虑方程(13)的一组比较方程

$$\ddot{e} - k_2 e - k_1 e + 3\lambda M_1 e^2 + \lambda e^3 = 0 \quad (22)$$

以及

$$\ddot{e} - k_2 e - k_1 e + 3\gamma M_2 e^2 + \gamma e^3 = 0, \quad (23)$$

这里  $\gamma > 0$ . 方程(22)、(23)都为二阶非线性自治常微分方程,较之非自治常微分方程(13),它们的稳定性比较容易讨论.

若能证明方程(22)、(23)在平衡点  $e = 0$  处为全局渐近稳定,则根据引理 1 可知:方程(13)在平衡点  $e = 0$  处也是全局渐近稳定,即混沌 Mathieu-Duffing 振子开闭环控制的夹带盆的全局性得证.

引理 2 若反馈系数满足

$$k_1 < -2\gamma M_1^2 < 0, \quad k_2 < 0,$$

则方程(22)的平衡点  $e = 0$  处为全局渐近稳定.

证明 构造如下 Liapunov 函数:

$$V(e, \dot{e}) = \frac{\dot{e}^2}{2} - \frac{k_1 e^2}{2} + \gamma M_1 e^3 + \frac{\gamma e^4}{4} = \frac{\dot{e}^2}{2} + \frac{e^2}{2} \left[ \frac{\gamma}{2} (e + 2M_1)^2 - k_1 - 2\gamma M_1^2 \right], \quad (24)$$

若反馈系数满足

$$k_1 < -2\gamma M_1^2 < 0,$$

则 Liapunov 函数(24)正定.

又因为

$$\left. \frac{dV(e, \dot{e})}{dt} \right|_{(22)} = k_2 \dot{e}^2,$$

只要反馈系数  $k_2 < 0$ , 则上述函数为负定. 因此,根据 Liapunov 稳定性理论<sup>[14]</sup>,只要反馈系数满足

$$k_1 < -2\gamma M_1^2 < 0, \quad k_2 < 0,$$

则方程(22)全局渐近稳定. 引理 2 得证.

类似地,对于方程(23),有如下结论.

引理 3 若反馈系数满足

$$k_1 < -2\gamma M_2^2 < 0, \quad k_2 < 0,$$

则方程(23)的平衡点  $e = 0$  处全局渐近稳定.

根据引理 1~ 3,有如下结论:

定理 1 若反馈系数满足

$$k_1 < \min \left\{ -2\gamma M_1^2, -2\gamma M_2^2 \right\} < 0, \quad k_2 < 0, \quad (25)$$

则方程(13)在平衡点  $e = 0$  处全局渐近稳定,即混沌 Mathieu-Duffing 振子开闭环控制的夹带盆为全局.

## 4 数值模拟

### 4.1 混沌轨道至周期-1轨道的控制

假设控制的目标是将  $\beta_c = 5.30$  时的 Mathieu-Duffing 振子的混沌轨道夹带至  $\beta_p = 4.60$  的周期-1轨道(此时,该轨道为镶嵌于混沌吸引子中的不稳定周期轨道).将(2)式的参数值以及  $\Delta\beta = \beta_p - \beta_c = -0.70$  代入(10)式,可得控制器为

$$u(t) = -0.7x\sin 2t + (k_1 - 1.0 - 5.3\sin(2t) + 3x^2)(y - x) + (k_2 + 0.25)(y - x). \quad (26)$$

从(26)式可知:控制器的设计与目标周期轨道有关.然而,一般说来,目标周期轨道的精确解析表达式难以求得.因此,通常采用数值积分或者解析近似的办法来获得目标周期轨道.本文采用后者.从现实控制的角度来看,利用目标周期轨道的解析近似来设计控制器,比较方便应用、实现.Chen等<sup>[17]</sup>、Li等<sup>[18]</sup>采用谐波平衡法,求得目标周期轨道的近似解析表达式,并设计了控制器进行相关系统的混沌控制.但从数值模拟的结果来看,由于单谐波表示的周期轨道的精度较低,其控制效果不是很理想.本文将利用文献[16]的定量结果,即利用基于增量谐波平衡法得到的多谐波表示的目标周期轨道的近似解析表达式来设计控制器.例如,可利用(3)式作为目标周期-1轨道的表达式来设计控制器(26).

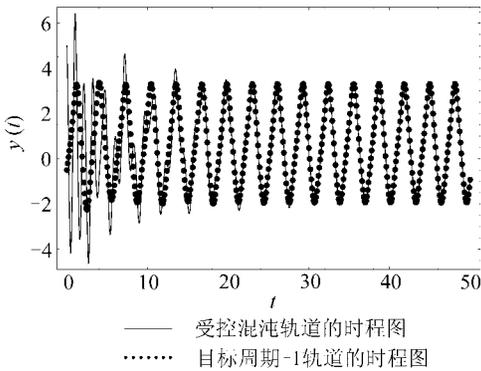


图3  $k_1 = -26.0, k_2 = -0.2$  的模拟结果

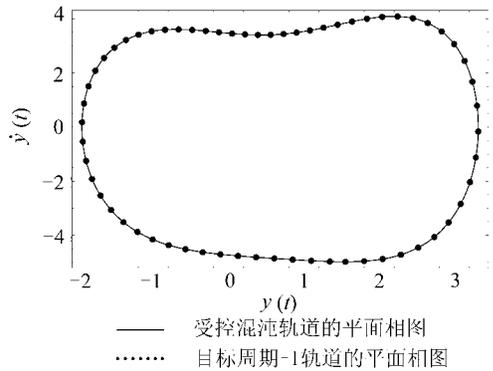


图4  $k_1 = -26.0, k_2 = -0.2$  的模拟结果

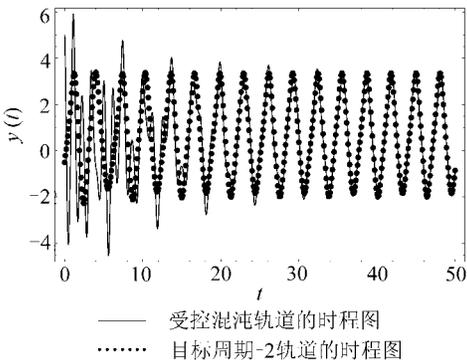


图5  $k_1 = -26.0, k_2 = -0.2$  的模拟结果

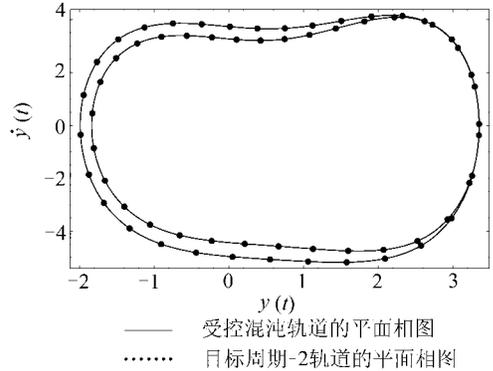


图6  $k_1 = -26.0, k_2 = -0.2$  的模拟结果

根据(3)式,可大约得  $M_2 = -M_1 = 3.60$ ;进而由(25)式,可确定反馈系数的取值范围.取反馈系数  $k_1 = -26.0, k_2 = -0.20$ ,使之满足(25)式;那么,根据定理1可知:Mathieu-Duffing 振子混沌轨道开闭环控制的夹带盆为全局.此时,对于任意给定的混沌轨道的初值(只要在吸引盆内),在控制器(26)的作用下,都可将混沌轨道控制至目标周期-1轨道.例如,任取混沌轨道的初值为  $(y(0), y\dot{(0)}) = (5.0, -5.0)$ ,数值模拟的控制结果如图3、4所示.图中,实线代表控制后的混沌轨道,点线代表数值的目标周期-1轨道.图3、4的结果验证了开闭环控制器的有效性以及理论分析的正确性.

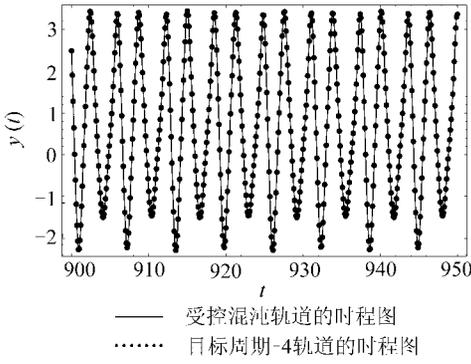


图7  $k_1 = -26.0, k_2 = -0.2$  的模拟结果

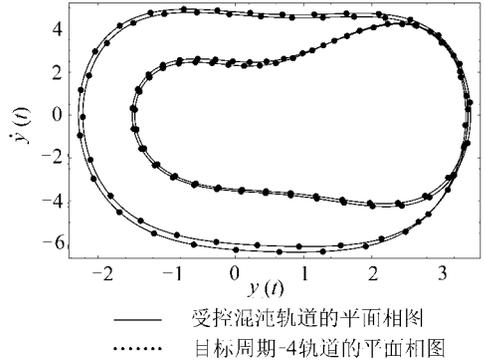


图8  $k_1 = -26.0, k_2 = -0.2$  的模拟结果

#### 4.2 混沌轨道至高周期轨道的控制

同样地, 利用控制器式 (10), 可实现 Mathieu-Duffing 振子混沌轨道至高周期轨道的控制. 例如, 若控制的目标是将混沌轨道夹带至  $\beta_p = 4.84$  的周期 2 轨道(此时, 该周期 2 轨道非稳定); 那么, 类似于 4.1 节, 可通过 (10) 式确定相应的开闭环控制器. 取与图 3、4 相同的反馈系数与初值条件, 数值模拟的控制结果可见图 5、6 所示. 与图 3、4 类似, 图中实线代表控制后的混沌轨道, 点线代表数值的目标周期-2 轨道.

类似地, 图 7、8 模拟出了混沌轨道至参数  $\beta_p = 5.21$  时的目标周期-4 轨道(此时, 该周期 4 轨道非稳定)的控制结果. 至于混沌轨道往其它的目标周期轨道的控制, 可一样处理, 这里, 数值模拟的结果不再一一给出.

### 5 进一步的讨论

注 1 从定理 1 可知: 在控制器(10)的作用下, Mathieu-Duffing 振子的任一混沌轨道都可控制至目标周期轨道; 事实上, 不仅是混沌响应, 对于当前参数状态下的 Mathieu-Duffing 振子的任意响应, 包括混沌响应(吸引盆内出发的轨道)与非混沌响应(吸引盆外出发的轨道), 都可被控制至目标周期轨道.

注 2 根据前面的讨论可知:  $k_{1c} = \min\{-2\sqrt{M_1^2}, -2\sqrt{M_2^2}\}$ ,  $k_{2c} = 0$  可认为是混沌 Mathieu-Duffing 振子全局可控的临界耦合强度; 而  $k_{1c} = 0, k_{2c} = 0$  则是对应于混沌 Mathieu-Duffing 振子开闭环局部可控的临界耦合强度.

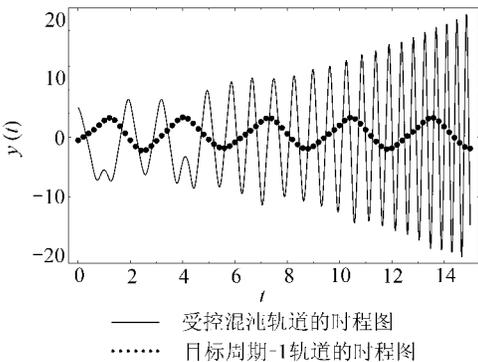


图9  $k_1 = 0.5, k_2 = 0.3$  的模拟结果

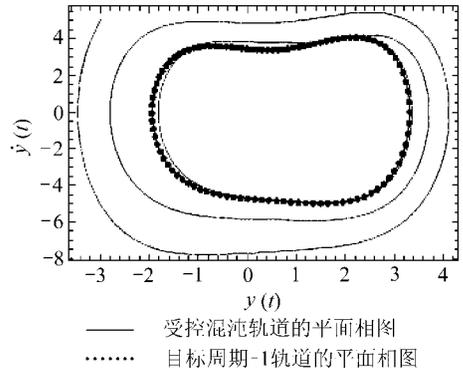


图10  $k_1 = 0.5, k_2 = 0.3$  的模拟结果

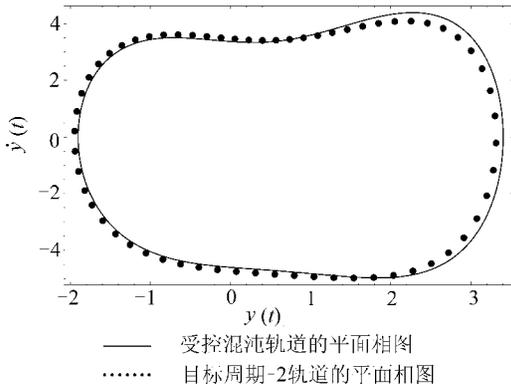


图 11  $k = -20.0$  的模拟结果

注 3 根据注 2, 若在控制器(10)中取正的反饋系数, 则开闭环控制器(10)无法完成 Mathieu-Duffing 振子混沌轨道至目标周期轨道的控制. 以混沌轨道至周期 1 轨道的控制为例, 分别取(26)式的反饋系数为  $k_1 = 0.5, k_2 = 0.3$ , 图 9、10 模拟出了控制的结果, 图中, 实线代表控制后的混沌轨道, 而点线代表目标周期 1 轨道. 从图 9、10 可以发现: 此时混沌轨道并没有收敛于目标周期 1 轨道, 而是随着时间的增长发散于无穷远.

注 4 通过数值模拟可以发现: 在反饋增益较大(本文指绝对值意义下)的情况下, 线性误差

状态反饋控制器

$$u(t) = k(y(t) - x(t)) \quad (27)$$

就可实现混沌轨道至周期轨道的控制. 例如, 取(27)式的反饋系数为  $k = -20.0$ , 以混沌轨道至周期 1 轨道的控制为例, 图 11 给出了线性误差状态反饋控制器作用下的数值模拟结果. 图中, 实线代表控制后的混沌轨道, 点线代表目标周期 1 轨道. Chen 等<sup>[17]</sup>在 Duffing 振子中也数值地发现了这个结论, 但没有给出理论上的证明. 对于本文考虑的 Mathieu-Duffing 振子, 同样难以理论上证明这个事实.

注 5 虽然本文以经典的 Mathieu-Duffing 振子为例, 理论上研究其混沌控制夹带盆的估计问题, 但我们相信, 本文的思想可推广应用于其它的非线性系统夹带盆的理论估计.

### [参 考 文 献]

- [1] Ott E, Grebogi C, Yorke J. Controlling chaos[J]. Physical Review Letters, 1990, **64**(11): 1196-1199.
- [2] Andrievskii B R, Fradkov A L. Control of chaos: methods and applications I: method[J]. Automation and Remote Control, 2003, **64**(5): 673-713.
- [3] Fradkov A L, Evans R J. Control of chaos: methods and applications in engineering[J]. Annual Reviews in Control, 2005, **29**(1): 33-56.
- [4] Boccaletti S, Grebogi C, Lai Y C, et al. The control of chaos: theory and applications[J]. Physics Reports, 2000, **329**(3): 103-197.
- [5] Chen G R, Dong X N. From Chaos to Order: Perspectives, Methodologies and Applications [M]. Singapore: World Scientific, 1998.
- [6] Jackson E A, Grosu I. An open-plus-closed-loop control of complex dynamics systems[J]. Physica D, 1995, **85**(1): 1-9.
- [7] Jackson E A. The OPCL control for entrainment, mode-resonance and migration actions on multi-attractor systems[J]. Chaos, 1997, **7**(4): 550-559.
- [8] Wheeler D W, Schieve W C. Entrainment control in a noisy neural system[J]. Physical Review E, 2003, **67**(4): 046219-1-046219-6.
- [9] Chen L Q. An open-plus-closed-loop control for discrete chaos and hyperchaos[J]. Physics Letters A, 2001, **281**(5/6): 327-333.
- [10] Chen L Q, Liu Y Z. An open-plus-closed-loop approach to synchronization of chaotic and hyperchaotic maps[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2002, **12**(5): 1219-1225.

- [11] Chen L Q, Liu Y Z. A modified open-plus-closed-loop approach to control chaos in nonlinear oscillations[J]. *Physics Letters A*, 1998, **245**(1/2): 87-90.
- [12] Chen L Q, Liu Y Z. The parametric open-plus-closed-loop control of chaotic maps and its robustness [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2004, **21**(1): 113-118.
- [13] Tian Y C, Tad M O, Tang J Y. Nonlinear open-plus-closed-loop (NOPCL) control of dynamic systems[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2000, **11**(7): 1029-1035.
- [14] Slotine J J E, Li W P. *Applied Nonlinear Control* [M]. Beijing: China Machine Press, 2004.
- [15] Ravindra B, Zhu W D. Low-dimensional chaotic response of axially accelerating continuum in the supercritical regime[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 1998, **68**(3/4): 195-205.
- [16] Shen J H, Lin C K, Chen S H, et al. Bifurcations and route-to-chaos of Mathieu-Duffing oscillator by the incremental harmonic balance method[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2008, **52**(4): 404-413.
- [17] Chen G R, Dong X N. On feedback control of chaotic continuous-time systems[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems — I: Fundamental Theory and Applications*, 1993, **40**(9): 591-601.
- [18] Li R H, Xu W, Li S. Chaos control and synchronization of the  $\Phi_6$ -Van der Pol system driven by external and parametric excitations[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2008, **53**(3): 261-271.

## Open-Plus-Closed-Loop Control for Chaotic Mathieu-Duffing Oscillator

SHEN Jian-he<sup>1,2</sup>, CHEN Shu-hui<sup>1</sup>

(1. Department of Applied Mechanics and Engineering, Sun Yat-sen University,  
Guangzhou 510275, P. R. China;

2. School of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University,  
Fuzhou 350007, P. R. China)

**Abstract:** Utilizing the idea of the open-plus-closed-loop (OPCL) control, a controller which is composed of an external excitation and linear feedback was designed to entrain the chaotic trajectories of Mathieu-Duffing oscillator to its periodic and higher periodic orbits. The global basin of entrainment of the open-plus-closed-loop control was proved by combining Liapunov stability theory with a comparative theorem of initial value problems for second-order ordinary differential equations. Numerical simulations were performed to demonstrate the theoretical results.

**Key words:** Mathieu-Duffing oscillator; chaos control; OPCL control; global entrainment