应用数学和力学, 第 30 卷 第 3 期
2009 年 3 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 30, No. 3, Mar. 15, 2009

文章编号: 1000-0887(2009) 03-0265-17

应用数学和力学编委会, ISSN 1000-0887

拟线性三阶演化方程的初步群分类

黄定江[1,2], 张鸿庆[2]

(1. 华东理工大学 数学系, 上海 200237;
2. 大连理工大学 应用数学系, 辽宁 大连 116024)

(我刊编委张鸿庆来稿)

摘要: 利用古典无穷小算法、等价性变换技巧和有限维抽象李代数的分类理论, 给出了一般拟线性三阶演化方程在半单和一维至四维可解李代数下不变的群分类 证明了只存在 3 个不等价的方程在三维单李代数下不变, 而且进一步证明在所有半单李代数下不变的不等价方程只有这 3 个 另外, 还证明了存在 2 个、5 个、29 个和 26 个不等价的方程, 分别在一维至四维可解李代数下不变

关 键 词: 拟线性三阶演化方程; 群分类; 古典无穷小算法; 等价群; 抽象李代数

中图分类号: O175.24; O175.29; O152.5 文献标识码: A

引 言

数学物理中偏微分方程的群分类是微分方程现代群分析的核心基石之一[1-10] 群分类的特殊意义在于具体化了李群和李代数这一强有力方法的可能应用: 分析和构造模拟物理过程并拥有非平凡对称性质的方程的解 并且对于从模拟了自然过程的一类微分方程中挑选出具有非平凡对称性质的微分方程具有重要的意义

在微分方程群分类的历史中, 其中最深刻的结果之一是由 Lie 自己给出的, 他给出了二阶常微分方程的完全群分类[11] 李同时也是第一个提出了偏微分方程的群分类, 即分类了具有两个自变量的二阶线性偏微分方程[12] 群分类问题的现代叙述是由 Ovsiannikov 于 1959 年在文献[9] 中引进的, 并提出了一个系统的方法(称之为 Lie-Ovsiannikov 方法) 获得非线性热传导方程的完全群分类 此后, 微分方程的群分类成为群分析的一个活跃研究领域 直到上世纪 90 年代初的有关这一领域详细研究的综述可参考文献[6]

本文我们考虑如下形式的一般拟线性三阶演化方程:

$$u_t = F(t, x, u, u_x, u_{xx}) u_{xxx} + G(t, x, u, u_x, u_{xx}) \tag{1}$$

的群分类, 其中, $F(t, x, u, u_x, u_{xx})$ 和 $G(t, x, u, u_x, u_{xx})$ 是其相应变量的充分光滑的任意实值函数, 并且 $F \neq 0$(以排除上述方程退化为二阶的情形) 当 $F_u = F_{u_x} = F_{u_{xx}} = 0$ 和 $G_u = G_{u_x} = G_{u_{xx}} = 0$ 时, 方程(1) 的完全群分类已经由 Winternitz 等给出[13] 最近 G ng r, Lahno 和 Zhdanov 给出了如下最一般的三阶线性演化方程[14]:

收稿日期: 2008-06-24; 修订日期: 2008-12-17
基金项目: 国家重点基础发展规划(973) 资助项目(2004CB318000)
作者简介: 黄定江(1981) , 男, 江西上饶人, 博士(Tel: + 86-21-64253147; E-mail: hdj8116@163.com) ;
张鸿庆, 教授(联系人.Tel: + 86-411-84709062; E-mail: zhanghq@dlut.edu.cn) .

$$u_t = f_1(t,x)u_{xxx} + f_2(t,x)u_{xx} + f_3(t,x)u_x + f_4(t,x)u + f_5(t,x)$$

的完全群分类; 他们同时利用代数化方法给出了当 $F =\ 1$ 时方程(1) 在低维对称群下不变的群分类 注意方程(1) 在某些意义下是非常一般的(1+ 1)- 维三阶演化方程 事实上, 任何容许至少一个不改变空间变量的单参数对称群的具有最一般形式的三阶偏微分方程[15]

$$u_t = H(t, x, u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}), \tag{2}$$

可通过一个非点变换约化为方程(1) 因此, 除了一小子类方程它的对称代数是由具有非零系数的算子 / $_t$ 张成的之外, 方程(1) 的群分类也提供了方程(2) 的大部分的分类情形 故分类演化方程(1) 对了解三阶非线性偏微分方程的对称群性质是非常重要的

微分方程的群分类问题, 特别是完全群分类, 除了实际平凡的情形, 是非常困难的 事实上, 大量研究一般群分类的文章要么是不正确的, 要么是不完全的 此外, 还存在许多文献只给出方程的初步群分类, 其中作者只列出一些具有新对称的情形, 但没有声称完全解决一般的分类问题[6, 16-17] 因此, 寻找简化分类的有效方法本质上等价于给彻底解决微分方程的完全群分类提供了一种可能性[18]

最近, 乌克兰数学家 Zhdanov 和 Lahno 等通过恰当的组合古典无穷小算法, 等价性变换技巧和低维抽象李代数的分类理论, 提出了求解容许有无穷参数等价群的偏微分方程群分类的一个有效的代数化方法[15, 19] 他们已经利用此方法获得了具有两个自变量一般二阶拟线性热传导方程和非线性波动方程的完全群分类[15, 20-21] 文献[22] 对该方法给出了一个综述并研究了一般二阶非线性演化方程的群分类 然而, 据我们所知, 目前该代数化方法还没有被应用于方程(1) 的群分类研究 因此, 本文是上述代数化方法的一个新的应用 虽然本文的工作严重的依赖于Zhdanov, Lahno 和 Basarab[15, 19]的结果, 但是本文给出的关于方程(1) 的群分类结果是全新的 因此, 这将对物理和工程产生明显的应用

文中的主要结果源于作者博士学位论文的第 6 章, 因此本文涉及的有关详细的计算和证明可参考文献[23] 在本文发表期间, 作者注意到 Basarab 等的一个相似的工作[24]

1 群分类方法

本文所涉及的偏微分方程的群分类方法是李的古典无穷小算法, 等价性变换和有限维抽象李代数的分类理论的一个组合[15] 对于含有大量任意元且容许有非平凡有限维不变性代数的偏微分方程的群分类问题能给出一个构造性的解

实施该算法的一个起点是基于方程(1) 所容许的无穷小生成子

$$Q = \ (t, x, u)\ _t + \ (t, x, u)\ _x + \ (t, x, u)\ _u$$

的系数所满足的确定方程组(简记为DE) 的解 $v_a = (\ _a,\ _a,\ _a)$, $a =\ 1, \ , n$ 张成一个李代数 L 因此, 不失一般性我们可用如下(可能是无穷多的) 偏微分方程组:

$$\begin{cases} \text{DE}, \\ [Q_i, Q_j] = \ C_{ij}^k Q_k \end{cases}$$

或等价的

$$\begin{cases} \text{DE}, \\ Q_i\ _j - Q_j\ _i = \ C_{ij}^k\ _k, \\ Q_i\ _j - Q_j\ _i = \ C_{ij}^k\ _k, \\ Q_i\ _j - Q_j\ _i = \ C_{ij}^k\ _k, \end{cases}$$

来取代原确定方程组DE; 其中, i, j, k 取值为1, , n(n 1 是相应李代数的维数), C_{ij}^k 是李代

数 L 的结构常数并且 $Q_a = \ _a(t, x, u)\ _t + \ _a(t, x, u)\ _x + \ _a(t, x, u)\ _u$

如果我们能够对方程(1)所容许的所有可能维数 $(n \quad 1)$ 的李代数 L 求解上述超定确定方程组,则方程(1)的群分类问题可被完全解决 换句话说,一般拟线性三阶演化方程(1)的群分类问题被约化为关于在所有 $n = 1, 2, \quad , n_0$ 下积分超定方程组问题,其中,n_0 是所研究方程(1)所容许的李代数的最大维数 因此,解决(1)的群分类问题的方法实际上由如下 3 个步骤构成(详细的可参考文献[15]):

1) 利用无穷小李方法获得生成方程(1)的对称群的一阶算子的系数所满足的确定方程组(注意对于含有任意函数 F, G 及其导数的那部分确定方程组称为分类方程组) 积分确定方程组中不依赖函数 F, G 的那部分方程可得方程(1) 在任意函数 F, G 下所容许的最一般形式的无穷小生成子 本步骤的另一任务是利用无穷小方法或直接法计算方程(1) 的等价群

2) 构造在第一步所获等价群 中的变换确定的等价关系下无穷小算子所张成的维数 n 3 的李代数的所有实现 然后把所获实现中的算子代入分类方程组,挑选出那些是方程(1)的对称代数的实现

3) 计算上一步所获实现的扩张以获得高维 $(n > 3)$ 李代数的实现 因为扩张后的对称代数导致函数 F, G 的任意性降低,也即此时任意函数将只含有一个变量或变成任意常数 因此,可进一步利用 Lie-Ovsyannikov 分类方法获得所考虑方程的最大对称群,从而使得群分类是完全的

执行上述步骤所获的结果是一个含有各种不同的形如式(1)的方程及其相应的最大李不变性代数(对称代数)的列表 当满足如下条件时,分类问题被称为是完全的:

1) 所获得的李代数是其相应方程的最大不变性代数;

2) 列表中所有方程关于等价关系 是互相不等价的,也即列表中任一方程不能通过等价群 的变换转换为列表中的另一方程

注意,Winternitz 及其合作者曾利用与上述相似的分类思想,研究了若干非线性偏微分方程和离散动力系统[13,25-29]的对称群分类 而文献[30-31]则利用同样的思想给出非线性波动和Schr dinger 方程的群分类

2 确定方程组和等价性变换

算法的第一步是确定方程(1)所容许的最一般形式的无穷小生成子及保持其形式不变的等价群(其定义下文给出) 因此,利用古典无穷小算法[8-9,32-33],寻找如下形式的无穷小生成子:

$$Q = \ (t, x, u)\ _t + \ (t, x, u)\ _x + \ (t, x, u)\ _u, \tag{3}$$

其中, (t, x, u), (t, x, u), (t, x, u) 是定义在空间 $V = R^2 \quad \mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 上的任意光滑实值函数, $(t, x) \quad R^2$ 为自变量, $u = u(t, x) \quad \mathbf{R}$ 为因变量

为了利用古典无穷小算法,我们需要计算无穷小生成子(3)的三阶延拓:

$$pr^{(3)}Q = Q + \ ^t\ _{u_t} + \ ^x\ _{u_x} + \ ^{xx}\ _{u_{xx}} + \ ^{xxx}\ _{u_{xxx}}, \tag{4}$$

这里

$$\begin{cases} ^t = D_t(\ - \ u_x - \ u_t) + \ u_{xt} + \ u_{tt}, \\ ^x = D_x(\ - \ u_x - \ u_t) + \ u_{xx} + \ u_{xt}, \\ ^{xx} = D_x^2(\ - \ u_x - \ u_t) + \ u_{xxx} + \ u_{xxt}, \\ ^{xxx} = D_x^3(\ - \ u_x - \ u_t) + \ u_{xxxx} + \ u_{xxxt} \end{cases} \tag{5}$$

算子 D_t 和 D_x 是关于 t 和 x 的全导数

$$\begin{cases} D_t = \frac{}{t} + u_t \frac{}{u} + u_{tt} \frac{}{u_t} + u_{tx} \frac{}{u_x} + \quad , \\ D_x = \frac{}{x} + u_x \frac{}{u} + u_{tx} \frac{}{u_t} + u_{xx} \frac{}{u_x} + \end{cases} \tag{6}$$

为了求解对称算子的系数,则需要把延拓对称算子(4)作用在方程(1)的解流形上,即

$$pr^{(3)}Q(\ )|_{=0} = 0, \quad = u_t - F(t, x, u, u_x, u_{xx})u_{xxx} - G(t, x, u, u_x, u_{xx}) \tag{7}$$

令不变性条件(7)的线性独立项的系数为0,得一超定线性偏微分方程组,即确定方程组 求解此方程组有如下断言:

命题1 带两个任意(给定)函数 F 和 G 的一般拟线性三阶演化方程(1)的对称群由如下形式的无穷小生成子生成:

$$Q = (t)_{\ t} + (t, x, u)_{\ x} + (t, x, u)_{\ u}, \tag{8}$$

其中,实值函数 (t), (t, x, u) 和 (x, t, u) 满足分类方程组

$$\begin{cases} (3_{\ x} + 3_{\ u}u_x - _{\ t})F = F_t + F_x + F_u + (_{\ x} + _{\ u}u_x - _{\ x}u_x + 2_{\ xu}u_x - \\ \quad _{\ u}u_x^2)F_{u_x} + (_{\ xx} - _{\ xx}u_x - 2_{\ xu}u_x^2 + _{\ uu}u_x^2 - _{\ uu}u_x^3 - \\ \quad 2_{\ x}u_{xx} + _{\ u}u_{xx} - 3_{\ u}u_xu_{xx})F_{u_{xx}}, \\ _{\ t} - _{\ t}u_x + (_{\ u} - _{\ t} - _{\ u}u_x)G + (- _{\ xxx} + _{\ xxx}u_x - 3_{\ xxu}u_x + \\ \quad 3_{\ xxu}u_x^2 - 3_{\ xuu}u_x^2 + 3_{\ xuu}u_x^3 - _{\ uuu}u_x^3 + _{\ uuu}u_x^4 - 3_{\ xu}u_{xx} + 3_{\ xx}u_{xx} + \\ \quad 3_{\ u}u_{xx}^2 - 3_{\ uu}u_xu_{xx} + 9_{\ xu}u_xu_{xx} + 6_{\ uu}u_x^2u_{xx})F = \\ \quad G_t + G_x + G_u + (_{\ x} + _{\ u}u_x - _{\ x}u_x - _{\ u}u_x^2)G_{u_x} + (_{\ xx} + 2_{\ xu}u_x - \\ \quad _{\ xx}u_x - 2_{\ xu}u_x^2 + _{\ uu}u_x^2 - _{\ uu}u_x^3 - 2_{\ x}u_{xx} + _{\ u}u_{xx} - 3_{\ u}u_xu_{xx})G_{u_{xx}} \end{cases} \tag{9}$$

下面我们将在所考虑方程的等价群(简记为)确定的等价关系下进行群分类 一个给定方程的等价群 是由(空间 $V = R^2$ **R** 中的)变换

$$t = T(t, x, u),\ x = X(t, x, u),\ u = U(t, x, u),\ \frac{D(T, X, U)}{D(t, x, u)} \quad 0 \tag{10}$$

构成的,它们保持方程(1)的形式不变 也即上述类型的变换把方程(1)转化为如下具有相同形式的另一方程:

$$u_t = F(t, x, u, u_x, u_{xx})u_{xxx} + G(t, x, u, u_x, u_{xx}) \tag{11}$$

为了确定 中的变换则需要用直接法

命题2 方程(1)的最大的等价群 具有形式

$$t = T(t),\ x = X(t, x, u),\ u = U(t, x, u), \tag{12}$$

其中, $T_t \quad 0, \frac{D(X, U)}{D(x, u)} \quad 0$

证明 设式(10)是一可逆的变量变换,它把方程(1)转换为具有相同形式的另一方程(11),由式(10)计算导数 u_x 可得

$$u_x = \frac{u_tT_x + u_xX_x - U_x}{U_u - u_tT_u - u_xX_u} \tag{13}$$

因为方程(1)中的函数 F, G 和方程(11)的函数 F, G 均为其相应变量的任意函数,所以 u_x 必为

$$u_x \quad g(t, x, u, u_x, u_{xx}),$$

其中, g 为其相应变量的某些函数 这意味着方程(13) 中 $T_x = T_u = 0$ 因此有

$$T = T(t), T_t \quad 0$$

继续利用变量变换(10), 因为此时 $T = T(t)$, 所以有如下关系:

$$\begin{cases} u_t \quad u_t T_t (U_u - u_x X_u)^{-1} + \quad {}_1(t, x, u, u_x), \\ u_{xx} \quad u_{xx} \; {}_2(t, x, u, u_x) + \quad {}_3(t, x, u, u_x), \\ u_{xxx} \quad u_{xxx} \; {}_4(t, x, u, u_x, u_{xx}) + \quad {}_5(t, x, u, u_x, u_{xx}), \end{cases} \tag{14}$$

其中, ${}_1$, ${}_2$, ${}_4$ X 0, H_3, H_5 为 T, X, U 及其相关导数的某些函数1 把式(14) 中的 u_t, u_{xx}, u_{xxx} 代入方程(1), 则得方程(11)1 命题证毕1

注意利用李的古典无穷小算法同样可获得等价群(12)1 这个事实只需通过直接的计算即可获得1 因为方程(1)所容许的最一般形式的无穷小生成子(8)和等价群(12)与文献[15]中的二阶拟线性热传导方程所容许的最一般形式的无穷小生成子和等价群具有相同的形式, 因此我们可利用等价性变换(12)把向量场 Q 转化为类似文献[15](参见文献[15]的(3.10)和(3111)式)中的典范形式1

命题3 无穷小生成子(8)在具有形式(12)的点变换下等价于如下算子之一:

$$Q = 5_t, \quad Q = 5_x 1 \tag{15}$$

注1 从命题2可以看出, 本文只考虑了在点变换下方程的群分类, 事实上我们还可以考虑在切触变换[1-2]下方程的群分类, 有关研究结果将在随后的工作中发表1

3 半单李代数下不变方程的群分类

为了研究一般拟线性三阶演化方程(1)的群分类, 由Levi-Mal. cev 定理[15], 我们需要考虑半单, 可解, 半单和可解的半直和对称代数的情形1 本小节分析半单对称代数的情形1 由嘉当定理知, 半单李代数总可分解成单李代数的直和, 因此我们从最低维的单李代数 sl(2, R) 和 so(3) 开始1

定理1 不存在方程(1)所容许的由无穷小生成子(8)张成的不变性代数 so(3) 的实现1

证明 首先研究代数 so(3) 在等价群(12)下由算子(8)张成的实现1 李代数 so(3) = 3Q_1, Q_2, $Q_3$4 的交换关系定义如下:

$$[Q_1, Q_2] = Q_3, \; [Q_1, Q_3] = - Q_2, \; [Q_2, Q_3] = Q_1 1 \tag{16}$$

利用命题3, 我们可取代数 so(3) 的一个基元(如 Q_1) 为典范形式 5_t 或 5_x1

设 $Q_1 = 5_t$, Q_2, Q_3 具有式(8)的形式1 由式(16)的前两个交换关系有

$$Q_2 = K\cos t 5_t + [b\cos t + B\sin t]5_x + [c\cos t + C\sin t]5_u,$$

$$Q_3 = - K\sin t 5_t + [- b\sin t + B\cos t]5_x + [- c\sin t + C\cos t]5_u,$$

其中, K I **R** 为常数, $b = b(x, u)$, $c = c(x, u)$, $B = B(x, u)$, $C = C(x, u)$ 是任意的光滑函数1 然后, 利用第3个交换关系, 可得 $K^2 = -1$, 因此 K 不存在1 故当算子 Q_1 等价于 5_t 时, 不存在代数 so(3) 的实现1

现在考虑 $Q_1 = 5_x$ 的情形1 类似上述相似的分析, 可得代数 so(3) 关于算子(8)的如下实现:

$$so(3) = 3 5_x, \tan u \sin x 5_x + \cos x 5_u, \tan u \cos x 5_x - \sin x 5_u 4,$$

然而, 把上述实现的算子的系数代入分类方程组(9)得 $F = 0$1 这和我们先前的假设 F X 0 矛

盾1 因此,不存在方程(1)所容许的代数 so(3) 的实现1 定理证毕1

定理 2　方程(1)所容许的由无穷小生成子(8)张成的不变性代数 sl(2, R) 的 3 个不等价实现为

$$\mathrm{sl}^1(2,R) = 32t5_t + x5_x,\ -t^25_t - tx5_x + x^25_u,\ 5_t4, \tag{17}$$

$$\mathrm{sl}^2(2,R) = 32t5_t + x5_x,\ -t^25_t + x(x^2 - t)5_x,\ 5_t4, \tag{18}$$

$$\mathrm{sl}^3(2,R) = 32x5_x - u5_u,\ -x^25_x + xu5_u,\ 5_x41 \tag{19}$$

相应不变量方程的函数 F, G 的形式由表 1 给出1

表 1　　不变量方程的函数 F, G

sl(2, R)	F	G
$\mathrm{sl}^1(2,R)$	$F(X, W)x$	$x^{-2}[G(X,W) + xuu_x - u^2]$, $X = xu_x - 2u$, $W = x^2u_{xx} - 2u$
$\mathrm{sl}^2(2,R)$	$x^{-3}u_x^{-4}F(u,W)$	$4x^{-5}u_x^{-4}[(36xu_{xx} + 60u_x)F(u,W) - x^4u_x^5 + 4x^2u_x^3G(u,W)]$ $W = x^{-1}u_x^{-2}(xu_{xx} + 3u_x)$
$\mathrm{sl}^3(2,R)$	$u^{-6}F(t)$	$u^{-8}[(-9uu_xu_{xx} + 12u_x^3)F(t) + u^9G(t,W)]$, $W = u^{-6}(uu_{xx} - 2u_x^2)$

如果 F, G 是任意的, 那么代数 sl(2, R) 的上述实现分别是相应方程(1)的最大不变性代数1

证明　李代数 sl(2, R) = $3Q_1, Q_2, Q_34$ 的交换关系定义为

$$[Q_1, Q_2] = 2Q_2,\ [Q_1, Q_3] = -2Q_3,\ [Q_2, Q_3] = Q_11 \tag{20}$$

由命题3, 可选择算子 Q_3 为 5_t 或 5_x1

令 $Q_3 = 5_t1$ 代入式(20)中第 2 个交换关系, 则可得算子 Q_1 在等价群 E 下为 $2t5_t$ 或 $2t5_t + x5_x1$

如果 $Q_1 = 2t5_t$, 那么由剩下的交换关系可得 $Q_2 = -t^25_t$, 因此有实现 $32t5_t, -t^25_t, 5_t41$ 然而容许有此实现的方程(1)要求 $F = 01$ 这和先前的假设 $F X 0$ 矛盾1 因此不存在上述实现的相应的不变量方程(1)1

若 $Q_1 = 2t5_t + x5_x$, 则在等价群 E 下可得代数 sl(2, R) 的实现 $32t5_t + x5_x, -t^25t - tx5_x, 5_t4$ 和实现(17)及(18)1 把这些实现中算子的系数代入分类方程组(9), 可知没有形如式(1)的方程容许第一个实现1 因此只剩实现(17)和(18)1 此时, 关于实现(17)和(18)不变的最一般形式的方程(1)由表 1 的前两个成员给出1

以下考虑 $Q_3 = 5_x$ 的情形1 利用交换关系(20)可得代数 sl(2, R) 关于算子(8)的所有不等价的实现为 $32x5_x, -x^25_x, 5_x4$, $32x5_x - u5_u, (u^{-4} - x^2)5_x + xu5_u, 5_x4$, $32x5_x - u5_u, -(u^{-4} + x^2)5_x + xu5_u, 5_x4$ 和式(19)1 把这些实现中算子的系数代入分类方程组(9)可知前面 3 个实现不是方程(1)所容许的不变性代数1 剩下的实现(19)是方程(1)的不变性代数, 此时函数 F, G 由表 1 的第 3 个成员给出1

易知实现(17)~(19)所容许的不变量方程包含有任意函数1 如果不对这些函数作附加的约束, 则利用李的无穷小算法易证代数 sl(2, R) 的实现(17)~(19)是相应不变量方程的最大不变性代数1 定理得证1

定理 3　定理 2 中代数 sl(2, R) 的实现穷尽了方程(1)所容许的由无穷小生成子(8)张成的所有可能的半单李代数的实现1

证明　最低维的单李代数之间有如下同构:

$$\mathrm{su}(2) \sim \mathrm{so}(3) \sim \mathrm{sp}(1),\ \mathrm{sl}(2,R) \sim \mathrm{su}(1,1) \sim \mathrm{so}(2,1) \sim \mathrm{sp}(1,R)1$$

因此定理 1, 2 中的实现穷尽了方程(1)所容许的所有可能的三维单李代数的实现1

下一个容许的单李代数的维数是六维的1 共有 4 种不同的实数域上的六维单李代数, 即 so(4), so(3, 1), so(2, 2), 和 $so^{*}(4)$ 1 因为 so(4) = so(3) so(3), $so^{*}(4)$ = so(3) sl(2, R) 和代数 so(3, 1) 都包含 so(3) 为一子代数, 故由定理 1 可知不存在由算子(8) 张成这些代数的实现1 因此, 六维的半单代数 so(2, 2) 是唯一可能的方程(1) 所容许的不变性代数1

为了研究代数 so(2, 2) 的实现, 则要利用事实 so(2, 2) ~ sl(2, R) sl(2, R) 1 因此可选择基元使 so(2, 2) = $3 Q_i, K_i \mid i = 1, 2, 34$, 其中$3 Q_1, Q_2, Q_34$ = sl(2, R), $3K_1, K_2, K_34$ = sl(2, R), $[Q_i, K_j] = 0, i, j = 1, 2, 3$1 现在取 Q_1, Q_2, Q_3 为代数 sl(2, R) 的实现(17) ~ (19) 中的相应的基算子1 然而, 通过进一步的分析, 这些实现不能扩张为方程(1) 所容许的对称代数 so(2, 2) 的实现1

因此, 不存在方程(1) 所容许的由算子(8) 张成的六维单李代数的实现1 这个断言对下一类所容许的单李代数, 即八维单李代数 (sl(3, R), su(3), su(2, 1)) 同样成立1

又因为代数 $su^{*}(4)$ ~ so(5, 1) 和 so(5, 1) 都包含 so(4), 因此我们断言除了定理 2 给出的实现外, 代数 $A_{n-1}(n > 1)$ 没有由算子(8) 张成的实现, 使得它是方程(1) 的对称代数1

单李代数 $D_n(n > 1)$ 同样没有相应的实现, 这是因为这一类的最低维的代数(so(4), so(2, 2), $so^{*}(4)$) 都没有在算子(8) 下的实现, 使得它是方程(1) 的对称代数1

同理, 可断言实现(17) ~ (19) 穷尽了单李代数 $B_n(n > 1)$ 和 $C_n(n \setminus 1)$ 的所有可能的实现1 事实上, 当取 n 的最小可能值, 即 $n = 2$时, 我们可知代数 B_n 含有与 so(4), so(1, 3) 同构的子代数1 相同的结论对单李代数 $C_n(n \setminus 1)$ 同样成立, 这是因为由关系

$$sp(2, R) \sim so(3, 2), \quad sp(1, 1) \sim so(4, 1), \quad sp(2) \sim so(5)$$

以及代数 so(3, 2), so(4, 1) 都包含子代数 so(3, 1) 和代数 so(5) 包含子代数 so(4) 即可知1

为了完备该证明, 则还需考虑例外单李代数 $G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$1 以下只考虑前面两个代数, 剩下的可同样考虑1

因为李代数 G_2 含有紧致实形式 g_2 和非紧致实形式 g_2^c, 且有 g_2 H g_2^c ~ su(2) su(2) ~ so(4), 因此可断言没有方程(1) 容许的由算子(8) 张成的代数 G_2 实现1

同样, 因为李代数 F_4 含有紧致实形式 f_4 和两个非紧致实形式 f_4^c, f_4^d, 且有 f_4^c H f_4 ~ sp(3) su(2), f_4^d H f_4 ~ so(9)1 因此可知没有方程(1) 容许的由算子(8) 张成的代数 F_4 的实现1 定理得证1

4 低维可解李代数下不变方程的群分类

下面利用第 2 节中的群分类方法给出方程(1) 在一至三维可解李代数下不变的代表类1 我们将在等价群 E 的作用下, 以一个系统的方式来构造由无穷小生成子(8) 张成的所有可能的不等价对称代数的实现1

4.1 具有一维对称代数的方程

假设对给定的 F 和 G, 方程(1) 在由系数满足约束(9) 的算子(8) 生成的一维单参数对称群下是不变的1 利用命题 3 知, 算子(8) 可约化为典范形式1 把这些典范算子的系数代入分类方程组, 即可确定出 F 和 G, 因此得到相应的不变方程1

定理 4 方程(1) 所容许的由算子(8) 张成的一维可解李代数的两个不等价实现为

$$A_{1,1} = 3 5_{t} 4, \quad A_{1,2} = 3 5_{x} 4 1 \tag{21}$$

其相应的不变方程为

$$A_{1,1}: u_t = F(x, u, u_x, u_{xx})u_{xxx} + G(x, u, u_x, u_{xx}),$$

$$A_{1,2}: u_t = F(t, u, u_x, u_{xx})u_{xxx} + G(t, u, u_x, u_{xx})1$$

证明 利用命题 3 和 1 即可得定理中的结论1

4.2 具有二维对称代数的方程

由文献[15, 19]可知, 对于二维李代数, 存在两个同构类, 即 Abel 和非 Abel 代数, 满足如下交换关系:

$$A_{2,1}: [e_1, e_2] = 0; A_{2,2}: [e_1, e_2] = e_2 1 \qquad (22)$$

因为上述代数都包含 A_1 为一子代数, 因此当研究二维李代数的实现时, 可取其中的一个基元为 5_t 或 $5_x 1$ 通过详细的分析, 我们有如下结果:

定理 5 方程(1)所容许的由无穷小生成子(8)张成的 Abel 代数 $A_{2,1}$ 和非 Abel 代数 $A_{2,2}$ 的 5 个不等价实现分别为

$$A^1_{2,1} = 35_t, 5_u4, \quad A^2_{2,1} = 35_x, 5_u4, \quad A^1_{2,2} = 3- t5_t - x5_x, 5_t4,$$

$$A^2_{2,2} = 3- t5_t - x5_x, 5_x4, \quad A^3_{2,2} = 3- x5_x - u5_u, 5_x4 1$$

相应不变量方程的函数 F, G 的形式由表 2 给出1

表 2 不变量方程的函数 F, G

代数	F	G
$A^1_{2,1}$	$F(x, u_x, u_{xx})$	$G(x, u_x, u_{xx})$
$A^2_{2,1}$	$F(t, u_x, u_{xx})$	$G(t, u_x, u_{xx})$
$A^1_{2,2}$	$x^2F(u, xu_x, x^2u_{xx})$	$x^{-1}G(u, xu_x, x^2u_{xx})$
$A^2_{2,2}$	$t^2F(u, tu_x, t^2u_{xx})$	$t^{-1}G(u, tu_x, t^2u_{xx})$
$A^3_{2,3}$	$u^3F(t, u_x, uu_{xx})$	$uG(t, u_x, uu_{xx})$

如果表 2 中 F, G 是任意的, 那么代数 $A_{2,1}$ 和 $A_{2,2}$ 的上述实现分别是相应方程(1)的最大不变性代数1

证明 首先详细的考虑 Abel 代数 $A_{2,1}$ 的情形 1 令 $e_1 = 5_t$, e_2 为形如式(8)的算子1 则由交换关系(22)可知 e_2 具有形式

$$e_2 = N(x, u)5_x + G(x, u)5_u 1 \qquad (23)$$

因为算子(23)可看作作用在关于 x, u 的光滑函数上的非零向量场, 因此可选择 $e_2 = 5_u$, 所以有实现$35_t, 5_u4 1$

现在考虑 $e_1 = 5_x$ 和 e_2 为形如式(8)的算子的情形1 由交换关系(22)可得

$$e_2 = S(t)5_t + N(t, u)5_x + G(t, u)5_u 1 \qquad (24)$$

若 S X 0, 作变量变换

$$t = T(t), \quad x = x + X(t, u), \quad u = U(t, u), \quad T_t X 0, \quad U_u X 0, \qquad (25)$$

其中, T, X, U 满足方程$T_t = S^{-1}$, $SX_t + xX_u + N = 0$; $SU_t + GU_u = 0$, $U_u X 01$ 因此可把算子(24)约化为 $e_2 = 5_t 1$

如果在算子(24)中有 S = 0, $G X 0$, 那么在式(25)中取 $T = t$ 且取 X 和 U 分别为方程 $GX_u + N = 0$, $GU_u = 1$ 的解, 则可把算子(24)约化为 $e_2 = 5_u 1$

最后, 考虑剩下的情形, 即在算子(24)中有 S = $G = 01$ 则存在形如式(25)的变换, 当 $N_u = 0$ 时, 把算子(24)变换为 $e_2 = t5_x$; 当 $N_u X 0$ 时, 把算子(24)变换为 $e_2 = u5_x 1$

总结上述分析可断言, 在等价性变换群 E 下, 代数 $A_{2,1}$ 存在 4 个不等价的实现: $35_t, 5_u4$,

$_x, 5_{u}4, 35_x, t5_{x}4, 35_x, u5_{x}4$ 1 然而把它们代入分类方程组(9) 可知第3个实现$35_x, t5_{x}4$ 不是方程(1) 的不变性代数;而第4个实现对应的不变方程在等价群 E 中的变换下是可线性化的,这与我们先前的假设方程(1) 是非线性的矛盾1

因此,可知代数 $A_{2,1}$ 有两个不等价的实现,它是形如式(1) 的方程的不变性代数,其相应方程中的函数 F, G 由表2前两行给出1

同理可得方程(1) 所容许的抽象的非 Abel 李代数 $A_{2,2}$ 的3个不等价的实现为

$$A^1_{2,2} = 3-\ t5_t - x5_x, 5_t4,\ A^2_{2,2} = 3-\ t5_t - x5_x, 5_x4,\ A^3_{2,2} = 3-\ x5_x - u5_u, 5_x4\ 1$$

与它们相对应的不变方程的函数 F 和 G 由表2后3行确定1

由上述的证明过程易知若函数 F, G 是任意的,则二维李代数的上述实现是其相应方程的最大不变性代数1 定理得证1

4.3 具有三维对称代数的方程

由文献[15, 19]可知,为了构造三维可解李代数的实现,我们应分别考虑可分解和非可分解代数1

一个李代数是可分解的,如果它可写成两个或更多李代数的直和 $L = L_1 \quad L_2$ 且$[L_1, L_2] = 0$1 有两类三维可分解的可解李代数:$A_{3,1} = 3A_1 = A_1 \quad A_1 \quad A_1$ 且$[e_i, e_j] = 0, i, j = 1, 2, 3$;$A_{3,2} = 3A_1 = A_{2,2} \quad A_1$ 且$[e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = 0, [e_2, e_3] = 0$1

显然,为了构造这些代数在算子(8) 下的所有可能的不等价实现,则需要扩张上一小节的二维代数 $A^i_{2,1} = 3e_1, e_24\ (i = 1, 2)$ 的实现为代数 $A_{3,1}$ 的实现,以及 $A^i_{2,2} = 3e_1, e_24\ (i = 1, 2, 3)$ 的实现为代数 $A_{3,2}$ 的实现1

在定理5的二维代数中增加一个线性独立的具有形式(8) 的向量场并且把它代入上述交换关系1 利用等价性变换简化 e_3 且保持$\{e_1, e_2\}$ 不变1 因此,我们不加证明给出定理61 (注意还存在若干实现不产生形如式(1) 的不变量方程)

定理6 方程(1) 所容许的由无穷小生成子(8) 张成的三维可分解可解李代数 $A_{3,i}(i = 1, 2)$ 的7个不等价的实现为

$$A^1_{3,1} = 35_t, 5_u, 5_x4,\ A^1_{3,2} = 3-\ t5_t - x5_x, 5_t, 5_u4,$$

$$A^2_{3,2} = 3-\ t5_t - u5_u, 5_t, xu5_u4,\ A^3_{3,2} = 3-\ t5_t - u5_u, 5_u, t5_t + x5_x4,$$

$$A^4_{3,2} = 3-\ t5_t - x5_x, 5_x, 5_u4,\ A^5_{3,2} = 3-\ x5_x - u5_u, 5_u, 5_t4,$$

$$A^6_{3,2} = 3-\ x5_x - u5_u, 5_u, tx5_x4\ 1$$

相应不变量方程的函数 F, G 的形式由表3给出1

表3 不变量方程的函数 F, G

代数	F	G
$A^1_{3,1}$	$F(u_x, u_{xx})$	$G(u_x, u_{xx})$
$A^1_{3,2}$	$x^2F(xu_x, x^2u_{xx})$	$x^{-1}G(xu_x, x^2u_{xx})$
$A^2_{3,2}$	$u^{(-x/2-1)}(u+2u_x)^{x/2}F(x, u^{-1}u_{xx})$	$G(t, x, u, u_x, u_{xx})$
$A^3_{3,2}$	$t^{-1}x^3F(t^{-1}x^2u_x, t^{-1}x^3u_{xx})$	$x^{-1}G(t^{-1}x^2u_x, t^{-1}x^3u_{xx})$
$A^4_{3,2}$	$t^2F(tu_x, t^2u_{xx})$	$t^{-1}G(tu_x, t^2u_{xx})$
$A^5_{3,2}$	$x^3F(u_x, xu_{xx})$	$xG(u_x, xu_{xx})$
$A^6_{3,2}$	$x^3F(t, xu_x^{-1}u_{xx})$	$t^{-1}xu_x[tG(t, xu_x^{-1}u_{xx}) + \ln\mid u_x\mid]$

表3中与 $A^2_{3,2}$ 对应的函数 G 满足方程组

$$\begin{cases} G_t = 0,\ -uG_u - u_xG_{u_x} - u_{xx}G_{u_{xx}} = 0, \\ xG - 3u_{xx}[u^{(-x/2-1)}(u+2u_x)^{x/2}F(x, u^{-1}u_{xx})] - \\ \qquad xuG_u - (u + xu_x)G_{u_x} - (2u_x + xu_{xx})G_{u_{xx}} = 0。\end{cases} \tag{26}$$

此外, 如果表 3 中 F, G 是任意的, 那么代数 $A_{3,1}$ 和 $A_{3,2}$ 的上述实现分别是相应方程(1) 的最大不变性代数。

注 2　从方程组(26) 中, 我们可以解出函数 G 的显式表达式。但是由于所获得的表达式过于复杂,因此这里采用这种隐式定义的方式来进行表示。

下面我们讨论非可分解代数, 共有如下 7 类抽象的非同构非可分解的可解李代数:

$A_{3,3}$: $[e_2, e_3] = e_1$;

$A_{3,4}$: $[e_1, e_3] = e_1$, $[e_2, e_3] = e_1 + e_2$;

$A_{3,5}$: $[e_1, e_3] = e_1$, $[e_2, e_3] = e_2$;

$A_{3,6}$: $[e_1, e_3] = e_1$, $[e_2, e_3] = -e_2$;

$A_{3,7}$: $[e_1, e_3] = e_1$, $[e_2, e_3] = qe_2$　　$(0 < |q| < 1)$;

$A_{3,8}$: $[e_1, e_3] = -e_2$, $[e_2, e_3] = e_1$;

$A_{3,9}$: $[e_1, e_3] = qe_1 - e_2$, $[e_2, e_3] = e_1 + qe_2$　　$(q > 0)$。

上述代数都包含二维交换理想 $A_{2,1} = \{e_1, e_2\}$。因而, 可通过添加具有形式(8) 的算子 e_3 来扩张代数 $A_{2,1}$ 的实现到上述代数的实现。此外, 还需考虑实现 $A^i_{2,1} = \{e_1, e_2\}$ $(i = 1, 2)$ 和 $A^i_{2,1} = \{e_1, e_2\}$ $(i = 1, 2)$, 其中, $e_1 = e_2$, $e_2 = e_1$。下面以 Weyl 代数 $A_{3,3}$ (幂零李代数) 为例来进行说明。

我们从扩张代数 $A^1_{2,1}$ 的实现开始。首先, 如果 $e_1 = \partial_t$, $e_2 = \partial_u$, 那么由交换关系$[e_2, e_3] = e_1$ 有方程 $N_u\partial_x + G_u\partial_u = \partial_t$ 成立, 其中 e_3 为具有形式(8) 的算子。因为对 e_3 的任意系数 S, N, G 它们并不满足前述方程, 因此这个实现不能扩展到三维可解李代数。接下来, 如果 $e_1 = \partial_u$, $e_2 = \partial_t$, 则 $e_3 = N(x)\partial_x + [t + G(x)]\partial_u$。因此, 在等价群 E 下, 代数 $A_{3,3}$ 有如下 3 个实现:

$\{\partial_u, \partial_t, \partial_x + t\partial_u\}$, $\{\partial_u, \partial_t, t\partial_u\}$, $\{\partial_u, \partial_t, (t + x)\partial_u\}$。

把上述实现代入分类方程组(9) , 可知第 2 个实现不是形如式(1) 的方程的不变性代数。

对代数 $A^2_{2,1}$ 的实现的扩张, 需考虑两种可能性。第 1 种可能性是 $e_1 = \partial_x$, $e_2 = \partial_u$, 而第 2 种情形是 $e_1 = \partial_u$, $e_2 = \partial_x$。然而, 上述实现在变量变换

$$t = t,\ x = u,\ u = x \tag{27}$$

下可互相转化。因此不失一般性, 只考虑第 2 种情形。经过一些必要的计算, 可导出方程(1) 所容许的代数 $A_{3,3}$ 的一个实现: $\{\partial_u, \partial_x, \partial_t + x\partial_u\}$。

因此, 可断言对于代数 $A_{3,3}$ 存在 3 个不等价实现, 它是相应的形如式(1) 的方程所容许的不变性代数。

剩下的非可分解的可解李代数可类似的讨论。我们有如下形如式(1) 的方程所容许的不等价实现。

定理 7　方程(1) 所容许的由无穷小生成子(8) 张成的三维非可分解可解李代数 $A_{3,i}$ $(i = 3, …, 9)$ 的 22 个不等价的实现为

$A^1_{3,3} = \{\partial_u, \partial_t, \partial_x + t\partial_u\}$, $A^2_{3,3} = \{\partial_u, \partial_x, t\partial_x + x\partial_u\}$,

$$A^3_{3,3}=\langle\partial_u,\partial_t,(t+x)\partial_u\rangle,\quad A^1_{3,4}=\langle\partial_u,\partial_t,t\partial_t+x\partial_x+(t+u)\partial_u\rangle,$$
$$A^2_{3,4}=\langle\partial_u,\partial_t,t\partial_t+(t+u)\partial_u\rangle,\quad A^3_{3,4}=\langle\partial_x,\partial_u,2t\partial_t+(x+u)\partial_x+u\partial_u\rangle,$$
$$A^4_{3,4}=\langle\partial_x,\partial_u,(x+u)\partial_x+u\partial_u\rangle,\quad A^1_{3,5}=\langle\partial_t,\partial_u,t\partial_t+x\partial_x+u\partial_u\rangle,$$
$$A^2_{3,5}=\langle\partial_t,\partial_u,t\partial_t+u\partial_u\rangle,\quad A^3_{3,5}=\langle\partial_x,\partial_u,2t\partial_t+x\partial_x+u\partial_u\rangle,$$
$$A^1_{3,6}=\langle\partial_t,\partial_u,t\partial_t+x\partial_x-u\partial_u\rangle,\quad A^2_{3,6}=\langle\partial_t,\partial_u,t\partial_t-u\partial_u\rangle,$$
$$A^3_{3,6}=\langle\partial_x,\partial_u,t\partial_t+x\partial_x-u\partial_u\rangle,\quad A^4_{3,6}=\langle\partial_x,\partial_u,x\partial_x-u\partial_u\rangle,$$
$$A^1_{3,7}=\langle\partial_u,\partial_t,qt\partial_t+x\partial_x+u\partial_u\rangle\quad(q\neq0,\pm1),$$
$$A^2_{3,7}=\langle\partial_u,\partial_t,qt\partial_t+u\partial_u\rangle\quad(q\neq0,\pm1),$$
$$A^3_{3,7}=\langle\partial_x,\partial_u,t\partial_t+x\partial_x+qu\partial_u\rangle\quad(0<|q|<1),$$
$$A^4_{3,7}=\langle\partial_x,\partial_u,x\partial_x+qu\partial_u\rangle\quad(0<|q|<1),$$
$$A^1_{3,8}=\langle\partial_x,\partial_u,\partial_t+u\partial_x-x\partial_u\rangle,\quad A^2_{3,8}=\langle\partial_x,\partial_u,u\partial_x-x\partial_u\rangle,$$
$$A^1_{3,9}=\langle\partial_x,\partial_u,\partial_t+(u+qx)\partial_x+(qu-x)\partial_u\rangle\quad(q>0),$$
$$A^2_{3,9}=\langle\partial_x,\partial_u,(u+qx)\partial_x+(qu-x)\partial_u\rangle\quad(q>0),$$

表 4 不变量方程的函数 F, G

代数	F	G
$A^1_{3,3}$	$F(u_x,u_{xx})$	$x+G(u_x,u_{xx})$
$A^2_{3,3}$	$F(t,u_{xx})$	$-u_x^2/2+G(t,u_{xx})$
$A^3_{3,3}$	$F(x,u_{xx})$	$u_x+G(x,u_{xx})$
$A^1_{3,4}$	$x^2F(u_x,xu_{xx})$	$G(u_x,xu_{xx})+\ln\lvert x\rvert$
$A^2_{3,4}$	$u_x^{-1}F(x,u_x^{-1}u_{xx})$	$G(x,u_x^{-1}u_{xx})+\ln\lvert u_x\rvert$
$A^3_{3,4}$	$8u_x^{-3}\sqrt{t}F(\xi,\omega)$	$(1/2)u_x^{-4}[u_x^5t^{-1/2}G(\xi,\omega)-48\sqrt{t}u_{xx}^2F(\xi,\omega)]$, $\xi=-(1/2)\ln\lvert t\rvert+u_x^{-1}$, $\omega=8\sqrt{t}u_x^{-3}u_{xx}$
$A^4_{3,4}$	$u_x^{-3}e^{3/u_x}F(t,\omega)$	$u_x^{-4}e^{1/u_x}[-3u_{xx}^2e^{2/u_x}F(t,\omega)+u_x^5G(t,\omega)]$, $\omega=u_x^{-3}u_{xx}e^{1/u_x}$
$A^1_{3,5}$	$x^2F(u_x,xu_{xx})$	$G(u_x,xu_{xx})$
$A^2_{3,5}$	$u_x^{-1}F(x,u_x^{-1}u_{xx})$	$G(x,u_x^{-1}u_{xx})$
$A^3_{3,5}$	$\sqrt{t}F(u_x,\sqrt{t}u_{xx})$	$t^{-1/2}G(u_x,\sqrt{t}u_{xx})$
$A^1_{3,6}$	$x^2F(x^2u_x,x^3u_{xx})$	$x^{-2}G(x^2u_x,x^3u_{xx})$
$A^2_{3,6}$	$u_xF(x,u_x^{-1}u_{xx})$	$u_x^2G(x,u_x^{-1}u_{xx})$
$A^3_{3,6}$	$t^2F(t^2u_x,t^3u_{xx})$	$t^{-2}G(t^2u_x,t^3u_{xx})$
$A^4_{3,6}$	$u_x^{-3/2}F(t,u_x^{-3/2}u_{xx})$	$u_x^{1/2}G(t,u_x^{-3/2}u_{xx})$
$A^1_{3,7}$	$x^{3-q}F(u_x,xu_{xx})$	$x^{1-q}G(u_x,xu_{xx})$, $q\neq0,\pm1$
$A^2_{3,7}$	$u_x^{-q}F(x,u_x^{-1}u_{xx})$	$u_x^{1-q}G(x,u_x^{-1}u_{xx})$, $q\neq0,\pm1$
$A^3_{3,7}$	$t^2F(\xi,\omega)$	$t^{q-1}G(\xi,\omega)$, $\xi=t^{1-q}u_x$, $\omega=t^{2-q}u_{xx}$, $0<\lvert q\rvert<1$
$A^4_{3,7}$	$u_x^{3/(q-1)}F(t,\omega)$	$u_x^{q/(q-1)}G(t,\omega)$, $\omega=u_x^{(2-q)/(q-1)}u_{xx}$, $0<\lvert q\rvert<1$
$A^1_{3,8}$	$\frac{1}{(1+u_x^2)^{3/2}}F(\xi,\omega)$	$\frac{3}{(1+u_x^2)^{5/2}}\left[\frac{1}{3}(1+u_x^2)^3G(\xi,\omega)+u_{xx}^2(t+\arctan(u_x)-u_x)F(\xi,\omega)\right]$, $\xi=-t-\arctan(u_x)$, $\omega=(1+u_x^2)^{-3/2}u_{xx}$
$A^2_{3,8}$	$\frac{1}{(1+u_x^2)^{3/2}}F(t,\omega)$	$\frac{1}{(1+u_x^2)^{5/2}}[(1+u_x^2)^3G(t,\omega)-3u_xu_{xx}^2F(t,\omega)]$, $\omega=(1+u_x^2)^{-3/2}u_{xx}$
$A^1_{3,9}$	$\frac{e^{3qt}}{(1+u_x^2)^{3/2}}F(\xi,\omega)$	$e^{qt}(1+u_x^2)\left[G(\xi,\omega)+12\int^t\frac{e^{2qt}u_{xx}^2F(\xi,\omega)}{8(1+u_x^2)^3\cos^4(t+\arctan(u_x)-\alpha)}d\alpha\right]$, $\xi=-t-\arctan(u_x)$, $\omega=e^{qt}(1+u_x^2)^{-3/2}u_{xx}$, $q>0$
$A^2_{3,9}$	$\frac{e^{-3q\arctan(u_x)}}{(1+u_x^2)^{3/2}}F(t,\omega)$	$\frac{e^{-q\arctan(u_x)}}{(1+u_x^2)^{5/2}}[(1+u_x^2)^3G(t,\omega)-3u_xu_{xx}^2e^{-2q\arctan(u_x)}F(t,\omega)]$, $\omega=(1+u_x^2)^{-3/2}u_{xx}e^{-q\arctan(u_x)}$, $q>0$

其相应不变量方程的函数 F, G 的形式由表 4 给出 1　如果表中函数 F, G 是任意的, 那么代数 $A_{3,i}(i = 3, , , 9)$ 的上述实现分别是相应方程(1) 的最大不变性代数1

5　四维可解李代数下不变方程的群分类

本节考虑方程(1) 在四维可解李代数下不变的群分类1

由文献[15, 19] 可知, 分别有 10 类可分解和非可分解的非同构的四维可解李代数1　因为容许有三维可解李代数的具有形式(1) 的方程中的任意函数都含有两个变量, 因此自然期待容许有四维可解李代数的具有形式(1) 的方程中的任意函数仅含有一个变量1　下面我们首先考虑可分解代数1

易知, 有如下可分解的四维可解李代数: $4A_1 = A_{3,1}\quad A_1$, $A_{2,2}\quad 2A_1 = A_{3,2}\quad A_1$, $A_{2,2}\quad A_{2,2} = 2A_{2,2}$, $A_{3,i}\quad A_1 (i = 3, 4, , , 9) 1$

通过添加具有形式(8) 的算子 e_4 对代数 $A^1_{3,1}$ 和 $A^i_{3,2}(i = 1, , , 6)$ 的实现进行扩张, 可知不存在代数 $4A_1$ 和 $A_{3,2}\quad A_1$ 的实现, 使得它们是形如式 (1) 的方程的不变性代数 1　而对代数 $2A_{2,2}$ 进行分析, 则可导出方程(1) 所容许的 3 个不等价实现1

同理, 对剩下的可分解的四维可解李代数进行相似的分析, 则可导出 8 个不等价的实现, 它们是形如式(1) 的方程的最大不变性代数1　这些不等价的实现及其相应的不变量方程由如下定理和表 5 给出1

表 5　　不变量方程的函数 F, G

代数	F	G
$2A^1_{2,2}$	$x^{(2-k)}u_x^{-k}F(xu_x^{-1}u_{xx})$	$x^{-k}u_x^{(1-k)}G(xu_x^{-1}u_{xx})$
$2A^2_{2,2}$	$t^{(2-k)/(1-k)}u_x^{3k/(1-k)}F(X)$	$t^{k/(1-k)}u_x^{1/(1-k)}G(X)$, $\quad X = t^{1/(1-k)}u_x^{(2k-1)/(1-k)}u_{xx}$
$2A^3_{2,2}$	$t^2F(tu_x^{-1}u_{xx})$	$u_x[\ln\vert t\vert + \ln\vert u_x\vert + G(tu_x^{-1}u_{xx})]$
$A^2_{3,4}\quad 3 5_x 4$	$u_x^{-1}F(u_x^{-1}u_{xx})$	$\ln\vert u_x\vert + G(u_x^{-1}u_{xx})$
$A^4_{3,4}\quad 3 5_t 4$	$u_x^{-3}e^{3/u_x}F(X)$	$u_x^{-4}e^{1/u_x}[-3u_{xx}^2e^{2/u_x}F(X) + u_x^5G(X)]$, $\quad X = u_x^{-3}u_{xx}e^{1/u_x}$
$A^2_{3,6}\quad 3 5_x 4$	$u_xF(u_x^{-1}u_{xx})$	$u_x^2G(u_x^{-1}u_{xx})$
$A^4_{3,6}\quad 3 5_t 4$	$u_x^{-3/2}F(u_x^{-3/2}u_{xx})$	$u_x^{1/2}G(u_x^{-3/2}u_{xx})$
$A^2_{3,7}\quad 3 5_x 4$	$u_x^{-q}F(u_x^{-1}u_{xx})$	$u_x^{1-q}G(u_x^{-1}u_{xx})$, $\quad q\ X\ 0,\ ?\ 1, 2$
$A^4_{3,7}\quad 3 5_t 4$	$u_x^{3/(q-1)}F(X)$	$u_x^{q/(q-1)}G(X)$, $\quad X = u_x^{(2-q)/(q-1)}u_{xx}$, $0 < \vert q\vert < 1$
$A^2_{3,8}\quad 3 5_t 4$	$\dfrac{1}{(1+u_x^2)^{3/2}}F(X)$	$\dfrac{1}{(1+u_x^2)^{5/2}}[(1+u_x^2)^3G(X) - 3u_xu_{xx}^2F(X)]$, $\quad X = (1+u_x^2)^{-3/2}u_{xx}$
$A^2_{3,9}\quad 3 5_t 4$	$\dfrac{e^{-3q\arctan(u_x)}}{(1+u_x^2)^{3/2}}F(X)$	$\dfrac{e^{-q\arctan(u_x)}}{(1+u_x^2)^{5/2}}[-(1+u_x^2)^3G(X) + 3u_xu_{xx}^2e^{-2q\arctan(u_x)}F(X)]$ $X = (1+u_x^2)^{-3/2}u_{xx}e^{-q\arctan(u_x)}$, $q > 0$

定理 8　方程(1) 所容许的由无穷小生成子(8) 张成的四维可分解可解李代数的 11 个不等价的实现为:

$$2A^1_{2,2} = A^1_{3,2} \vdash 3- \ u5_u + kx5_x4 \qquad (k\ X\ 0),$$

$$2A^2_{2,2} = A^4_{3,2} \vdash 3- \ u5_u + kt5_t4 \qquad (k\ X\ 0,\ ?\ 1),$$

$$2A^3_{2,2} = A^4_{3,2} \vdash 3- \ u5_u + t5_x4,$$

$$A^2_{3,4}\quad 3 5_x 4,\ A^4_{3,4}\quad 3 5_t 4,\ A^2_{3,6}\quad 3 5_x 4,\ A^4_{3,6}\quad 3 5_t 4,$$

$$A^2_{3,7}\quad 3 5_x 4 \qquad (q\ X\ 0,\ ?\ 1, 2),$$

$$A^4_{3,7}\quad 3 5_t 4 \qquad (0 < \vert q\vert < 1),$$

$A^2_{3,8}\quad \langle \partial_t \rangle,\ A^2_{3,9}\quad \langle \partial_t \rangle \qquad (q>0)$,

相应不变量方程的函数 F, G 的形式由表 5 给出。

下面考虑非可分解代数, 共有 10 类非同构非可分解的四维可解李代数 $A_4 = \langle e_i \mid i = 1, 2, 3, 4\rangle$。其非零的交换关系为

$A_{4,1}$: $[e_2, e_4] = e_1,\ [e_3, e_4] = e_2$;

$A_{4,2}$: $[e_1, e_4] = qe_1,\ [e_2, e_4] = e_2,\ [e_3, e_4] = e_2 + e_3 \qquad (q \neq 0)$;

$A_{4,3}$: $[e_1, e_4] = e_1,\ [e_3, e_4] = e_2$;

$A_{4,4}$: $[e_1, e_4] = e_1,\ [e_2, e_4] = e_1 + e_2,\ [e_3, e_4] = e_2 + e_3$;

$A_{4,5}$: $[e_1, e_4] = e_1,\ [e_2, e_4] = qe_2,\ [e_3, e_4] = pe_3 \qquad (-1 \leq p \leq q \leq 1,\ pq \neq 0)$;

$A_{4,6}$: $[e_1, e_4] = qe_1,\ [e_2, e_4] = pe_2 - e_3,\ [e_3, e_4] = e_2 + pe_3 \qquad (q \neq 0, p \geq 0)$;

$A_{4,7}$: $[e_2, e_3] = e_1,\ [e_1, e_4] = 2e_1,\ [e_2, e_4] = e_2,\ [e_3, e_4] = e_2 + e_3$;

$A_{4,8}$: $[e_2, e_3] = e_1,\ [e_1, e_4] = (1+q)e_1,\ [e_2, e_4] = e_2,\ [e_3, e_4] = qe_3 \qquad (|q| \leq 1)$;

$A_{4,9}$: $[e_2, e_3] = e_1,\ [e_1, e_4] = 2qe_1,\ [e_2, e_4] = qe_2 - e_3,\ [e_3, e_4] = e_2 + qe_3 \qquad (q \geq 0)$;

$A_{4,10}$: $[e_1, e_3] = e_1,\ [e_2, e_3] = e_2,\ [e_1, e_4] = -e_2,\ [e_2, e_4] = e_1$。

由上述非可分解代数的结构可知, 研究其实现可以通过添加形如式(8)的算子 e_4 来扩张已知的三维可解李代数 $A_3 = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$ 的实现来获得。且需使用如下的格式来扩张:

$A_{4,i} = A_{3,1} \oplus \langle e_4\rangle\ (i = 1, \ldots, 6),\ A_{4,i} = A_{3,3} \oplus \langle e_4\rangle\ (i = 7, 8, 9),\ A_{4,10} = A_{3,5} \oplus \langle e_4\rangle$。

我们有如下定理。

定理 9 方程(1)所容许的由无穷小生成子(8)张成的四维非可分解的可解李代数的 15 个不等价的实现为:

$$A^1_{4,2} = A^1_{3,1} \oplus \langle qt\partial_t + x\partial_x + (x+u)\partial_u\rangle \qquad (q \neq 0, 1),$$
$$A^2_{4,2} = A^1_{3,1} \oplus \langle t\partial_t + (t+x)\partial_x + qu\partial_u\rangle \qquad (q \neq 0, 1),$$
$$A^1_{4,3} = A^1_{3,1} \oplus \langle t\partial_t + x\partial_u\rangle,\ A^2_{4,3} = A^1_{3,1} \oplus \langle t\partial_x + u\partial_u\rangle,$$
$$A^1_{4,4} = A^1_{3,1} \oplus \langle t\partial_t + (t+x)\partial_x + (x+u)\partial_u\rangle,$$
$$A^1_{4,5} = A^1_{3,1} \oplus \langle t\partial_t + px\partial_x + qu\partial_u\rangle \qquad (p < q,\ pq \neq 0,\ p, q \neq 1),$$
$$A^1_{4,6} = A^1_{3,1} \oplus \langle qt\partial_t + (px+u)\partial_x + (pu-x)\partial_u\rangle \qquad (q \neq 0,\ p \geq 0),$$
$$A^1_{4,7} = A^1_{3,3} \oplus \langle t\partial_t + (x-t)\partial_x + (2u - t^2/2)\partial_u\rangle,$$
$$A^2_{4,7} = A^2_{3,3} \oplus \langle -\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u\rangle,$$
$$A^1_{4,8} = A^1_{3,3} \oplus \langle t\partial_t + qx\partial_x + (1+q)u\partial_u\rangle \qquad (q \in R),$$
$$A^2_{4,8} = A^1_{3,3} \oplus \langle t\partial_t + k\partial_x + u\partial_u\rangle \qquad (k \neq 0),$$
$$A^3_{4,8} = A^1_{3,3} \oplus \langle x\partial_x + u\partial_u + k^{-1}(\partial_t + x\partial_u)\rangle \qquad (k \neq 0),$$
$$A^4_{4,8} = A^2_{3,3} \oplus \langle (1-q)t\partial_t + x\partial_x + (1+q)u\partial_u\rangle \qquad (|q| \neq 1),$$
$$A^1_{4,9} = A^2_{3,3} \oplus \langle -(1+t^2)\partial_t + (q-t)x\partial_x + (2qu - x^2/2)\partial_u\rangle \qquad (q > 0),$$
$$A^1_{4,10} = A^3_{3,5} \oplus \langle 2kt\partial_t + u\partial_x - x\partial_u\rangle \qquad (k \geq 0)。$$

其相应不变量方程的函数 F, G 的形式由表 6 给出。如果表 6 中函数 F, G 是任意的, 那么非可分解代数的上述实现分别是相应方程(1)的最大不变性代数。

表 6　　不变量方程的函数 F, G

代数	F	G
$A^1_{4,2}$	$e^{(3-q)u_x}F(e^{u_x}u_{xx})$	$e^{(1-q)u_x}G(e^{u_x}u_{xx}),\ q\ X\ 0, 1$
$A^2_{4,2}$	$u_x^{2/(q-1)}F(X)$	$(u_x/(q-1))[-\ln\|u_x\|+(q-1)G(X)],\quad X=u_x^{(2-q)/(q-1)}u_{xx},\ q\ X\ 0, 1$
$A^1_{4,3}$	$e^{-u_x}F(u_{xx})$	$e^{-u_x}G(u_{xx})$
$A^2_{4,3}$	$F(u_x^{-1}u_{xx})$	$-u_x[\ln\|u_x\|-G(u_x^{-1}u_{xx})]$
$A^1_{4,4}$	$e^{2u_x}F(X)$	$-u_x^2/2+G(X),\quad X=u_{xx}e^{u_x}$
$A^1_{4,5}$	$u_x^{(3p-1)/(q-p)}F(X)$	$u_x^{(q-1)/(q-p)}G(X),\quad X=u_x^{(q-2p)/(p-q)}u_{xx},\ p<q,\ pq\ X\ 0,\ p, q\ X\ 1$
$A^1_{4,6}$	$\frac{e^{[(q-3p)\arctan(u_x)]}}{(1+u_x^2)^{3/2}}F(X)$	$\frac{e^{[(q-p)\arctan(u_x)]}}{(1+u_x^2)^{5/2}}[(1+u_x^2)^3G(X)-3u_xu_{xx}^2e^{(-2p\arctan(u_x))}F(X)]$ $X=\frac{e^{-p\arctan(u_x)}u_{xx}}{(1+u_x^2)^{3/2}},\ q\ X\ 0,\ p\ \backslash\ 0$
$A^1_{4,7}$	$u_x^2F(u_{xx})$	$x+u_x\ln\|u_x\|+u_xG(u_{xx})$
$A^2_{4,7}$	$e^{-3t}F(u_{xx})$	$-u_x^2/2+e^{-2t}G(u_{xx})$
$A^1_{4,8}$	$u_x^{(3q-1)}F(X)$	$x+u_x^qG(X),\quad X=u_x^{(q-1)}u_{xx},\ q\ I\ R$
$A^2_{4,8}$	$u_x^{-1}F(u_x^{-1}u_{xx})$	$x-k\ln\|u_x\|+G(u_x^{-1}u_{xx}),\quad k\ X\ 0$
$A^3_{4,8}$	$e^{3ku_x}F(e^{ku_x}u_{xx})$	$x+e^{ku_x}G(e^{ku_x}u_{xx}),\quad k\ X\ 0$
$A^4_{4,8}$	$t^{(2+q)/(1-q)}F(tu_{xx})$	$-u_x^2/2+t^{2q/(1-q)}G(tu_{xx}),\quad \|q\|\ X\ 1$
$A^1_{4,9}$	$\sqrt{1+t^2}e^{-3q\arctan(t)}F(X)$	$(1/(2(1+t^2)))[-u_x^2(1+t^2)+2e^{-2q\arctan(t)}G(X)]$ $X=(1+t^2)u_{xx}-t,\ q>0$
$A^1_{4,10}$	$\frac{\sqrt{t}e^{3k\arctan(u_x)}}{(1+u_x^2)^{3/2}}F(X)$	$-\frac{3e^{k\arctan(u_x)}}{\sqrt{t}(1+u_x^2)^{5/2}}\left[-\frac{1}{3}(1+u_x^2)^3G(X)+tu_xu_{xx}^2e^{2k\arctan(u_x)}F(X)\right]$ $X=\frac{\sqrt{t}u_{xx}e^{k\arctan(u_x)}}{(1+u_x^2)^{3/2}},\ k\ \backslash\ 0$

证明　易知, 代数 $A_{3,1}$ 只存在一个实现, 它是方程

$$u_t = F(u_x, u_{xx})u_{xxx} + G(u_x, u_{xx}) \tag{28}$$

的最大不变性代数, 因此与代数 $A_{4,i}(i = 1, , , 6)$ 的实现相对应的不变方程具有形式(28) 1

直接的计算表明代数 $A_{4,1}$ 没有方程(1) 所容许的实现 1　对剩下的情形, 我们可得 7 个不等价的实现 $A^1_{4,2}$ ~ $A^1_{4,6}$, 它们是形如式(1) 的方程的不变性代数 1　与其相对应的形如式(1) 的不变方程中的任意函数 F, G 表 6 已给出1

正如前述提及的一样, 代数 $A_{4,i}(i = 7, 8, 9)$ 的实现可通过添加形如式(8) 的算子 e_4 来扩张代数 $A_{3,3}$ 的实现获得 1　且当利用代数 $A_{3,3} = 3e_1, e_2, e_34$ 的实现时, 要考虑这些代数的同构: $e_1\ y\ e_1, e_2\ y\ -e_3, e_3\ y\ e_21$

由此, 可得代数 $A_{4,7}$ 和 $A_{4,9}$ 的 3 个不等价的实现, 即 $A^1_{4,7}$, $A^2_{4,7}$ 和 $A^1_{4,9}$, 它们是形如式(1) 的方程的不变性代数 1　与其相对应的形如式(1) 的方程中的函数 F, G 表 6 已给出1

接下来, 可构造式(1) 所容许的代数 $A_{4,8}$ 的 4 个不等价的实现: $A^1_{4,8}$ ~ $A^4_{4,8}$1

最后, 通过添加形如式(8) 的算子 e_4 来扩张代数 $A_{3,5} = 3e_1, e_2, e_34$ 的实现, 可获得实现 $A^1_{4,10}$1

形如式(1) 的方程的完全列表在表 6 中已给出, 它们的最大不变性代数为上述非可分解的四维可解李代数1　定理证毕1

6　结　　语

本文利用代数化的方法[15]给出了具有两个含有 5 个自变量的任意函数的一般拟线性三

阶演化方程在低维抽象李代数下的群分类1 我们发现当方程的对称代数为一维至四维时,其相应的不变方程的任意函数分别含有 4, 3, 2 和 1 个自变量1 总结前面所获一般拟线性三阶演化方程(1) 的群分类结果,可知:

( ) 存在两个不等价的形如式(1) 的演化偏微分方程容许有一维不变性代数;

( ) 存在 5 个不等价的形如式(1) 的演化偏微分方程容许有二维不变性代数(见表2);

( ) 对于在三维李代数下不变的拟线性三阶演化方程(1),

(a) 存在3 个不等价方程容许有三维半单不变性代数(见定理 2),

(b) 存在 29 个不等价方程容许有三维可解李代数(见表 3 和表 4);

( ) 对于在四维可解李代数下不变的拟线性三阶演化方程(1),

(a) 存在 11 个不等价方程容许有四维可分解可解李不变性代数(见表 5),

(b) 存在 15 个不等价方程容许有四维非可分解可解李不变性代数(见表 6) 1

要想给出方程(1) 的完全分类列表,接下来需要构造在半单和可解李代数半直和代数以及五维及五维以上可解李代数下的不变量方程1 根据抽象李代数的分类结果,这需要考虑大量的非同构类,因此将遭遇非常复杂和庞大的计算1 事实上这可从五维实可解李代数具有 66 个非同构类就可看出完备该分类所面临的复杂性1 而对六维可解李代数,则存在 99 个非同构类,这只是对具有一个幂零元的情形1 因此,我们将另文研究方程(1) 在高维李代数下的群分类1

致谢 作者对乌克兰科学院数学研究所 Renat Zhdanov 教授详细阅读本文英文稿件,并为本文提出的宝贵修改意见表示衷心的感谢,同时感谢审稿人提出的有价值建议1

[参 考 文 献]

[1] Bluman G, Anco S C. Symmetry and Integration Methods for Differential Equations [M]. New York: Springer, 2002.

[2] Bluman G W, Kumei S. Symmetries and Differential Equations [M]. New York: Springer, 1989.

[3] Fushchych W I, Shtelen W M, Serov N I. Symmetry Analysis and Exact Solutions of Nonlinear Equations of Mathematical Physics [M]. Dordrecht: Kluwer, 1993.

[4] Fushchych W I, Zhdanov R Z. Symmetries and Exact Solutions of Nonlinear Dirac Equations [M]. Kyiv: Naukova Ukraina, 1997.

[5] Ibragimov N H. Transformation Groups Applied to Mathematical Physics [M]. Dordrecht: D Reidel Publishing Co., 1985.

[6] Ibragimov N H. Lie Group Analysis of Differential Equations) Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws [M]. Vol 1. Boca Raton: CRC Press, 1994.

[7] Ibragimov N H. Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations [M]. New York: Wiley, 1999.

[8] Olver P J. Application of Lie Groups to Differential Equations [M]. New York: Springer-Verlag, 1986.

[9] Ovsiannikov L V. Group Analysis of Differential Equations [M]. New York: Academic Press, 1982.

[10] Stephani H. Differential Equation: Their Solution Using Symmetries [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.

[11] Lie S, Engel F. Theorie der Transformationsgruppen [M]. 3Bd. Leipzig: Teubner. 1888, 1890, 1893.

12] Lie S. On integration of a class of Linear partial differential equations by means of definite integrals [A]. In: Ibragimov N H Ed. CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations[C]. Vol. 2, Boca Raton: CRC Press, 1994, 473-508. (Translation by Ibragimov N H of Arch for Math, Bd. VI, Heft 3, 328-368, Kristiania 1881).

[13] Gazeau J P, Winternitz P. Symmetries of variable coefficient Korteweg-de Vries equations[J]. J Math Phys, 1992, **33**(12): 4087-4102.

[14] G ng r F, Lahno V I, Zhdanov R Z. Symmetry classification of KdV-type nonlinear evolution equations [J]. J Math Phys, 2004, **45**(6): 2280-2313.

[15] Basarab-Horwath P, Lahno V, Zhdanov R. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations[J]. Acta Applicandae Mathematicae, 2001, **69**(1): 43-94.

[16] Bluman G, Temuerchaolu, Sahadevan R. Local and nonlocal symmetries for nonlinear telegraph equation[J]. J Math Phys, 2005, **46**(2): 023505.

[17] QU Chang-zheng. Allowed transformations and symmetry class of variable-coefficient Burgers equations[J]. IMA J Appl Math, 1995, **54**(3): 203-225.

[18] HUANG Ding-jiang, Ivanova N M. Group analysis and exact solutions of a class of variable coefficient nonlinear telegraph equations[J]. J Math Phys, 2007, **48**(7): 073507.

[19] Zhdanov R Z, Lahno V I. Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source [J]. J Phys A: Math Gen, 1999, **32**: 7405-7418.

[20] Lahno V I, Zhdanov R Z. Group classification of nonlinear wave equations[J]. J Math Phys, 2005, **46** (5): 053301.

[21] Lahno V I, Zhdanov R Z, Magda O. Group classification and exact solutions of nonlinear wave equations[J]. Acta Appl Math, 2006, **91**(3): 253-313.

[22] Zhdanov R Z, Lahno V I. Group classification of the general evolution equation: Local and quasilocal symmetries[J]. Symmetry Integrability and Geometry: Methods and Applications, 2005, **1**: 009.

[23] 黄定江. 非线性波、几何可积性与群分类[D]. 博士学位论文, 大连:大连理工大学, 2007.

[24] Basarab-Horwath P, Gungor F, Lahno V. Symmetry classification of third-order nonlinear evolution equations[Z]. arXiv, 2008, nlin. SI-0802. 0367v1: 1-73.

[25] Gagnon L, Winternitz P. Symmetry classes of variable coefficient nonlinear Schr dinger equations[J]. J Phys A: Math Gen, 1993, **26**: 7061-7076.

[26] G mez-Ullate D, Lafortune S, Winternitz P. Symmetries of discrete dynamical systems involving two species[J]. J Math Phys, 1999, **40**(6): 2782-2804.

[27] Gungor F, Winternitz P. Generalized Kadomtsev-Petviashvili equation with an infinite dimensional symmetry algebra[J]. J Math Anal Appl, 2002, **276**: 314-328.

[28] Levi D, Winternitz P. Symmetries of discrete dynamical systems[J]. J Math Phys, 1996, **37**(11): 5551-5576.

[29] Lafortune S, Tremblay S, Winternitz P. Symmetry classification of diatomic molecular chains[J]. J Math Phys, 2001, **42**(11): 5341-5357.

[30] Zhdanov R Z, Fushchych W I, Marko P V. New scale-invariant nonlinear differential equations for a complex scalar field[J]. Physica D, 1996, **95**(2): 158-162.

[31] Zhdanov R, Roman O. On preliminary symmetry classification of nonlinear Schr dinger equation with some applications of Doebner-Goldin models[J]. Rep Math Phys, 2000, **45**: 273-291.

[32] Lie S. Gesammelte Abhandlungen [M]. Vol **5. Leipzig: Teubner,** 1924.

33] Lie S. Gesammelte Abhandlungen [M]. Vol 6. Leipzig: Teubner, 1927.

Preliminary Group Classification of Quasi-Linear Third Order Evolution Equations

HUANG Ding-jiang, ZHANG Hong-qing

(1. Department of Mathematics, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, P. R. China;

2. Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, P. R. China)

Abstract: Group classification of quasi-linear third order evolution equations is performed by using the classical infinitesimal Lie method, the technique of equivalence transformations and the theory of classification of abstract low-dimensional Lie algebras. It is indicated that there are three equations admitting simple Lie algebras of dimension three. What. s more, all the inequivalent equations admitting simple Lie algebra are nothing but them. Furthermore, it is also shown that there exist two, five, twenty-nine and twenty-six inequivalent third order nonlinear evolution equations admitting one-, two-, three-, and four-dimensional solvable Lie algebras, respectively.

Key words: quasi-linear third order evolution equations; group classification; classical infinitesimal Lie method; equivalence transformations group; abstract Lie algebras