

交通流瓶颈效应的运动学描述

张 鹏¹, 吴冬艳¹, 黄仕进², 陶亦舟¹

(1. 上海大学 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;
2. 香港大学 土木工程系, 香港)

(戴世强推荐)

摘要: 采用一个推广的 LWR 模型研究交通瓶颈效应. 通过求解流通量间断的 Riemann 问题, 得到关于模型解结构的解析结果, 由此导出了描述在瓶颈上游车流的排队现象及其队列长度和高度 (密度) 的一个典型解, 并能够构造模型方程的一种 β -映射算法. 更有意义的是, 表明了通过采用三角形基本图, 这一运动学模型能够描述时走时停波. 通过数值模拟, 验证了数值结果与解析结果的一致性, 从而支撑了文章的理论结果.

关键词: LWR 模型; 间断流通量; β -映射算法; 时走时停波
中图分类号: TB126 **文献标识码:** A

引 言

本文对于交通流密度波的传播性质的研究是基于如下推广的 LWR 模型^[1-7]:

$$(a)_t + (abq_e(\cdot))_x = 0 \quad (1)$$

以描述道路上瓶颈效应, 模型强调了道路情况的非均匀性. 这里, ρ 表示一个车道上的车流密度, a 表示车道数, b 表示局部最大车速 $v_m(x, t)$ 和整体最大车速 $v_f = \max_{(x, t)} v_m(x, t)$ 之间的比率. a 和 b 也被称为交通控制函数. 由于它们可以随时间和空间变化, 所以也被称为非均匀性参数. 此外, 对于任意给定的 (x, t) 以及阻塞密度 ρ_{jam} , 模型假设车辆速度和密度之间满足如下速度-密度关系: $v_e(\rho) = q_e(\rho)/\rho$, 并且满足: $v_e(0) = v_f$ 和 $v_e(\rho_{\text{jam}}) = 0$. 这同时隐含 $q_e(0) = q_e(\rho_{\text{jam}}) = 0$.

方程 (1) 表明, 尽管交通流很大程度受到道路或者网络中非均匀参数的影响, 这一模型可以很好地解释和再现许多复杂的交通现象. 这里所指的非均匀因素通常是指道路上几何或物理性质的变化, 这些变化导致通行能力下降并对到达车流形成交通瓶颈. 例如在斜坡、隧道、弯道, 或者在发生交通事故之后, 只要导致车道数 a 或者比率 b 的减少, 都能产生瓶颈效应. 广义地讲, 瓶颈效应也可由某些特殊的个人驾驶行为或精神因素所导致. 当交通分布达到一定密度量时, 在瓶颈上游会形成车辆排队现象, 导致交通拥堵甚至堵塞. 交通信号灯也可以作为交通瓶颈的典型实例进行描述, 其瓶颈效应是通过参数 b 来实现的: 红灯时设置 $b = 0$, 从而

收稿日期: 2008-10-14; 修订日期: 2009-02-13

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70629101; 10771134); 国家重点基础研究发展计划资助项目(2006CB705500); 香港研究资助局项目(HKU7183/08E)

作者简介: 张鹏(1963), 男, 云南个旧人, 教授, 博士(联系人). E-mail: pzhang@mail.shu.edu.cn.

使停车线附近通行能力变为 0; 绿灯时设置 $b = 1$, 从而使通行能力恢复为正常值

通过采用三角形基本图 $q_e(\cdot)$, 该模型可以模拟向上游传播的交通堵塞现象, 这是本文更有意义的结果 这一现象是通过通常所用的严格凹基本图无法模拟得到的 这是因为采用严格凹基本图时, 形成堵塞的下游波阵面(稀疏波波尾)在传播中将超过上游波阵面(激波), 从而使堵塞消散 应用三角形基本图时, 所有非线性的稀疏波以及部分激波都会退化成为线性波 这样一来, 当堵塞形成并将瓶颈效应移除时, 可以形成同步的一个加速波和一个减速波, 从而使这两个波中间的拥堵区域能够保持形状并向上游移动 只要上游的来流量不减少, 形成的拥堵就不会消散 类似结果由 Lin 和 Lo^[8]通过数值模拟得到, 本文则对这一重要结果给出了解析的表述

上述机制清楚地解释了拥堵和时走时停波的形成过程 事实上, 这一问题 是适定的, 而且这些波的解的结构也很容易得到 这使得许多复杂交通现象可以在特定参数下给出确定性描述, 并与观察到的现象进行比较 相比高阶模型^[9-15]通过自驱动性和亚稳态机制来解释所谓 幽灵阻塞 现象, 本文的方法显得更为简洁明了 模型方程(1)的运动学描述以及建模理念很容易被推广应用到路网交通流模型

本文第 1 节将阐述模型 Riemann 问题的解结构, 在第 2 节给出几个典型形式的解 在周期边界条件下, 本文讨论了这些解中用于评估路段交通状态的特征参数, 由此可以预测非耗散性阻塞的产生 从宏观的角度, 这种预测可以作为道路通行能力设计及交通管理方面的参考标准 第 3 节给出数值模拟算例, 第 4 节总结了本文主要结论

1 Riemann 问题的解结构

假定 $\mathbf{u} = (a, b)$, $u = a$, $f(u, \cdot) = abq_e(u/a)$, 方程(1)可以表示为以下标准形式:

$$u_t + f(u, \cdot)_x = 0 \tag{2}$$

假定 只依赖于 x , 我们考察如下的 Riemann 问题:

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_L, & x < 0, \\ u_R, & x \geq 0, \end{cases} \quad (\mathbf{u}) = \begin{cases} L, & x < 0, \\ R, & x \geq 0, \end{cases} \tag{3}$$

其中 $L = (a_L, b_L)$, $R = (a_R, b_R)$ 如果涉及交通信号灯和移动瓶颈, $b(x, t)$ 可以与 t 有关, 需做特殊处理 对于严格凹的流量函数 $q_e(\cdot)$, 其中 $q_e(\cdot) < 0$, $q_e(\cdot^*)$ 为最大流量^[3], $q_e(\cdot^*) = 0$, 文献[15]给出了由方程(3)表示的 Riemann 问题解的详细讨论 如果定义 $u = u(0, t)$, 那么 Riemann 解的存在性和唯一性可由以下规则保证:

1) 在 $x = 0$ 处满足流量守恒性或 Rankine-Hugoniot 条件: $f(u^-, L) = f(u^+, R)$;

2) 不等式 $f_u(u^-, L)f_u(u^+, R) \leq 0$ 成立 特别地, 当 $f_u(u^+, R) = 0$ 时, $f_u(u^-, L) \leq 0$; 当 $f_u(u^-, L) = 0$ 时, $f_u(u^+, R) \leq 0$ 上述不等式等价于 $(u^- - u^*)(u^+ - u^*) \leq 0$ 特殊地, 当 $u^+ = u^*$ 时, $u^- \leq u^*$; 当 $u^- = u^*$ 时, $u^+ \leq u^*$;

3) 波的传播速度(激波或稀疏波)在 $x < 0$ 和 $x > 0$ 内分别为非正和非负

采用如下分段线性流量函数:

$$q_e(\cdot) = \begin{cases} s_1 \cdot, & \cdot < u^*, \\ q^* + s_2(\cdot - u^*), & \cdot \geq u^*, \end{cases} \tag{4}$$

其中斜率 $s_1 = q^*/u^*$, $s_2 = -q^*/(u_{jam} - u^*)^{-1}$, 上述 3 个规则仍然适用, 只需特别注意以下几

点: 1) 从 $1 [Q^*]$ 到 $2 (\rho^*, \rho_{jam})$ 的激波保持不变; 2) $1 (\rho^*, \rho_{jam})$ 到 $2 (Q^*)$ 的稀疏波退化成两个线性波, 一个从 1 到 ρ^* , 其传播波速为 s_2 , 另一个从 ρ^* 到 2 , 其传播速度为 s_1 ; 3) 其它激波和稀疏波则退化为线性波, 如果 $1, 2 \in [0, \rho^*]$ 则波速为 s_1 , 如果 $1, 2 \in [\rho^*, \rho_{jam}]$ 则波速为 s_2

由以上规则和注释, 我们可以在 f 坐标平面下详细给出 Riemann 问题所有可能的间断分解
图 1 和图 2 中 OMJ 和 ONJ 分别表示流量函数 $f = f(a_L, L)$ (当 $x < 0$ 时) 和 $f = f(a_R, R)$ (当 $x > 0$ 时), 且 $L = u_L/a_L, R = u_R/a_R$

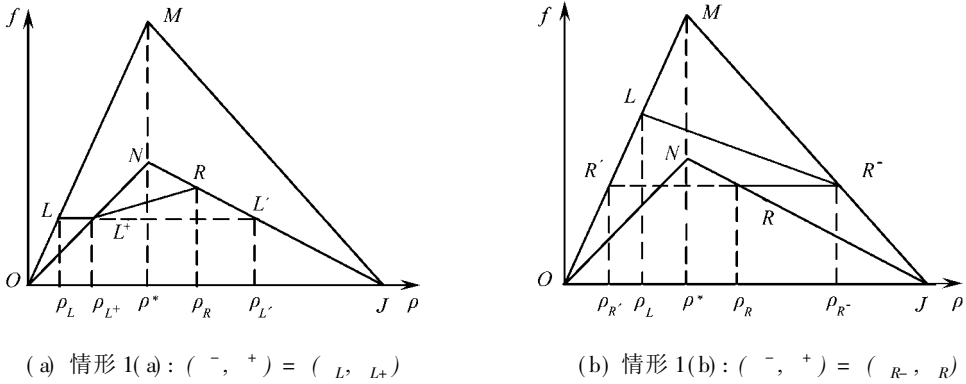


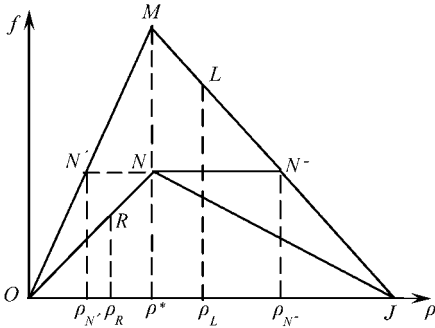
图 1 与严格双曲性有关的两种间断分解模式

情形 1(a) 假设 $L < \rho^*$ 当 $R > \rho^*$ 且 $f(u_L, L) < f(a_R, \rho^*, R)$, 或者当 $R > \rho^*$ 且 $f(u_L, L) > f(u_R, R)$ 时, 可以从点 $L(\rho_L, f(a_L, L))$ 作一条水平线与线段 ON 和线段 NJ 分别相交于点 $L^+(\rho_{L^+}, f(a_R, \rho_{L^+}, R))$ 和 $L(\rho_L, f(a_R, \rho_L, R))$ (如图 1(a)) 其中交点 $\rho_{L^+} < \rho^*$, $\rho_L > \rho^*$ 可由 $f(a_R, \rho_{L^+}, R) = f(a_R, \rho_L, R) = f(u_L, L)$ 唯一确定, 而 $\rho_R < \rho_L$ 由假设隐含
对于这种情况, 由规则 1 和 2 可设定 $\rho^- = \rho_L$ 和 $\rho^+ = \rho_{L^+}$ 这样可得到两个波: 一个波以速度 $s = s_{LL^+}/a_R = 0$ 沿路径 LL^+ 穿过界面 $x = 0$; 另一个波在 $x > 0$ 区域以速度 $s = s_{L^+R}/a_R > 0$ 沿路径 L^+R 传播 类似地, 如果波的传播在 $x > 0$ (或 $x < 0$) 区域, 后文中所有涉及线段 XY 所对应的波速均等于 s_{XY}/a_R (或 s_{XY}/a_L) 上述关系由 Rankine-Hugoniot 条件所得

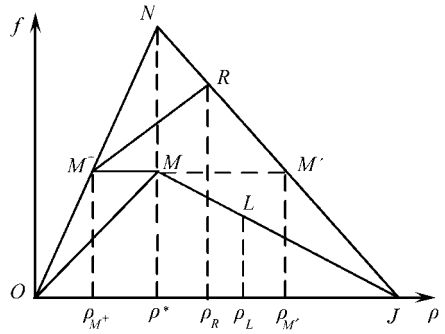
情形 1(b) 假设 $R > \rho^*$ 此时当 $L < \rho^*$ 且 $f(u_R, R) < f(a_L, \rho^*, L)$, 或者当 $L < \rho^*$ 且 $f(u_R, R) < f(u_L, L)$ 时, 可以从点 $R(\rho_R, f(a_R, R, R))$ 作一条水平线与线段 MJ 、 OM 分别相交于点 $R^-(\rho_R^-, f(a_L, \rho_R^-, L))$ 和 $R(\rho_R, f(a_L, \rho_R, L))$ (如图 1(b)) 对于这种情况, 我们有 $\rho_L > \rho_R$, 且设定 $\rho^+ = \rho_R$ 和 $\rho^- = \rho_R^-$, 其讨论与情况 1(a) 类似, 并得到两个波 其中一个波以速度 $s = 0$ 沿路径 RR^- 穿过 $x = 0$, 另一个波在区域 $x < 0$ 内以速度 $s = s_{R^-L}/a_L < 0$ 沿路径 R^-L 传播

上述间断分解模式的特点是满足 $f_u(u^-, L)f_u(u^+, R) > 0$, 并服从规则 3) 在每种分解模式中只包含两个波, 这对应方程(2)为严格双曲的情形 对于以下两种情况, 我们分别假定 $f_u(u^+, R) = 0$ 和 $f_u(u^-, L) = 0$, 这对应方程(2)为非严格双曲的情形, 其中每一种间断分解模式得到 3 个波^[3,4,16]

情形 2(a) 当 $f_u(u^+, R) = 0$ (或 $\rho^+ = \rho^*$) 时, 必有 $f_u(u_R, R) = 0$ (或 $R = \rho^*$) 这时有 $L < \rho^*$ 且 $f(u_L, L) < f(a_R, \rho^*, R)$; 或 $L < \rho^*$ 且 $f(a_L, \rho^*, L) > f(a_R, \rho^*, R)$ 其间断



情形 2(a): $(\bar{\rho}, \rho^+) = (\rho_{N^-}, \rho^*)$



情形 2(b): $(\bar{\rho}, \rho^+) = (\rho_{M^+}, \rho^*)$

图 2 与非严格双曲性相关的两种间断分解模式(每种模式包含 3 个波)

分解是从点 N 作一条水平线与线段 OM 、 MJ 分别交于点 N 、 N^- (如图 2(a)) 这时取 $\bar{\rho} = \rho_{N^-} > \rho^*$, 得到 $f_u(u^-, L) < 0$, 从而满足规则 3) $\bar{\rho} = \rho_{N^-}$ 和 $\rho^+ = \rho^*$ 给出了通过间断面 $x = 0$ 的传播, 路径为 N^-N 由于显然有 $L < N$, 在区域 $x < 0$ 内可以形成速度为 $s = s_{LN^-}/a_L < 0$ 且路径为 LN^- 的传播 与此同时, 在区域 $x > 0$ 内可以形成另一个以速度 $s = s_{LN^-}/a_R > 0$ 且路径为 NR 的传播

情形 2(b) 当 $f_u(u^-, L) = 0$ (或 $\bar{\rho} = \rho^*$) 时, 必有 $f_u(u_L, L) = 0$ (或 $L = \rho^*$) 这时有 $\rho_R > \rho^*$ 且 $f(u_R, R) = f(a_L \rho^*, L)$; 或 $\rho_R < \rho^*$ 且 $f(a_R \rho^*, R) = f(a_L \rho^*, L)$ 其间断分解是从点 M 作一条水平线与线段 ON 、 NJ 分别相交于点 M^+ 、 M 由于显然有 $\rho_R < M$, 可以取 $\rho^+ = \rho_{M^+}$ 这样就可以形成 3 个波: 分别沿路径 LM 在区域 $x < 0$ 内传播, 沿路径 MM^+ 通过间断面 $x = 0$, 沿路径 M^+R 在区域 $x > 0$ 内传播, 其速度为 $s = s_{LM}/a_L < 0$, $s = 0$ 和 $s = s_{M^+R}/a_R > 0$

2 与瓶颈效应有关的几个典型解

为研究路段 $[0, L]$ 上的瓶颈效应, 假设 CD 表示子路段 $(x_C, x_D) \subset [0, L]$, 在此路段通行能力下降, 即

$$= \begin{cases} b_B, & x \in (x_C, x_D), \\ 0, & x \in [0, x_C] \cup [x_D, L], \end{cases} \quad (5)$$

其中 $b_B = (a_B, b_B)$, $0 = (a_0, b_0)$, 且 $a_B b_B < a_0 b_0$

2.1 瓶颈区域的定常态解

对于方程(5)所描述的瓶颈, 我们可以构造如下定常态解:

$$u(x, t) = u(x) = \begin{cases} \bar{N}, & x_E < x < x_C, \\ \rho^*, & x_C < x < x_D, \\ \rho_N^+, & \text{其它}, \end{cases} \quad (6)$$

其中 $x = x_E, x = x_C, x = x_D$ 为 3 个位置固定不变的间断 在这 3 个间断面上应用规则 1), 可以得到

$$f(a_0 Q_N^+, H_0) = f(a_0 Q_N^-, H_0), f(a_0 Q_N^-, H_0) = f(a_B Q^*, H_0), \\ f(a_B Q^*, H_0) = f(a_0 Q_N^+, H_0)$$

由规则 2) 可知 $Q_N^+ < Q^*$ 和 $Q_N^- > Q^*$, 结合图 1 和图 2 中的间断分解模式, Q_N^+, Q_N^- 可以被唯一确

定:

$$Q_N = CQ^*, Q_N = (B(1 - C) + C) Q^* \quad (7)$$

其中 $C = (a_{BB}) / (a_{0b_0}) < 1$, $B = Q_m / Q^* > 11$ 我们称 C 为瓶颈系数, 用来衡量 $x = x_c$ 处道路通行能力的下降程度 $1 N$ 为路段上总车辆数, l_B 为瓶颈区域 CD 的长度, l_Q 为排队队列 EC 的长度, 它们满足如下关系:

$$N = a_0 l_Q Q_N + a_B l_B Q^* + a_0 (L - l_B - l_Q) Q_N \quad (8)$$

相应地, 路段上的平均密度(单车道单位长度)为

$$Q = \frac{N}{a_0(L - l_B) + a_B l_B} \quad (9)$$

通过整条路段所需的行驶时间为

$$T = \frac{l_Q}{b_0 v_e(Q_N)} + \frac{l_B}{b_B v_e(Q^*)} + \frac{L - l_B - l_Q}{b_0 v_e(Q_N)}$$

上式也可以表示为

$$T = \frac{l_Q(s_1 - s_2)(1 - r)(B - 1)}{b_0 s_1(s_1 - s_2 + s_2(B(1 - r) + r))} + \frac{l_B(b_0 - b_B)}{s_1 b_0 b_B} + \frac{L}{b_0 s_1} \quad (10)$$

在这些关系式中我们需要假设 $l_Q > 0$ 当 $l_Q = 0$ 时, 从方程(8) 和(9) 可以得到 N 和 Q 的阈值

$$N_0 = a_B l_B Q^* + a_0(L - l_B) Q^*, Q_0 = \frac{N_0}{a_0 L + a_B l_B} \quad (11)$$

这就意味着我们需假设 $N > N_0$ (或 $Q > Q_0$) 以保证方程(6) 解的有效性 1 由方程(6) 可以确定排队队列长度:

$$l_Q = \frac{N - N_0}{a_0(Q_N - Q^*)} l \quad (12)$$

在周期边界条件下, 给定总车辆数 $N > N_0$, 任意一种初始分布最终都会演化为方程(7) ~ (12) 所确定的定常态解 1 这一结论可以通过界面追踪方法给出数学证明(此方法的详细讨论参考文献[17-19] 及相关文献), 本文在第3 节通过数值算例给以验证 1 当车辆总数 $N \ll N_0$ 时, 可以形成没有拥堵的理想交通状态 1 从宏观角度看, 如果能够通过实测给出合理的阈值 N_0 和其他相关参数, 上述理论对交通路网的预估和设计有积极意义 1

2.2 行波解

假设路段上不存在瓶颈, 即 $H(x) S H$ 为常数 1 我们很容易给出如下的行波解:

$$Q(x, t) = Q(x - s_m t) = \begin{cases} Q_m, & x_{c_1} < x - s_m t < x_{c_2} \\ Q^*, & \text{其它,} \end{cases} \quad (13)$$

其中 $Q_m > Q^*$ 1 由图1(或图2) 可以推导出行波速度为 $s_m = b_0 s_2 < 0$ 1 若给定路段上总车辆数为 N , 则向后传播的队列长度由 $x_{c_2} - x_{c_1}$ 表示, 由下式计算

$$l_m = \frac{N - N_0}{a_0(Q_m - Q^*)} \quad (14)$$

其中 $N_0 = a_0 L Q^*$ 1 为确保行波解(13) 的存在, 需要假设 $0 < l_m \ll L$, 等价于

$$a_0 L Q^* < N \ll a_0 L Q_m \quad (15)$$

对 $x = 0$ 处的车辆, 驶过路段 $[0, L]$ 的时间由下式计算:

$$T = \frac{L - l_m}{b_0 v_e(Q^*)} + \frac{l_m}{b_0 v_e(Q_m) - s_m} = \frac{L}{b_0 s_1} + \frac{N - a_0 L Q^*}{a_0 b_0 s_1} \left[\frac{B - 1}{B Q^*} - \frac{1}{B(Q_m - Q^*)} \right] l \quad (16)$$

由式(14),可知长度 l_m 随车辆总数 N 单调递增,随最大密度 Q_m 单调递减 1 由式(16)可知行驶时间 T 随 N 或 Q_m 单调递增 1 对于给定的 N 和 $Q_m = N/(a_0L) > Q^*$, T 达到其最小值

$$T_{\min} = \frac{L}{b_0s_1} \frac{Q_m}{Q^*} \left(1 - \frac{1}{B}\right) = \left(1 - \frac{1}{B}\right) \frac{N}{b_0s_1 a_0 Q^*} \quad (17)$$

上式对应平凡解 $Q = Q_m, l_m = L$ 当 $Q_m = Q_{am}, T$ 达到最大值

$$T_{\max} = \frac{L}{b_0s_1} + \frac{N - a_0L Q^*}{a_0 b_0 s_1} \frac{B^2 - 2B}{Q^* B(B-1)} = \left(1 - \frac{1}{B}\right) \frac{N}{b_0s_1 a_0 Q^*} + \frac{a_0L Q^* B - N}{B(B-1) b_0s_1 a_0 Q^*}$$

我们指出排队队列 C_1C_2 实际上表示一个车辆集簇,即交通中的时走时停波1

2.3 附加评注

在周期边界条件下,我们给出关于行波解(13)及其与定常态解(6)关系的以下评论1

评注 1 当路段上车辆总数 $N > a_0L Q^*$ 时,那么任意一个初始分布 $Q(x, 0) = Q(x)$ 最终都会演化成由式(13)所描述的行波解,且满足 $Q_m \in [\max_{0 \leq x/L \leq 1} Q(x), 1]$ 此情形下,通常有 $Q_m = \max_{0 \leq x/L \leq 1} Q(x)$ 1 反之,如果 $N \leq a_0L Q^*$,那么初始分布最终将演化为平凡解 $Q(x, t) = N/(a_0L) \in [Q^*, 1]$ 这一结论同样可以由界面追踪法证明^[17-19],本文在第3节通过一个数值算例加以验证1

评注 2 时走时停波的形成与瓶颈效应之间是有关联的1当瓶颈区域 CD 存在且系数 C 足够大时,由方程(6)的描述,在区域 CD 上游可产生排队队列,其密度为 $Q_m > Q^*$ 1 若在 $t = t_0$ 时将瓶颈效应移除,则拥堵队列的下游波阵面 $x = C$ 开始向后移动并形成时走时停波 1 当车辆总数 $N > N_0 = a_0L Q^*$ 时,由评注1可知,交通演化最终会形成由式(13)所描述的时走时停波 1 否则,将得到平凡解 $Q(x, t) = N/(a_0L) \in [Q^*, 1]$ 这些结论同样可由界面追踪法证明1

评注 3 评注2所述的可移除瓶颈效应,可归因于交通信号灯等因素,也可能由其它不可控因素所致,如交通事故或其它交通冲突等 1 前一种情况是可控的,从而可以给出确定性描述,后者却是无法预料的 1 因此,流量函数 f 中的 $b(x)$ 可以被描述为一个随机变量,反映不可预料的通行能力下降及其恢复的过程 1 这种随机性假定可以解释高阶或跟车模型所描述的所谓/幽灵式阻塞0现象的形成以及亚稳态/自驱动0机制 1 值得注意的是,所有的 CA 模型都会涉及一些随机性质 1

评注 4 通过对实际现象的观察,由于交通中经常出现各种扰动,使得瓶颈现象的产生不可避免 1 这就意味着平凡解很难持续,尤其是对密度较高的交通,平凡解状态更容易受到交通冲突或扰动的影响,从而导致流量 $f(u)$ 显著下降 1 而在畅行区域($Q < Q^*$)或阻塞区域(Q 接近于 Q_{jam}),平凡解状态受扰动的影响比较小 1 这说明了密度低于 Q^* 或接近 Q_{jam} 的交通流定常解状态是相对/稳定0的 1 这一描述与多数交通流高阶模型理论和实测结果都是一致的 1

评注 5 这一理论也可以解释交通信号灯设置的必要性 1 在红灯周期内,人为形成了一个/可预测的瓶颈0,使车辆在停车线前以密度 $Q = Q_{am}$ 形成排队队列 1 绿灯时,队列下游通行能力恢复使得 $Q = Q^*$ 1 这样,通过信号灯设置避免了前面提到的/不稳定0区域密度的出现 1 合理的信号灯设置应该可以减少交通流随机性,避免交通混乱和交通事故的发生,并增强交通的可预测性和可控性,从而达到优化交通运行的效果^[20] 1

3 数值格式和模拟结果

由 Riemann 精确解(见第1节)确定的,在 $x = 0$ 处的流量值可以表示成向量 (u_L, H) 和

(u_R, H_R) 的函数, 记为 $\hat{f} = \hat{f}(u_L, H_L; u_R, H_R)$ 。这一函数一般被称为 Godunov 型数值流通量函数或准确 Riemann 解, 由此可以构造出一阶 (Godunov 型) 数值格式 1

文献[3-4]提出了一种所谓的 D 映射算法来表达函数 \hat{f} 。由图 1、图 2 所示的间断分解模式不难看出此方法也适用于本文所讨论的模型 1。下面简单描述这一算法。给定如下向量 H_m :

$$H_m = \begin{cases} H_L, & f(a_L Q^*, H_L) < f(a_R Q^*, H_R), \\ H_R, & \text{其它,} \end{cases}$$

其相应的函数 \hat{f} (准确 Riemann 解) 可记为

$$\hat{f}(u_L, H_L; u_R, H_R) = f^G(Du_L, Du_R, H_m) \quad (18)$$

这里, 函数 f^G 表示我们所熟知的 Godunov 流通量, 定义为

$$f^G(v, w, H) = \begin{cases} \min_{u|u|v} f(u, H), & v \leq w, \\ \max_{u|u|v} f(u, H), & v > w \end{cases}$$

以逼近流量函数 $f(u, H)$, 使满足相容性 $f^G(u, u, H) = f(u, H)$ 。对 $H = H_L$ 或 H_R , 定义如下的 1-1 映射 $u \rightarrow Du$:

$$f_u(u, H) f_u(Du, H_m) \leq 0, \begin{cases} f(u, H) = f(Du, H_m), & f(u, H_m) < f(a_m Q^*, H_m), \\ Du = a_m Q^*, & \text{其它,} \end{cases} \quad (19)$$

而且规定

$$\begin{cases} \text{如果 } f_u(u_L, H_L) = 0, \text{ 则 } f_u(Du_L, H_m) \leq 0; \\ \text{如果 } f_u(u_R, H_R) = 0, \text{ 则 } f_u(Du_R, H_m) \geq 0 \end{cases} \quad (20)$$

由 \hat{f} 的定义, 关于方程(2)的一阶 Godunov 数值格式可以写为

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\hat{f}(u_j^n, H; u_{j+1}^n, H_{j+1}) - \hat{f}(u_{j-1}^n, H_{j-1}; u_j^n, H))$$

这里指出, 如将式(18)中的 Godunov 流通量用其它 Riemann 近似解替代, 可以得到相应的格式^[4]; 通过与方程(19)~(20)类似的定义, 也可以将 D 映射算法推广构造高精度格式^[21]。值得注意的是, 最近文献[6]也给出了一组求解类似方程的高分辨数值格式。在以下数值模拟中, 我们将 D 映射算法和标准的五阶有限体 WENO 重构^[22]相结合, 并运用了以上 Godunov 型数值流通量。关于 WENO 在交通流问题中的应用, 可参见近期文献[16, 23]。

设定常数 $Q^* = 0.15 Q_{jam}$, $s_1 = 36 \text{ m/s}$, $L = 2000 \text{ m}$, 且所有图形和表述中的无量纲变量化规定为: Q 除以 Q_{jam} , v 除以最大速度 s_1 , x 除以计算区间长度 L 。

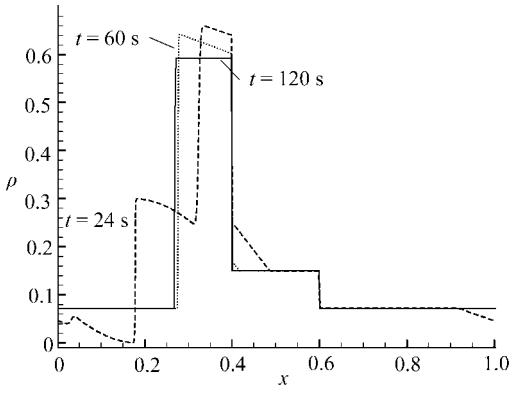
3.1 瓶颈上游可消散和不可消散的排队队列

在式(5)中设定 $x_C = 0.4$, $x_D = 0.6$, $(a_0, b_0) = (1, 1)$, $(a_B, b_B) = (0.8, 0.6)$, 其中 CD 为研究路段上瓶颈区域。由此可以确定式(11)中 $N_0 = 0.081$, 式(7)中 $C = 0.48$, $B = 20/31$ 。

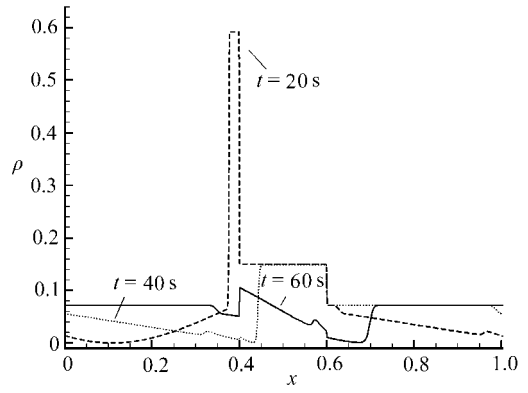
我们假定任意一个密度初始分布:

$$u(x, 0) = N(1.0 + \sin 2\pi x), \quad (21)$$

其中 $0 < x < 1$, N 为车辆总数, 并采用周期边界条件。那么由 2.1 小节(方程(12))的讨论可知, 当 $N > N_0$ 时, 这一分布会演化为式(6)所描述的定常态解, 并可由式(7)算出 $Q_N^+ = 0.072$, $Q_N^- = 0.5921$ 。具体取 $N = 0.15$, 那么由式(12)可进一步算出排队长度 $l_Q \approx 0.15191$ 。当 $N \leq N_0$ 时, 例如取 $N = 0.06$, 那么这一初始分布最终会演化为包括很多畅行流的交通态。这些模



(a) 当 $N = 0.15 > N_0$ 时: 最终可形成固定宽度的排队队列



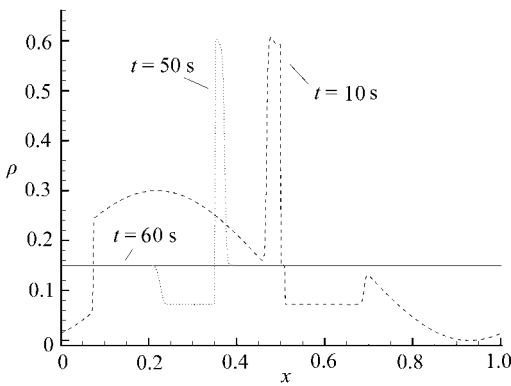
(b) 当 $N = 0.06 < N_0$ 时: 可形成排队队列但在一段时间后消散

图3 任意初试密度分布的演化

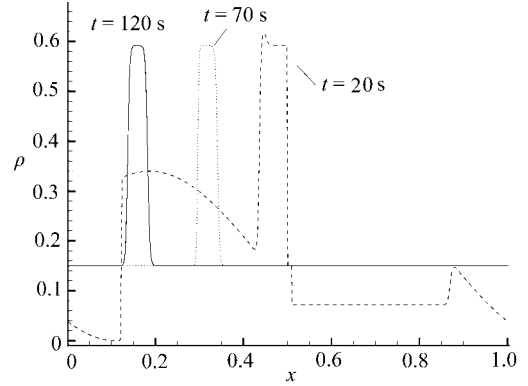
拟结果由图3所示,与前述的解析结果是相符合的¹

3.2 可消散和不可消散的时走时停波

在式(5)中设定 $x_C = 0.5, x_D = 0.51, (a_0, b_0) = (1, 1), (a_B, b_B) = (0.8, 0.6)$, 从而得到研究路段上一个更为狭窄的瓶颈区域¹ 这样瓶颈可能表示交通事故或者对路段可能产生短期影响的某些事件¹ 由2.2小节的讨论,如果条件(15)满足,那么在将瓶颈移除之后可望得到一个不消散的时走时停波¹ 否则,可以观测到一个可消散的时走时停波¹



(a) 若 $N = 0.15 < N_0$, 其中 N_0 由(14)式给出, 演化最终形成平衡态的平凡解



(b) 若 $N = 0.17 > N_0$, 演化最终可形成不消散的时走时停波

图4 移除瓶颈后时走时停波的形成

在式(21)中取 $N = 0.15$, 从而式(15)不成立¹ 那么在 $t = 10$ s 后移除瓶颈可观测到一个可消散的时走时停波, 在 $t = 60$ s 时最终演化为平衡态的平凡解(见图4(a))¹ 在式(21)中取 $N = 0.17$, 从而式(15)成立, 在 $t = 20$ s 时移除瓶颈, 那么在 $t = 70$ s 和 $t = 120$ s 时可形成形状不变的时走时停波(见图4(b))¹ 参看2.3小节中的评注¹和评注²¹ 容易验证描述时走时停波的参数 Q_m 和 l_m 近似满足式(14)¹ 所有这些结论与2.2和2.3小节中的讨论完全吻合¹

4 结 论

我们得到 LWR 模型中流量函数为间断的 Riemann 问题解, 其中流量的间断性描述了

车道数和畅行速度随路段变化¹ 在周期边界条件下,描述了在交通观测中常见的在瓶颈上游排队的形成¹ 当车辆总数超过某一个阈值 N_0 时,可形成持续的车辆排队,其阻塞密度由瓶颈系数 C 确定,其长度由 C 和 $N - N_0$ 确定¹ 我们进一步得出结论,如果采用三角基本图,那么 LWR 模型存在形状固定的时走时停波解,并阐明了这一行波解和瓶颈效应之间的关系¹ 这些结论以及我们的评述对随机模型的发展将有所帮助¹

致谢 本文作者感谢香港大学对本文工作的资助¹

[参 考 文 献]

- [1] Lighthill M J, Whitham G B. On kinematic waves) : a theory of traffic flow on long crowded roads[J]. Proceedings of the Royal Society of London, Series A, 1955, 229(1178): 317-345.
- [2] Richards P I. Shockwaves on the highway[J]. Operations Research, 1956, 4(1): 42-51.
- [3] ZHANG Peng, LIU Ru-xun. Hyperbolic conservation laws with space-dependent flux) : characteristics theory and Riemann problem[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2003, 156(1): 1-21.
- [4] ZHANG Peng, LIU Ru-xun. Hyperbolic conservation laws with space-dependent flux) : general study on numerical fluxes[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2005, 176(1): 105-129.
- [5] ZHANG Peng, LIU Ru-xun. Generalization of Runge-Kutta discontinuous Galerkin method to LWR traffic flow model with inhomogeneous road conditions[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2005, 21(1): 80-88.
- [6] Burger R, Gracia A, Karlsen K H, et al. A family of numerical schemes for kinematic flows with discontinuous flux[J]. Journal of Engineering Mathematics, 2008, 60(3/4): 387-425.
- [7] Burger R, Gracia A, Karlsen K H, et al. Difference schemes, entropy solutions, and speedup impulse for an inhomogeneous kinematic traffic flow model[J]. Network Heterogeneous Media, 2008, 3(1): 1-41.
- [8] Lin W H, Lo H K. A theoretical probe of a German experiment on stationary moving traffic jams[J]. Transportation Research Part B, 2003, 37(3): 251-261.
- [9] Kerner B S, Konhäuser P. Structure and parameters of clusters in traffic flow[J]. Physical Review E, 1994, 50(1): 54-83.
- [10] Greenberg J M. Congestion redux[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2004, 64(4): 1175-1185.
- [11] Siebel F, Mauser W. On the fundamental diagram of traffic flow[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2006, 66(4): 1150-1162.
- [12] Siebel F, Mauser W. Synchronized flow and wide moving jams from balanced vehicular traffic[J]. Physical Review E, 2006, 73(6): 066108.
- [13] Siebel F, Mauser W, Moutari S, et al. Balanced vehicular traffic at a bottleneck[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2009, 49(3/4): 689-702.
- [14] Zhang P, Wong S C. Essence of conservation forms in the traveling wave solutions of higher-order traffic flow models[J]. Physical Review E, 2006, 74(2): 026109.
- [15] Xu R Y, Zhang P, Dai S Q, et al. Admissibility of a wide cluster solution in anisotropic higher-order traffic flow models[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2007, 68(2): 562-573.
- [16] Zhang P, Wong S C, Shu C W. A weighted essentially non-oscillatory numerical scheme for a multi-class traffic flow model on an inhomogeneous highway[J]. Journal of Computational Physics, 2006,

2): 739-756.

- [17] Wong S C, Wong G C K. An analytical shock-fitting algorithm for LWR kinematic wave model embedded with linear speed-density relationship[J]. *Transportation Research Part B*, 2002, 36(8): 683-706.
- [18] Karlsen K H, Risebro N H, Towers J D. Front tracking for scalar balance equations[J]. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 2004, 1(1): 115-148.
- [19] Chen W, Wong S C, Shu C W. Efficient implementation of the shock-fitting algorithm for the Lighthill-Whitham-Richards traffic flow model[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2007, 74(4): 554-600.
- [20] Jiang R, Hu M B, Jia B, et al. Enhancing highway capacity by homogenizing traffic flow[J]. *Transportmetrica*, 2008, 4(1): 51-61.
- [21] Zhang P, Wong S C, Xu Z. A hybrid scheme for solving a multi-class traffic flow model with complex wave breaking[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, 2008, 197(45/48): 3816-3827.
- [22] Shu C W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws[A]. In: Cockburn B, Johnson C, Shu C W, et al., Eds. *Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations [C]*. Vol 1697. *Lecture Notes in Mathematics*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1998, 325-432.
- [23] Zhang M, Shu C W, Wong G C K, et al. A weighted essentially non-oscillatory numerical scheme for a multi-class Lighthill-Whitham-Richards traffic flow model[J]. *Journal of Computational Physics*, 2003, 191(2): 639-659.

K i n e t i c D e s c r i p t i o n o f B o t t l e n e c k E f f e c t s i n T r a f f i c F l o w

ZHANG Peng¹, WU Dong-yan¹, S. C. Wong², TAO Yizhou¹

(1. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Shanghai University, Shanghai 200072, P.R. China;

2. Department of Civil Engineering, The University of Hong Kong,
Hong Kong SAR, P. R. China)

Abstract: The effects of traffic bottlenecks using an extended LWR model are dealt with. The solution structure was analytically indicated by study of the Riemann problem, which is characterized by a discontinuous flux. This leads to a typical solution that describes a queue upstream of the bottleneck and its width and height, and informs the design of a \mathcal{D} -mapping algorithm. More significantly, it was found that the kinetic model is able to reproduce stop-and-go waves for a triangular fundamental diagram. Some simulation examples were given to support these conclusions, and are shown to be in agreement with the analytical solutions.

Key words: LWR model; discontinuous flux; \mathcal{D} -mapping algorithm; stop-and-go waves