

三轴压缩下岩石/混凝土的 三维细观损伤模型*

任中俊¹, 彭向和¹, 胡 宁^{1,2}, 杨春和¹

(1. 重庆大学 工程力学系, 重庆 400044;

2. 日本东北大学 航天工程系, 仙台 980-8579, 日本)

(郭兴明推荐)

摘要: 考虑三轴压应力作用下的无限大体深埋椭圆形裂纹的变形场, 给出了闭合椭圆形微裂纹的能量释放率. 采用能量平衡方法分析了闭合椭圆形微裂纹的扩展条件, 得到了代表性体积单元中具有任意空间取向的单个闭合椭圆形微裂纹及其扩展引起的附加柔度张量. 分析了闭合椭圆形微裂纹的偏折扩展, 得到了微裂纹偏折扩展引起的附加柔度张量. 采用 Taylor 方法考虑微裂纹系统对代表性体积单元变形的影响, 引入概率密度函数, 得到了三轴压缩下岩石/混凝土的三维细观损伤模型. 分析了混凝土的单轴压缩特性, 结果表明该模型能够很好地描述实验现象.

关键词: 椭圆形微裂纹; 裂纹平面扩展; 裂纹偏折扩展; 能量释放率; 细观-宏观损伤模型

中图分类号: O346.5 文献标识码: A

引 言

在材料变形过程中, 微缺陷的形核与发展在材料内部形成细观损伤, 宏观上表现为材料力学性能的劣化. 基于微结构及其演化的损伤模型能较有效地反映材料的损伤及其机理.

微裂纹的扩展与汇合是岩石变形的一种最重要的细观损伤机制, 在基于此机制的变形和损伤行为方面人们已进行了许多研究. Horii^[1]采用自洽方法考虑了钱币形微裂纹的闭合效应和摩擦滑移, Li^[2]基于微裂纹的变形与扩展建立了单轴压缩下岩石材料的二维细观模型, Fanella^[3]基于钱币形微裂纹的变形与扩展建立了三轴压缩下混凝土的三维细观损伤模型, Ju^[4]考虑了钱币形微裂纹之间的强相互作用, Feng 和 Yu^[5-6]基于钱币形微裂纹的扩展区建立了微裂纹扩展区损伤模型.

虽然基于钱币形微裂纹扩展的损伤模型能较方便地说明岩石材料的变形和损伤过程, 但材料内部的微裂纹往往是非圆的, 简单地将其假设为钱币形可能导致模型对真实状态的附加偏离. 从理论上说, 椭圆形微裂纹可以反映从线裂纹到圆形裂纹之间的整个微裂纹过渡区域,

* 收稿日期: 2008-08-17; 修订日期: 2008-12-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10872220, 50725414); 日本科学振兴会资助项目(JSPS L08538)

作者简介: 任中俊(1981—), 男, 四川渠县人, 博士生(E-mail: sea1800@sina.com);

彭向和(1953—), 男, 福建福州人, 教授, 博士生导师(联系人.Tel: + 86-23-65111468; E-mail: xhpeng@cqu.edu.cn).

能更全面和完整地体现微裂纹系统的细观特征. 为了使所建立的模型能真实地反映材料的微结构特性, 本文基于无限大基体深埋椭圆形微裂纹的变形场, 得到了在远场三轴压缩应力作用下单个闭合椭圆形微裂纹引起的附加柔度张量, 分析了微裂纹的扩展条件和偏折扩展. 进而假设微裂纹空间取向随机分布, 采用 Taylor^[7] 方法得到了三轴压缩下岩石/混凝土的三维细观损伤模型.

1 体积单元模型

在宏观物体中选取一代表性体积单元(RVE), 其内部包含有 N 个椭圆形微裂纹. 将体积单元分为基体相和缺陷相两部分(图1), RVE 的应变 ϵ_{ij} 由基体变形引起的平均应变 ϵ_{ij}^0 和微裂纹变形引起的平均应变 ϵ_{ij}^* 两部分构成^[8], 即

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^0 + \epsilon_{ij}^* = \epsilon_{ij}^0 + \sum_{r=1}^N \epsilon_{ij}^{*(r)}, \quad (1)$$

其中

$$\epsilon_{ij}^0 = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \epsilon_{ij}^0(x, y, z) dV, \quad \epsilon_{ij}^{*(r)} = \frac{1}{2V} \int_{s^{(r)}} (u_i^{(r)} n_j^{(r)} + u_j^{(r)} n_i^{(r)}) ds^{(r)}, \quad (2)$$

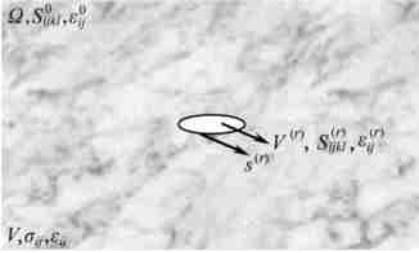


图1 代表性体积单元(RVE)

N 为微裂纹数, V 为 RVE 的体积, Ω 为基体的体积, $\epsilon_{ij}^{*(r)}$ 为第 r 个微裂纹的变形引起的平均应变^[8], $\mathbf{u}^{(r)}$, $\mathbf{n}^{(r)}$ 分别为第 r 个微裂纹面上微元 $ds^{(r)}$ 的位移矢量与外法线单位矢量.

对于微裂纹系统, Kachanov^[9] 认为由于微裂纹间的应力屏蔽作用和应力放大作用两种机制可以相互抵消, 因而微裂纹之间的相互作用对系统变形的影响很小.

本文忽略微裂纹之间的相互作用, 认为微裂纹受到的载

荷即为远场应力 σ_{ij} . 按照 Taylor^[7] 方法, 在对微裂纹的变形进行计算时, 考虑将微裂纹植入无损的弹性基体中, 单个微裂纹引起的附加柔度张量仅与远场应力、基体的弹性常数及微裂纹的尺寸有关.

用 S_{ijkl}^0 表示初始弹性柔度张量, S_{ijkl}^* 表示由微裂纹引起的附加柔度张量, 则

$$\epsilon_{ij}^0 = S_{ijkl}^0 \sigma_{kl}, \quad \epsilon_{ij}^* = S_{ijkl}^* \sigma_{kl}, \quad (3)$$

其中

$$S_{ijkl}^0 = \frac{1+\nu}{2E} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \delta_{kl}. \quad (4)$$

由式(1)和(3)可得

$$\epsilon_{ij} = (S_{ijkl}^0 + S_{ijkl}^*) \sigma_{kl} = S_{ijkl} \sigma_{kl}. \quad (5)$$

设所选取的 RVE 包含足够多的微裂纹, 引入反映材料统计细观结构特性的概率密度函数 ρ , 则 RVE 中的平均应变可由下式确定:

$$\epsilon_{ij}^* = \int_{\Pi} N \rho \epsilon_{ij}^{*(r)} d\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Pi} n_p \rho \int_{s^{(r)}} (u_i^{(r)} n_j^{(r)} + u_j^{(r)} n_i^{(r)}) ds^{(r)} d\Pi \quad (6)$$

式中, $N = \int_V n_p dV$ 为 RVE 中的总微裂纹数, n_p 为 RVE 中的微裂纹密度, Π 为统计空间, ρ 应满足归一化条件

$$\int_{\Pi} \rho d\Pi = 1. \quad (7)$$

2 单个闭合椭圆形微裂纹引起的附加柔度张量

2.1 椭圆形微裂纹的空间取向

将材料内部的微裂纹近似为一椭圆形微裂纹,可通过分析椭圆形微裂纹的演化来分析材料细观损伤的发展. 选取一 RVE, 其中含一深埋椭圆形微裂纹, 可视为无限大基体中一深埋片状椭圆形裂纹. 设该微裂纹长轴为 $2a$, 短轴为 $2b$, 短轴与长轴之比为 $k' = b/a$, 当 $k' = 1$ 时对应于钱币形微裂纹, $k' = 0$ 时对应于线裂纹, 一般应有 $0 < k' < 1$.

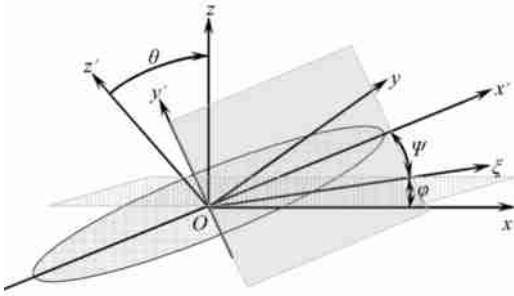


图2 微裂纹的坐标系

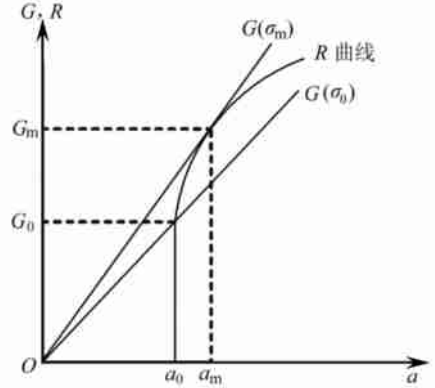


图3 上升的 R 曲线

设微裂纹面的外法线方向的单位矢量为 $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)^T$. RVE 处于复杂应力状态, 对 RVE 建立整体坐标系 $Oxyz$, 如图 2; 同时对该微裂纹建立局部坐标系 $Ox'y'z'$, 微裂纹面中心为坐标原点, 以微裂纹面的外法线方向为 Oz' 轴, 长半轴为 Ox' 轴, 短半轴为 Oy' 轴. 记 Oxy 平面与 $Ox'y'$ 平面的交线为 $O\xi$, Oz' 与 Oz 间的夹角为 θ , Ox 与 $O\xi$ 的夹角为 φ , Ox' 与 $O\xi$ 的夹角为 ψ , 由几何关系可得整体坐标向局部坐标的正交变换矩阵

$$[\beta_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \\ \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\theta\sin\varphi & \cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\cos\theta\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\cos\theta\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\theta\cos\varphi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (8)$$

和局部坐标向整体坐标的正交变换矩阵

$$[\beta'_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \\ \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \end{bmatrix} = [\beta_{ij}]^{-1} = [\beta'_{ij}]^T,$$

于是可以得到转换公式

$$u_i = \beta'_{ij} u'_j = \beta_{ij} u_j, \quad n_i = \beta'_{ij} n'_j = \beta_{ij} n_j = \beta_{3i}. \quad (9)$$

椭圆形微裂纹前缘的曲线方程为

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1. \quad (10)$$

利用应力从整体坐标系向局部坐标系的转换式

$$\sigma'_{ij} = \beta'_{ik} \beta_{kj} \sigma_k, \quad (11)$$

可得远场应力 σ_j 作用下微裂纹承受的局部应力为

$$\sigma'_i = \beta_{3i} \beta_{3j} \sigma'_{ij}, \tau'_{zx'} = \beta_{3i} \beta_{1j} \sigma'_{ij}, \tau'_{zy'} = \beta_{3i} \beta_{2j} \sigma'_{ij}. \quad (12)$$

当 $\sigma'_z < 0$ 时, 微裂纹面出现摩擦效应, 微裂纹的驱动应力^[6]

$$\sigma'_{zx'} = (1 - \mu) \tau'_{zx'}, \sigma'_{zy'} = (1 - \mu) \tau'_{zy'},$$

其中

$$\mu = \begin{cases} 1, & \mu > 1, \\ \mu, & \mu \leq 1, \end{cases} \quad (13)$$

$\mu = -\mu_0 \sigma'_z / \sqrt{\tau'^2_{zx'} + \tau'^2_{zy'}}$, μ_0 为微裂纹面的摩擦因数.

2.2 单个闭合椭圆形微裂纹引起的附加柔度张量

在三轴压缩加载下, 微裂纹在裂纹面上承受远场压-剪应力作用, 微裂纹法向闭合, 法向位移 $u_3^{(r)} = 0$, 微裂纹面上任一点的面内位移^[10-11]

$$u_\alpha^{(r)} = A_{\alpha'\beta'} \sigma_{3\beta'} \sqrt{a^2 - (x'^2 + y'^2/k^2)} \quad (\alpha', \beta' = 1, 2), \quad (14)$$

式中

$$\begin{aligned} A_{11'} &= \frac{\Lambda k^2 k'}{B(k)}, \quad A_{22'} = \frac{\Lambda k^2 k'}{C(k)}, \quad A_{12'} = A_{21'} = 0, \quad \Lambda = \frac{2(1-\nu^2)}{E}, \\ B(k) &= (k^2 - \nu)E(k) + \nu k'^2 K(k), \quad C(k) = (k^2 + \nu k'^2)E(k) - \nu k'^2 K(k), \\ K(k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 r}} dr, \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 r} dr, \quad k = \sqrt{1 - k'^2}, \end{aligned}$$

$K(k)$ 和 $E(k)$ 分别为第一类和第二类完全椭圆积分.

基于 Taylor^[7] 方法, 忽略微裂纹之间的相互作用^[9], 则当 RVE 中含有多个微裂纹时, 对其中心任一个微裂纹, 式(14) 仍然成立.

为简化计算, 将式(2) 的积分区域置于微裂纹的投影面上, 即忽略微裂纹面的曲率, 则

$$\epsilon_{ij}^{(r)} = \frac{1}{V} \int_{s^{(r)}} (\beta_{3j} \beta_{\alpha'i} + \beta_{3i} \beta_{\alpha'j}) u_\alpha^{(r)} ds^{(r)}. \quad (15)$$

将式(14) 代入式(15) 并利用式(11) 可得

$$\epsilon_{ij}^{(r)} = \frac{2\pi k' a^3}{3V} (1 - \mu) \beta_{3k} \beta_{\beta'l} (\beta_{3j} \beta_{\alpha'i} + \beta_{3i} \beta_{\alpha'j}) A_{\alpha'\beta'} \sigma_{\alpha l}. \quad (16)$$

于是单个闭合的椭圆形微裂纹引起的附加柔度张量为

$$S_{ijkl}^{(r)} = \frac{2\pi k' a^3}{3V} (1 - \mu) \beta_{3k} \beta_{\beta'l} (\beta_{3j} \beta_{\alpha'i} + \beta_{3i} \beta_{\alpha'j}) A_{\alpha'\beta'}. \quad (17)$$

2.3 面内扩展后的椭圆形微裂纹引起的附加柔度张量

式(17) 是未扩展的微裂纹引起的附加柔度张量. 当微裂纹的驱动应力较大时, 微裂纹将扩展. 下面分析发生面内扩展后的微裂纹对应的附加柔度张量.

在局部法向压应力和切应力作用时, 裂纹体释放的弹性应变能^[12]

$$U = \int_{s^{(r)}} [\sigma'_{zx'} u_1 + \sigma'_{zy'} u_2] ds^{(r)} = \frac{4\pi(1-\nu^2)}{3E} k'^2 a^3 \left[\frac{k^2 \sigma'^2_{zx'}}{B(k)} + \frac{k^2 \sigma'^2_{zy'}}{C(k)} \right], \quad (18)$$

于是微裂纹前缘的能量释放率

$$G = \frac{dU}{ds^{(r)}} = \frac{2(1-\nu^2)k'a}{E} \left[\frac{k^2 \sigma'^2_{zx'}}{B(k)} + \frac{k^2 \sigma'^2_{zy'}}{C(k)} \right]. \quad (19)$$

设 U_r 为微裂纹扩展所需的能量, 它等于微裂纹的表面能与塑性应变功之和, 则微裂纹扩展阻力率 $R = dU_r/ds^{(r)}$. 当 $G > R$ 时微裂纹扩展, 直到满足新的能量平衡条件, 故由式(19) 可得微裂纹扩展的条件为

$$\frac{2(1-\nu^2)k'a}{E} \left[\frac{k^2\sigma_z^2}{B(k)} + \frac{k^2\sigma_z^2}{C(k)} \right] > R. \quad (20)$$

为计算方便,假设微裂纹发生面内扩展后仍为椭圆形,具有统计长半轴 a_1 , 统计短长轴比率 k'_1 . 扩展后的微裂纹引起的附加柔度张量的计算方法与 2.2 小节描述的方法相同,只需将 2.2 小节中的 k' , a 分别置换为 k'_1 , a_1 . 若微裂纹的扩展为自相似扩展,即 $k'_1 = k'$, 则与扩展后闭合微裂纹对应的附加柔度张量为

$$S_{jkl}^{(r')} = \frac{2\pi k'_1 a_1^3}{3V} (1-\mu) \beta_{3k} \beta_{3l}' (\beta_{3j} \beta_{3i} + \beta_{3i} \beta_{3j}) A_{\alpha\beta}'. \quad (21)$$

故微裂纹面内扩展后,任一个椭圆形微裂纹引起的附加柔度张量可统一由下式进行计算:

$$S_{jkl}^{l(r)} = \frac{2\pi k' a^3}{3V} (1-\mu) \beta_{3k} \beta_{3l}' (\beta_{3j} \beta_{3i} + \beta_{3i} \beta_{3j}) A_{\alpha\beta}'. \quad (22)$$

对于未发生扩展的微裂纹,式(22)中的 a' 采用初始尺寸进行计算(令 $a' = a$); 对于发生了扩展的微裂纹,式(22)中的 a' 采用扩展后的尺寸进行计算(令 $a' = a_1$).

由于压缩加载下微裂纹扩展时应力较大,裂纹前缘将会出现一个塑性区,微裂纹失稳扩展前将会有一定的慢稳定扩展, R 将不是一个常数, R 可以用一上升的曲线来表示^[13](如图 3). 图 3 中 $G(\sigma_0)$ 曲线表示 $\sigma = \sigma_0$ 时 G 随 a' 的变化曲线, $G(\sigma_m)$ 曲线表示 $\sigma = \sigma_m$ 时 G 随 a' 的变化曲线, σ_0 , σ_m 分别为微裂纹开始扩展与失稳扩展时的临界应力值, G_0 , G_m 分别为微裂纹开始扩展与失稳扩展时的 R 值. 可以采用一指数函数来近似描述 R

$$R = G_0 + (G_m - G_0) \left(\frac{a' - a_0}{a_m - a_0} \right)^{C_1}, \quad (23)$$

当 $G_0 < G \leq G_m$ 时,微裂纹开始慢稳定扩展, a' 增大,由于 R 随 a' 的增大而增大,若应力不再增大,当 $G = R$ 时满足能量平衡条件,微裂纹停止扩展;若应力继续增大,相应的 G 增大,微裂纹将继续扩展直至满足新的能量平衡条件为止;当 $G > G_m$ 时不能达到新的能量平衡条件,微裂纹失稳扩展. 故在微裂纹慢稳定扩展过程中恒有 $G = R$ ^[13],若已知 R 曲线,则可根据该等式与式(19)和(23)计算微裂纹止裂时的 a' 值即式(22)中的 a' .

2.4 椭圆形微裂纹偏折扩展引起的附加柔度张量

当存在切应力时,微裂纹不再沿原微裂纹面扩展而要发生偏折^[13]. 下面将讨论椭圆形微裂纹的偏折扩展对附加柔度张量的影响.

切应力作用下无限大平板深穿透线裂纹裂尖的能量释放率可以表示为^[13]

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} K_{II}^2 + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2. \quad (24)$$

类似地定义微裂纹前缘任一点 A (图 4) 处的能量释放率

$$G(\phi) = \frac{1-\nu^2}{E} K_{II}^2(\phi) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2(\phi), \quad (25)$$

式中, ϕ 为 OA 与 Ox' 的夹角(图 4), $K_{II}(\phi)$ 和 $K_{III}(\phi)$ 为微裂纹前缘任一点 A 的应力强度因子^[10-11]

$$K_{II}(\phi) = \sqrt{\frac{\pi k' a}{\Phi(\phi)}} k^2 \left[\frac{\tau_{z'y'}}{C(k)} \sin \phi + k' \frac{\tau_{z'x'}}{B(k)} \cos \phi \right],$$

$$K_{III}(\phi) = (1-\nu) \sqrt{\frac{\pi k' a}{\Phi(\phi)}} k^2 \left[k' \frac{\tau_{z'y'}}{C(k)} \cos \phi - \frac{\tau_{z'x'}}{B(k)} \sin \phi \right],$$

$$\Phi(\phi) = \sqrt{\sin^2 \phi + k'^2 \cos^2 \phi}.$$

可以证明

$$G = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\phi) d\phi.$$

微裂纹偏折扩展发生在 $G(\phi)$ 取最大值处, 在该处应有

$$\partial G(\phi) / \partial \phi = 0, \quad \partial^2 G(\phi) / \partial \phi^2 < 0, \tag{26}$$

容易证明微裂纹面初始偏折位置为关于微裂纹面中心对称的两个点, 即式(26)的两个解, 记该方程的解为 ϕ_0 和 $\phi_1 = \phi_0 + \pi$, 对应于使 $G(\phi)$ 取最大值的位置为 A_0 和 A_1 点(如图4)。

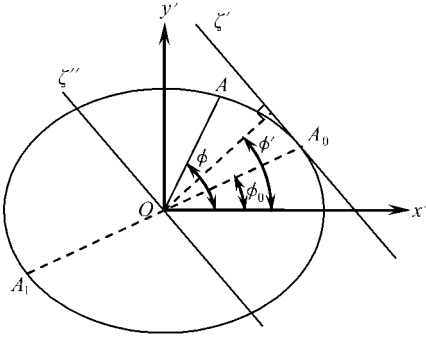


图4 裂纹初始偏折位置

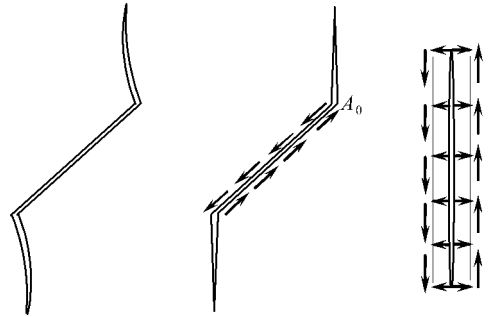


图5 偏折型裂纹的简化处理

Ashby^[14]通过实验发现, 微裂纹偏折扩展时, 首先沿着与轴向压应力方向成一定角度的方向扩展, 然后迅速向轴向压应力方向扩展(如图5(a)所示)。由于尚无法得到偏折型裂纹变形场的解析解, Kachanov^[15]建议采用构造等效裂纹的方法进行近似计算。鉴于发生偏折扩展的微裂纹最终将向轴向压应力的方向扩展^[14, 16], Horii^[1, 16]等将图5(a)所示的弯曲型裂纹等效为图5(b)所示的折线型裂纹。微裂纹在偏折处存在较大的拉伸变形, 微裂纹偏折部分将会产生较大的拉应力和切应力^[17, 6]。为计算方便, 将微裂纹偏折部分近似为图5(c)所示的均匀受力状态。偏折型裂纹的变形由两部分组成, 沿原微裂纹面的切向变形和偏折方向的法向和切向变形。假设材料处于三轴加载下, 以 Oz 为轴压方向, 过初始偏折点 A_0 作微裂纹前缘的切线 $A_0\xi'$ (如图4), 令 $O\xi''$ 与 $A_0\xi'$ 平行, 微裂纹的偏折部分在 $Oz\xi''$ 平面上的投影可近似为椭圆形。由于微裂纹会迅速向轴向压应力方向扩展, 故假设微裂纹偏折部分与轴向压应力方向相同^[17, 6] (图5(b)), 设微裂纹偏折部分长半轴为 a_2 , 短长轴之比为 k_2 , 以 Oz 为长半轴方向。对偏折裂纹建立局部坐标系 $Ox''y''z''$, 以长半轴方向为 Ox'' 轴, Oy'' 与 Ox'' 在 $Ox''\xi''$ 面内垂直, Oz'' 与 $Ox''y''$ 面垂直, 由几何关系可得 $Oxyz$ 向 $Ox''y''z''$ 的正交转换矩阵为

$$[\beta''_{i'i}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_i''}{\partial x_i} \\ \frac{\partial y_i''}{\partial x_i} \\ \frac{\partial z_i''}{\partial x_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & 0 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{27}$$

其中

$$\omega_1 = [-\cos \varphi \sin(\phi' + \phi) - \cos \theta \sin \varphi \cos(\phi' + \phi)] / (\sin \varphi'),$$

$$\omega_2 = [-\sin \varphi \sin(\phi' + \phi) + \cos \theta \cos \varphi \cos(\phi' + \phi)] / (\sin \varphi'),$$

故 $u_i = \beta''_{i'i} u_i'', \quad n_i = \beta''_{i'i} n_i''.$ (28)

通过上面的简化处理, 容易得到偏折裂纹的远场驱动应力

$$\sigma_3''i'' = \forall E_i'' \alpha \sigma_3'' \alpha + \beta_3''k \beta_3''l \sigma_{kl}, \tag{29}$$

其中

$$[E_i^{\prime\prime\alpha}] = \frac{1}{\sin\varphi} \begin{bmatrix} \sin\theta\sin\phi\sin\varphi & \sin\theta\cos\phi\sin\varphi \\ -\sin\varphi - \sin^2\theta\sin\phi\cos(\varphi + \psi) & \cos\varphi - \sin^2\theta\cos\phi\cos(\varphi + \psi) \\ -\cos\theta\cos\varphi & -\cos\theta\sin\varphi \end{bmatrix},$$

$$y = k_1 a_1^2 / (k_2 a_2^2), \quad \phi = \arctan(\tan\phi_0 / k_1), \quad \psi = \arccos[\sin\theta\cos(\varphi + \psi)].$$

裂纹面内任一点的位移

$$u_i^{\prime\prime} = A_i^{\prime\prime k^{\prime\prime}} \sigma_3^{\prime\prime k^{\prime\prime}} \sqrt{a_2^2 - [x^{\prime\prime 2} + (y^{\prime\prime} / k_2)^2]}, \quad (30)$$

式中

$$A_1^{\prime\prime 1^{\prime\prime}} = \frac{\Lambda k_2^2 k_1^{\prime}}{B(k_2)}, \quad A_2^{\prime\prime 2^{\prime\prime}} = \frac{\Lambda k_2^2 k_2^{\prime}}{C(k_2)}, \quad A_3^{\prime\prime 3^{\prime\prime}} = \frac{\Lambda k_2^{\prime}}{E(k_2)},$$

$$A_i^{\prime\prime k^{\prime\prime}} = 0, \quad i^{\prime\prime} \neq j^{\prime\prime},$$

其中

$$k_2 = \sqrt{1 - (k_2^{\prime})^2}.$$

采用与 2.2 小节相同的方法, 可得椭圆形微裂纹的偏折变形引起的平均应变为

$$\epsilon_{ij}^{\prime(r)} = \frac{2\pi k_2 a_2^3}{3V} (\beta_{3j}^{\prime} \beta_{m^{\prime}i} + \beta_{3i}^{\prime} \beta_{m^{\prime}j}) A_m^{\prime\prime n^{\prime\prime}} [\gamma(1 - \mu) E_n^{\prime\prime\alpha} \beta_{3k}^{\prime} \beta_{a^{\prime}l} + \beta_{3k}^{\prime} \beta_{n^{\prime}l}] \sigma_{kl}, \quad (31)$$

于是椭圆形微裂纹偏折扩展引起的附加柔度张量为

$$S_{jkl}^{\prime(r)} = \frac{2\pi k_2 a_2^3}{3V} (\beta_{3j}^{\prime} \beta_{m^{\prime}i} + \beta_{3i}^{\prime} \beta_{m^{\prime}j}) A_m^{\prime\prime n^{\prime\prime}} [\gamma(1 - \mu) E_n^{\prime\prime\alpha} \beta_{3k}^{\prime} \beta_{a^{\prime}l} + \beta_{3k}^{\prime} \beta_{n^{\prime}l}]. \quad (32)$$

在计算中, 假设所有微裂纹均发生偏折扩展, 其中第 r 个微裂纹的偏折部分长半轴为 $a^{\prime\prime}$, 短长轴之比为 k_2 , 并将式(32)改写为

$$S_{jkl}^{\prime(r)} = \frac{2\pi k_2 a^{\prime\prime 3}}{3V} (\beta_{3j}^{\prime} \beta_{m^{\prime}i} + \beta_{3i}^{\prime} \beta_{m^{\prime}j}) A_m^{\prime\prime n^{\prime\prime}} [\gamma(1 - \mu) E_n^{\prime\prime\alpha} \beta_{3k}^{\prime} \beta_{a^{\prime}l} + \beta_{3k}^{\prime} \beta_{n^{\prime}l}], \quad (33)$$

对于未发生偏折扩展的微裂纹, $a^{\prime\prime} = 0$; 对于发生了偏折扩展的微裂纹, $a^{\prime\prime} = a_2$.

3 统计本构模型与验证

式(6)中的概率密度函数可表示为 $\rho = \rho(a, k', \theta, \varphi, \psi)$, 表示具有特征尺寸为 (a, k') , 空间取向为 (θ, φ, ψ) 的微裂纹在选取的空间中的概率密度, ρ 需满足归一化条件^[6]

$$\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} da \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} dk' \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \rho(a, k', \theta, \varphi, \psi) d\psi = 1. \quad (34)$$

一般地可认为具有各种特征尺寸的微裂纹在取向空间中具有相同的分布规律, 于是概率密度函数可表示为 $\rho = g_1(a) g_2(k') f(\theta, \varphi, \psi)$, g_1, g_2, f 应分别满足归一化条件

$$\begin{cases} \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} g_1(a) da = 1, & \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} g_2(k') dk' = 1, \\ \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi, \psi) d\psi = 1. \end{cases} \quad (35)$$

若微裂纹在取向空间中随机分布, 则 $f = 1/(2\pi^2)$.

由式(3)和式(6), 微裂纹系统引起的附加柔度张量可表示为

$$S_{jkl}^* = n\rho V \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} da \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} dk' \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \rho S_{jkl}^{\prime(r)} d\psi, \quad (36)$$

故

$$S_{jkl}^* = n\rho V \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} da \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} dk' \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \rho (S_{jkl}^{\prime(r)} + S_{jkl}^{\prime(r)}) d\psi, \quad (37)$$

式中, $S_{ijkl}^{1(r)}$ 和 $S_{ijkl}^{2(r)}$ 分别由式(22)和式(33)计算.

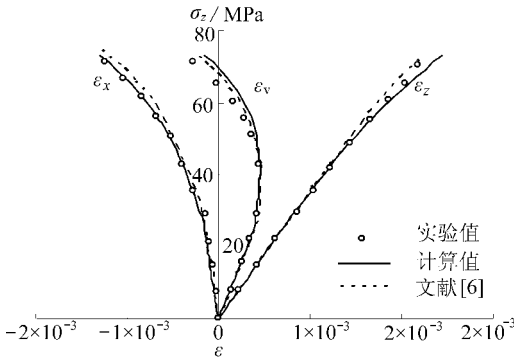


图6 单轴压缩应力应变曲线

为验证本文模型的有效性,对文献[6]中的混凝土单轴压缩实验结果进行了计算.为计算方便,微裂纹尺寸取平均值,微裂纹扩展后短长轴比率不变,式(33)中 a'' 由下式近似表示:

$$a'' = a_k \left(\frac{a' - a_0}{a_m - a_0} \right)^{C_2}$$

材料参数见表1,细观参数由 Ju^[18] 的有关结果转换得到.本文计算中以压为正,计算结果见图6,图中3组曲线分别表示轴向应变 ϵ_x , 侧向应变 ϵ_y , 体积应变 ϵ_v 与轴向应力 σ_z 的变化关系,其中圆点为实验结果,实线为本文计算结果,虚线为

Feng^[6] 的计算结果,与实验数据进行比较,表明本文模型能够很好地描述实验结果.

表1 材料常数

E/GPa	ν	n/mm^3	a_0/mm	a_m/mm	a_k/mm	k', k_2	μ_0	C_1	C_2	$G_0/(N/m)$
45	0.15	4.8×10^{-3}	5.0	6.9	10.5	0.9	0.3	1	0.5	12.2

4 结 论

- 1) 考虑微裂纹面的摩擦效应,基于无限大基体深埋椭圆形裂纹的变形,得到了RVE中具有任意空间取向的单个闭合椭圆形微裂纹引起的附加柔度张量.
- 2) 分析了远场三维压缩应力作用下闭合椭圆形微裂纹的能量释放率及其扩展条件,得到了闭合椭圆形微裂纹扩展引起的附加柔度张量.讨论了闭合椭圆形微裂纹的偏折扩展,得到了微裂纹偏折扩展引起的附加柔度张量.
- 3) 采用Taylor方法考虑所有微裂纹引起的附加柔度张量,通过引入概率密度函数,得出了三轴压缩下椭圆形微裂纹系统引起的附加柔度张量.采用本模型分析了混凝土单轴压缩特性,很好地描述了实验结果.

[参 考 文 献]

- [1] Horii H, Nemat-Nasser S. Overall moduli of solids with microcracks: load-induced anisotropy[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1983, 31(2): 155-171.
- [2] Li C L, Nordlund E. Deformation of brittle rocks under compression with particular reference to microcracks[J]. Mechanics of Materials, 1993, 15(3): 223-239.
- [3] Fanella D, Krajcinovic D. A micromechanical damage model for concrete in compression[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1988, 29(1): 49-66.
- [4] Ju J W. On two-dimensional self-consistent micromechanical damage models for brittle solids[J]. International Journal of Solids and Structures, 1991, 27(2): 227-258.
- [5] Feng X Q, Yu S W. A new damage model for microcrack weakened brittle solids[J]. Acta Mechanica Sinica, 1993, 9(3): 251-260.
- [6] Yu S W, Feng X Q. A micromechanics based damage model for microcrack-weakened brittle solids[J]. Mechanics of Materials, 1995, 20(1): 59-76.
- [7] Krajcinovic D. Damage mechanics[J]. Mechanics of Materials, 1989, 8(2): 117-197.
- [8] Ju J W, Chen T M. Effective elastic moduli of two-dimensional brittle solids with interacting micro-

- racks—part I: basic formulations[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1994, **61**(2): 349-357.
- [9] Kachanov M. Effective elastic properties of crack solids, critical review of some basic concepts[J]. *Applied Mechanics Review*, 1992, **45**(7): 304-335.
- [10] Kassir M K, Sih G C. Three dimensional stress distribution around an elliptical crack under arbitrary loading[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1966, **33**(3): 601-611.
- [11] Kassir M K, Sih G C. Three dimensional crack problems[A]. In: Sih G C, Ed. *Mechanics of Fracture* [C]. Leyden: Noordhoff International Publishing, 1975, 382-409.
- [12] Budiansky B, O'connell R J. Elastic moduli of a cracked solid[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1976, **12**(1): 81-95.
- [13] 丁遂栋, 孙利民. 断裂力学[M]. 北京: 机械工业出版社, 1997.
- [14] Ashby M F, Hallam S D. The failure of brittle solids containing small cracks under compressive stress state[J]. *Acta Metallurgica*, 1986, **34**(3): 497-510.
- [15] Kachanov M. A microcrack model of rock inelasticity[J]. *Mechanics of Materials*, 1982, **1**(1): 19-41.
- [16] Horii H, Nemat-Nasser S. Brittle failure in compression: splitting, faulting, and brittle-ductile transition[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, 1986, **319**(1549): 337-374.
- [17] Li H B, Zhao J, Li T J. Micromechanical modelling of the mechanical properties of a granite under dynamic uniaxial compressive loads[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2000, **37**(6): 923-935.
- [18] X Lee, Ju J W. On three-dimensional self-consistent micromechanical damage models for brittle solids—part II: compressive loadings[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1991, **117**(7): 1515-1536.

Micromechanical Damage Model for Rocks and Concretes Under Triaxial Compression

REN Zhong-jun¹, PENG Xiang-he¹, HU Ning^{1,2}, YANG Chun-he¹

(1. Department of Engineering Mechanics, Chongqing University,
Chongqing 400044, P. R. China;

2. Department of Aerospace Engineering, Tohoku University, Sendai 980-8579, Japan)

Abstract: Based on the analysis of the deformation in an infinite isotropic elastic matrix containing an embedded elliptic crack, subject to far field triaxial compressive stress, the energy release rate and a mixed fracture criterion were obtained by using an energy balance approach. The additional compliance tensor induced by a single closed elliptic microcrack in a representative volume element and its in-plane growth was derived. The additional compliance tensor induced by the kinked growth of the elliptic microcrack was also obtained. The effect of the microcracks, randomly distributed both in geometric characteristics and orientations, was analyzed with the Taylor's scheme by introducing an appropriate probability density function. A micromechanical damage model for rocks and concretes under triaxial compression was obtained and experimentally verified.

Key words: elliptic microcrack; in-plane growth; kinked growth; energy release rate; micro-macro damage model