文章编号:10000887(2009)01-0051-13

© 应用数学和力学编委会, ISSN 1000-0887

柱塞泵油膜压力分析的高效有限单元法

T•日诺托, A•纳哥卡

(机械工程和计算机科学学院,斯琴托霍瓦 42-200,波兰)

(郭兴明推荐)

摘要: 利用有限单元法,数值分析轴向柱塞泵缝隙高度可变时阀门板上油膜的压力分布.缝隙 中油压变化的确定,通常是应用 Pasynkow 润滑理论中的 Reynolds 方程. 使用基于有限单元法的自 编程序,数值地求解该方程.为了提高结果的精度,基于解的残差估计,应用了加密的自适应网 格. 给出了依赖于泵的几何条件和工作参数的计算结果.

关 键 词: 泵; 缝隙高度可变; 压力分布模拟; 自适应有限单元法 中图分类号: TB115; TH322 文献标识码: A

引 言

在液压马达和泵中,有许多共同运转的或邻接的板部件,出现油膜缝隙.这是该系统中可 以观察到的并被认为最重要的现象.其重要性不仅体现在这些现象对液压系统动力平衡的实 际影响,而且体现在种种因素的共同作用上^[1].

运动副影响之一是, 工作流体的阀门系统很大程度上影响着轴向柱塞泵的效率. 泵在工 作时, 带有柱塞的旋转缸体和阀门板之间较低高度的缝隙充满着油^[23].

已有的文献认为,在缸体和阀门板间产生平行的缝隙是最理想的情况^[3],并且缝隙高度不 变^[4],原因在于作用在缸体上的流体静压力和斥力的矩的不完全平衡.本文涉及到缝隙高度 是可变的,最小的缝隙高度附近阀门板油膜压力分布的确定,以及和缸体的偏斜和泵的工作参 数间的依赖关系.

1 问题的提出

运动副的工作原理:轴向柱塞泵中的缸体-阀门板类似于流体静力学止推轴承的工作原理. 流体静力学轴承表面缝隙中流体压力的改变,按照流体动力学润滑理论,可以用 Reynolds 方程 给出为^[56]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^{3} \rho}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^{3} \rho}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 6 \frac{\partial}{\partial x} (\theta_{x} h) + 6 \frac{\partial}{\partial y} (\theta_{y} h) + 12 \theta_{z}, \quad \not{E} \ \Omega \not{P}, \tag{1}$$

* 收稿日期: 2007-1+13; 修订日期: 2008-10-02
 作者简介: T.Zloto, 博士(联系人.Tel/Fax:+ 48-34-3250-509; E-mail:zlotot@o2.pl).
 本文原文为英文, 吴承平 译, 张禄坤 校.

其中, p为缝隙压力, h为缝隙高度, ρ 为工作流体密度, μ 为动粘度, v_x , v_y , v_z 分别对应于缸体 指定的角速度为 ω 和矢径为r时的圆周速度在x, y, z方向上的分量.

Reynolds 方程(1)的解,在如下假设下成立:

•缝隙面中的流动是层流;

·共同运转平面之间的摩擦力是流动摩擦力;

·润滑的流体是不可压缩的 Newton 流体;

•垂直于平面方向的压力不变化;

•共同运转平面是刚性的.

若平面形状比较复杂,方程(1)的解析解将极其复杂,因此采用有限单元法数值求解(见图 1).将有限单元法指定的区域 Ω分成有限个单元,单元形状取为简单的几何图形,如四边形 或三角形.

在边界 Γ 上,强 Dirichlet 边界条件为

$$p = p \mathsf{D}, \qquad \overleftarrow{\mathsf{E}} \Gamma \mathrel{\bot}, \tag{2}$$

其中, p_D为预设压力. Reynolds 方程是更一般的 Piosson 方程

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[a(x, y) \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[a(x, y) \frac{\partial p}{\partial y} \right] - f(x, y) = 0, \quad \text{ ac } \Omega \neq$$
(3)
$$\therefore \cdot (a(x, y) \therefore p) - f(x, y) = 0, \quad \text{ ac } \Omega \neq$$
(4)

$$a = \frac{h^{3} \rho}{\mu}, \tag{5}$$

$$f = -6 \frac{\partial}{\partial x} (\Theta_x h) - 6 \frac{\partial}{\partial y} (\Theta_y h) - 12 \Theta_z.$$
(6)



(a) 计算域内的主要参数

(b) 有限元网格片段

图 1 计算域里含阀门板时的主要参数和有限元网格片段

Reynolds 方程是该问题的强形式.因此,作为渐近解法更为方便的出发点是所谓弱形式 或变分形式,正如有限单元法^[78]那样.弱形式的优势在于,对解导数的存在弱限制,尽管在方 程(1)中出现了二阶导数,在函数空间 *H*¹(Ω) 中寻求弱解,只需要一阶导数,即

$$L_2(\Omega) = \left\{ v \colon \int_{\Omega} |v(x, y)|^2 \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y < \infty \right\}.$$
(8)

式

广义导数等于

$$D^{\alpha}v = \frac{\partial^{|\alpha|}v}{\partial x_{2}^{\alpha} \partial x_{2}^{\alpha} \cdots \partial x_{n}^{\alpha}},\tag{9}$$

其中,指标集 $\alpha = \langle \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \rangle$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ...+ \alpha_n$. 问题(1)的弱形式为: 求 $p \in V = H^1(\Omega)$. 使

$$B(p, v) = L(v), \qquad \forall v \in V,$$
(10)

其中, v 为试函数, 且

$$B(u, v) = \int_{\Omega} a \cdot u \cdot v \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y, \tag{11}$$

$$L(v) = \int_{\Omega} y f \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \,. \tag{12}$$

2 有限元渐近解

在 $H^{1}(\Omega)$ 的有限维子空间中求解问题(10) 的渐近解 . 设 P_h 为域 Ω的一个分区, Ω 被分 隔为大小为 h_T 的不重叠的三角形域 Ω_T . 又设 $P_1(\Omega_T)$ 为单元 T 区域内的一阶多项式空间 . 则对应的有限元空间定义为

 $V_{h} = \left\{ v \in H^{1}(\Omega) : v \in C^{0}(\Omega), v \mid_{K} \in P_{1}(\Omega_{T}), \forall T \in P_{h} \right\}.$ (13) $\textbf{B} \mathring{\mathbf{D}} \textcircled{\mathbf{D}}(10) = \mathcal{R} \times p_{h} \in V_{h}, \quad \not e$

$$B(p_h, v) = L(v), \qquad \forall v \in V_h.$$
(14)

双线性式 $B(\bullet, \bullet)$ 和线性式 $L(\bullet)$ 由每个有限单元的贡献集合而成

$$B(p_h, v) = \sum_{T \in P_h} B^{(T)}(p_h, v),$$
(15)

$$L(v) = \sum_{T \in P_h} L^{(T)}(v),$$
(16)

其中, $B^{(T)}$, $L^{(T)}$ 与式(11)、(12)的区别仅在于, 前者的积分域是单元 T, 后者是整个域.因此, 对每一有限单元来说, 有一个类似于式(14)的方程成立.

将各个有限单元的贡献求和后,立即得到总刚度矩阵和等式右边的总矢量

$$\boldsymbol{K} = \sum_{T \in P_h} \boldsymbol{K}^{(T)}, \qquad (17)$$
$$\boldsymbol{b} = \sum_{T \in P_h} \boldsymbol{b}^{(T)} \qquad (18)$$

所组成的代数方程组

Kp = b

(19)

其中, **p**为未知节点压力矢量, 其大小等于网格的节点数 . 方程组(19)中的刚度矩阵 K 是基函数的一个稀疏矩阵 . 为了求解方程, 例如消去未知量, 必须考虑边界条件 . 一般来说, 问题(10)的渐近解 ph 是不准确的, 其离散误差为

$$e = p - p_h. \tag{20}$$

将 $p = p_h + e$ 代入问题(10), 经整理, 得到误差方程

$$B(e, v) = L(v) - B(p_h, v), \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$
(21)

方程(21) 是误差分析的基本方程, 目的是得到解的误差估计. 估计可在两类可区分的先 验估计中选择, 一种是根据方程求解特征以及解法的特征来推断误差的性态, 甚至在求解运算 之前就可得出; 另一种是在给定网格上给出解的具体的计算质量^[910]. 计算结果的精度, 取决于网格中单元的数以及它们的形状.先验误差分析导致结论: 对最 大单元尺度为 h 的网格上的一个解来说.误差模数随着网格密度的增大而减小.按照

$$\|p - p_h\|_{L_2(\Omega)} \leq C_1 h^2,$$

$$\|p - p_h\|_{E(\Omega)} \leq C_2 h,$$
(22)
(23)

其中, C_1 和 C_2 为与 h 无关的常数, L_2 和 E (能量)模数定义为

$$||e|||_{L_{2}(\Omega)}^{2} = \int_{\Omega} e^{2} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y, \qquad (24)$$

$$||e||_{E(\Omega)}^{2} = B(e, e) = \int_{\Omega} a \cdot e^{\bullet} \cdot e^{\bullet} dx dy.$$
⁽²⁵⁾

所以, 增加网格密度可以改进结果的精度. 由 Reynolds 方程描述的问题的解, 常常能显示出人 们关注的特征, 如压力的峰值. 因此, 获得这样的足够正确的特征, 对模拟结果来说是重要 的. 表示流体静力学轴承的计算区域相对较小, 其上填满了有限单元, 大部分计算区域是表示 入口、出口和其它特征的, 没有被离散化, 这些区域本来也是需要用小的有限单元离散的.

3 基于误差估计的自适应网格

为改进结果的精度,在所有区域上均匀细分网格是不必要的.比较好的办法是,只在解的 变化快的地方细分网格,其余地方保持不变.这就是后面自适应方法的主要思想^[11].本文以 先验误差估计为基础使用自适应网格细分,假定在离散误差最大的地方有最好的细分网格. 3.1 误差估计的显式残余法

有限单元法离散后误差估计的方法有很多^[9],其中一类方法是基于解的残余分析的残余 法,解的残余量给出了未能满足微分方程和边界条件的渐近解的范围.残余分析法可分为显 式的和隐式的.由于显式残余法计算成本低,为本文所采用.

当 $e = p - p_h \in H^1(\Omega)$ 时,误差方程(21)也成立,即

$$B(e, e) = L(e) - B(ph, e).$$
(26)

因为按定义, $B(e, e) = ||e||_{E(\Omega)}^2$, 这对于估计方程(26)的右边足够了.

将目前双线性形式的积分,分割为各单元贡献之和的形式,应用 Green 定理,增加了微分 的阶数,出现于单元边界积分,且将在单元边界上的边界积分代入区域内部,还包含相邻单元 贡献之和,得

$$B(e, e) = ||e||_{E(\Omega)}^{2} = \sum_{r \in P_{h}} \int_{\Omega_{r}} re \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \sum_{r \in P_{h}} \int_{\partial \Omega_{r}} Re \, \mathrm{d}s, \qquad (27)$$

其中, r 为内部残差, 定义为

$$r = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{h^{3} \rho}{\mu} \frac{\partial p_{h}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{h^{3} \rho}{\mu} \frac{\partial p_{h}}{\partial y} \right] - 6 \frac{\partial}{\partial x} (\Theta_{x} h) - 6 \frac{\partial}{\partial y} (\Theta_{y} h) - 12 \Theta_{z}, \quad \overleftarrow{E} \ \Omega \ \overrightarrow{P};$$

$$(28)$$

R 为边界残差,定义为

$$R = \frac{1}{2} \left[a \cdot p_h \cdot n \right], \qquad \text{ fr } \partial \Omega r \setminus \Gamma \perp, \tag{29}$$

其中, [•,•] 表示解梯度分量在单元边界法线方向的间断跳跃. 根据 Galerkin 正交性, 可以在式(27) 中引入插值 $\pi e \in V_h$, 得

$$||e|||_{E(\Omega)}^{2} = \sum_{r \in P_{h}} \int_{\Omega_{r}} r(e - \pi e) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \sum_{r \in P_{h}} \int_{\partial} \Omega_{r}^{R} (e - \pi e) \, \mathrm{d}s \,.$$
(30)

由 e 的插值误差的标准估计, 多项式 Te 的引入, 最终得到如下能量范数中的误差估计:

$$\|e\|_{E(\Omega)} \leq \left[\sum_{T \in P_{h}} C_{i,1,T}^{2} h_{T} \|r\|_{L_{2}(\Omega_{T})}^{2}\right]^{1/2} + \left[\sum_{T \in P_{h}} C_{i,2,T}^{2} h_{T} \|R\|_{L_{2}(\partial\Omega_{T})}^{2}\right]^{1/2}, \quad (31)$$

其中, $C_{i,1T}$ 和 $C_{i,2T}$ 为插值常数,可由标准^[11]确定.对某些问题,包含本文研究的 Reynolds 方程,可以跳过包含内部残差 r 的估计式(31)的第 1 项,并不会引起估计质量的实际下降^[12]. 椭圆问题用奇次的有限单元求解时,误差主要出现于单元边界附近,然而,偶次逼近误差的主源在单元内部^[13].

因此,简单的误差估计 E_R 仅包含边界单元:

$$E_{R}^{2} = \sum_{T \in P_{h}} C_{i,2,T}^{2} h_{T} || R || L_{2}(\partial \Omega_{T}) = \sum_{T \in P_{h}} E_{R,T}^{2}.$$
(32)

量 E²_{R,T} 表示有限单元T 对总误差的贡献,称为误差指标

$$E_{R,T} = C_{i,2,T} h_T^{1/2} \| R \|_{L_{c}(\partial \Omega_{c})}.$$
(33)

当指标值 *E_{R,T}* 大时, 应在该区域细化网格, 而指标值 *E_{R,T}* 小时, 可以保持网格不变, 甚至可以 粗化 · 为了选定需要细化的单元, 仅要了解显示单元误差的误差指标相对于其它单元的空间 分布 · 因为绝对值项与插值常数无关, 插值常数 *C_{i,2T}* 无须检验而简单地假设为 1.







(a) 图 2(a)的放大图
 (b) 图 2(b)的放大图
 图 3 压力值实际变化区域和网格密度的局部放大







(b) 图 3(b)的放大图

图 4 指定区域压力变化和网格密度的局部放大

3.2 自适应解的组成步骤

在现有网格上求该问题的解,估计误差,并进行检验,如果求得的解足够正确的话. 在误差估计的基础上修正网格,并在新的自适应网格上重新进行解的计算. 通过单元的细分使该工作网格精细化,即在三角形单元边界上引入3个中点并相互连接,原来一个三角形单元就被细分为4个更小的三角形单元.

图 2~4 是覆盖轴承域的自适应网格的一个实例.图中网格是自适应细分的结果,显示 \$ = 135°时压力峰值情况的解.并列右侧的(b)图表示峰值附近网格区域的逐级放大.密度梯 度朝向轴承区域的外边界,经过 6 次重复细分后,自动形成图示情况.在每次重复中,按式 (33)给出的最大误差指标,挑选 10%的单元重新细分.

4 模拟研究的结果

利用有限单元法、自编的计算机程序,以及运动副的几何和工作参数——轴向多柱塞泵中 的缸体-阀门板,分析了阀门板上缝隙高度可变时油膜压力的分布.在所建立的模型中设定了 如下参数值(见图 1):

- •压力区的压力 *p*_t = 32 MPa;
- •抽气区的压力 *p* s = 0 MPa;
- •阀门板内外侧的压力 $p_0 = 0$ MPa;
- •缸体的角速度 ω = 157 rad/s;
- ・油的动力粘度 μ = 0.025 2 Pa.s;



(a) $\omega_1 = 0$ rad/s



•最小的可变高度缝隙与 x 轴的夹角 $\delta = 0.785$ rad;

•缸体偏斜角 ε= 0.000 523 rad;

•最小的缝隙高度 $h = 3 \times 10^{-7}$ m;

•阀门板的特征半径: r1= 0.0284m, r2= 0.0304m, r3 = 0.0356m, r4 = 0.0376m. 依赖泵的几何和工作参数,图 5~8显示了阀门板和缸体间缝隙高度可变时油膜的压力分布. 在最小高度的缝隙附近,示出的压力分布值得关注. 在收缩段缝隙中存在超压"峰值";而在扩散段缝隙中存在负压"峰值". 上述图形中显示了阀门板中油膜压力的分布,显示了最大超压半径与最小负压半径平均值处,缝隙横截面周界的压力变化. 图9给出半径 r = 0.0366m时,平行缝隙横截面周界处的压力变化;图9(a)为缸体不转动,图9(b)为缸体以基本角速度转动. 图9表明,缸体角速度对平行缝隙中的压力分布没有影响.





3.929384E+07 2.996523E+07 2.063663E+07 1.130802E+07 1.979409E+06 -7.349199E+06 -1.667781E+07 -2.600642E+07





(c) $\mu_3 = 0.025$ 3 Pa• s

1.114245E+08

9.340930E+07 7.539409E+07

5.737888E+07

3.936367E+07

2.134846E+07

3.333255E+06





6 对不同动力粘度^µ,最小的缝隙高度邻近横截面周界处和缝隙高度可变处的油膜压力分布



图 7 对不同缸体偏转角 E,最小的缝隙高度邻近横截面周界处和缝隙高度可变处的油膜压力分布



(d) $h_4 = 8 \times 10^{-7} \,\mathrm{m}$

图 8 对不同的最小缝隙高度 h, 最小的缝隙高度邻近横截面周界处和缝隙高度可变处的油膜压力分布



(b) $\omega_2 = 157.08 \text{ rad/s}$

图 9 对不同角速度 ω, 横截面周界半径 r = 0.036 6 m 时, 平行缝隙中油膜的压力分布

负压"峰值"的出现,导致空泡现象的发生,又 导致金属颗粒的沉积.这些现象的详细描述请参 见文献[14].

作为评估结果的可信度,图 10 表明了不同角 速度下,误差指标随着计算网格节点数的增加而 减小,误差指标按式(33)计算.

图 11 和 12 证明了本文方法得到的解的收敛 性. 分别示出 $\omega = 157 \text{ rad/s}$ 时,随着计算网格节 点数的增大,超压峰值 $p \max$ 和负压峰值 $p \min$ 的渐 近收敛性.

5 结论和讨论

本文给出了轴向柱塞泵阀门板上缝隙高度可 变时油膜压力分布的数值计算结果.运动副的几何和工作参数为:缸体-阀门板间的缝隙高度 变化对缝隙中的压力分布有实质的影响.角速度增大,油膜的超压和负压"峰值"线性地增大 (见图 5).油膜的超压和负压"峰值"也随着油粘度的增大而线性地增大(见图 6).缸体相对 于阀门板的偏转角 c对于油膜超压和负压"峰值"有着实质的影响.偏转角最小时,产生超压 和负压最大"峰值".超压和负压"峰值"随着偏转角增大而减小(见图 7).缝隙高度可变时, 影响油膜超压和负压"峰值"主要来自缸体和阀门板之间缝隙的高度.缝隙高度 h 最小时,出



到 10 对小问用途度 ^w,侯差指称随行 计算网格节点数的变化





图 12 角速度 ω = 157 rad/s 时, 负压峰值 p_{min} 作为计算网格节点数函数的收敛性

本文还指出了运动副的规律: 对于平行缝隙, 缸体-阀门板不出现超压和负压"峰值"(见图 9).由于超压"峰值"的出现, 引起了中心弹簧的弓弯、缸体的移位以及缝隙高度的增大.因此, 在现实条件中, 大的超压和负压"峰值"不会出现.况且缝隙高度的增大, 超压和负压"峰 值"会减少.轴向柱塞泵缸体和阀门板之间的缝隙中出现超压和负压"峰值", 已由商用软件 FLUENT 的计算得到证实.本文得到的结果也可以用在别的场合.

[参考文献]

- Osiecki A. Hydrostatic Machine Drive [M]. Warsaw: Scientifie Technical Publishing House, 1998. (in Polish)
- [2] Rakowski J, Stryczek S. Dynamic measurement of gap width in valve of a multi-piston axial pump
 [J]. Control and Hydraulic Drive, 1981, 3: 7-9. (in Polish)
- [3] Stryczek S. Hydrostatic Drive [M]. Vol 1. Warsaw: Scientifie Technical Publishing House, 1995. (in Polish)
- [4] Jang D S. Loss analysis in axial piston units[D]. PhD Disstertation. RWTH Aachen, 1997. (in German)
- [5] Pasynkow R M, Poswianski W S. Numerical calculation of Reynolds equation taking into account variable fluid viscosity (in reference to valve plate) [J]. Machine Construction Review, 1993, 9: 26-29. (in Russian)
- [6] Ivantysyn J, Ivantysynova M. Hydrostatic Pumps and Motors [M]. New Delhi: Akademia Books International, 2001.
- [7] Zienkiewicz O C, Morgan K. Finite Elements and Approximation [M]. New York: John Wiley & Sons, 1983.
- [8] Zienkiewicz O C, Taylor R L. The Finite Element Method [M]. Oxford: Butterworth Heinemann, 2000.
- [9] Ainsworth M, Oden J. A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis [M]. New York: John Wiley & Sons, 2000.
- [10] Stewart J R, Hughes T J R. A tutorial in elementary finite element error analysis: a systematic presentation of a priori and a posteriori error estimates[J]. Computational Methods in Applied Mechanical Engineering, 1998, 158(1/2): 1-22.

[11] Johnson C, Hansbo P. Adaptive finite element methods in computational mechanics[J]. Computation al Methods in Applied Mechanical Engineering, 1992, 82: 143-181.

- [12] Nagorka A, Sczygiol N. Applicability of incomplete explicit residual error estimates [A]. In: Wiberg N E, Diez P, Eds. Proc ADMOS 2003 International Conference on Adaptive Modelling and Simulation [C]. G-teborg, Sweden. Barcelona: CIMNE, 2003, 22.
- [13] Adjerid S, Flaherty J E, Babuska I. A posteriori error estimation for the finite element method of lines solution of parabolic problems [J]. Mathematical Models and Methods in Applied Science, 1999, 9(2): 261-286.
- [14] Kunze T, Brunner H. Vibroacoustic and optical examination of cavitation in axial-piston machines
 [J]. Olhydraulik und Pneumatik, 1996, 40(8): 542-546. (in German)

Efficient FEM Approach for Pressure Analysis of Oil Film in a Piston Pump

Tadeusz Zloto, Arkadiusz Nagorka

(Faculty of Mechanical Engineering and Computer Science, Al. Armii Krajowej 21, 42–200 CzKMstochowa, Poland)

Abstract: Numerical analysis of pressure distribution of oil film on the valve plate in variable height gap of an axial piston pump is concerned. The analysis employs the finite element method. For determination of oil pressure variations in the gap the Reynolds equation, commonly applied in the theory of lubrication by Pasynkov, was applied. The equation was solved numerically with the use of self-developed program based on finite element method. In order to obtain high accuracy of the results an adaptive mesh refinement based on residual estimations of solution errors was applied. The calculation results were represented as dependent on the geometric and working parameters of the pump.

Key words: pump; variable height gap; pressure distribution modeling; adaptive finite element method