

振动的多孔平板上磁流体动力学 流动的 Hall 效应*

S·L·玛吉, A·K·卡其, M·古利亚, R·N·杰那

(维德亚萨伽大学 应用数学系, 米德纳布尔 721 102, 印度)

(郭兴明推荐)

摘要: 以无限多孔扁平板为边界, 对不可压缩导电粘滞流体的不稳定流动进行了分析. 平板在其自身平面内以频率 n 作谐振动, 在流体流动的垂直方向上作用一均匀磁场. 研究发现, 平板上有吹出(速度)时, 问题的解依然存在. 还得到了考虑粘性及 Joule 耗散时的温度分布. 壁面的平均温度随着 Hall 参数的增大而减小. 可以发现, 平板上有吹出(速度)时, 不存在温度分布.

关键词: Hall 效应; 振动; 共振; 热传送; 平均温度

中图分类号: O361.3 **文献标识码:** A

引 言

在一个离子化的气体中, 当其密度很小, 同时/或者磁场强度很强时, 其导电率将是一个张量. 由于磁力线周围的电子与离子在发生碰撞前的自由螺旋运动, 正交于磁场方向的导电率减小, 同时在正交于电场、磁场的方向上产生感应电流. 这种现象在文献中已为大家所熟知, 称之为 Hall 效应. 在许多天体物理学中, 以及在实验室等离子区中, Hall 效应可能是重要的. Katagir^[1]研究了边界层流动通过半无限平板的 Hall 电流效应. Pop 和 Soundalgekar^[2]讨论了多孔平板附近磁流体动力学流动问题的 Hall 电流效应. Gupta^[3]研究了稳定的磁流体动力学流动, 通过多孔平板的 Hall 效应, 该研究忽略了感应磁场. Jana 等^[4]考虑了感应磁场, 研究稳定的磁流体动力学流动, 通过无限多孔平板时的 Hall 效应. Datta 和 Jana^[5]研究了磁流体动力学流动通过一个平板, 而平板在其自身平面内作振动时的 Hall 效应. Bhadram^[6]将上述问题的研究推广到平板有转动的情况. Mazumder^[7]研究了磁流体动力学流越过振动的多孔平板时旋转和 Hall 电流的组合效应. Singh^[8]研究了一个振动的 MHD 流动在该 Stokes 问题中, 通过无限直立多孔平板时的 Hall 电流效应. 最近, Asghar 等^[9]和 Guria 等^[10]研究了无限流体圆盘非同轴旋转引起流动的 Hall 电流效应.

带 Hall 电流的 MHD 流研究在许多工程应用, 如 MHD 发电机和 Hall 加速器, 以及在飞行中磁流体动力学研究十分重要. Hall 电流趋向于减小 MHD 发电机和加速器的效率. 众所周

* 收稿日期: 2008-10-09; 修订日期: 2009-01-03

作者简介: M. Guria(联系人, E-mail: mrimoy9832@yahoo.com).

本文原文为英文, 黄锋译, 张禄坤校.

知, 在离子化的气体中存在电场时, 由于粘滞和 Joule 耗散, 会产生相当大的热量. 在 MHD 发电机中气体的温度很高, 以致其可能会发生导电. 考虑到 Hall 电流流动的这些问题, 电极等等上的电压下降会减小电机的效率. 在 MHD 加速器也会出现类似的问题, 除非能量足够大, 需要考虑实际 MHD 流传热问题中的 Hall 效应. 本文中, 研究了在一个无限多孔平板为边界的半无限区域中, 研究粘性不可压缩导电磁流体不稳定流动的 Hall 电流效应, 平板在其自身平面内以速度 $U \cos nt$ 作简谐振动, n 为振动频率. 研究发现, 随着 Hall 参数 m 的增大, 主流速度分量减小, 次流速度分量增大. 同时发现, 随着 Hall 参数 m 的增大, 由主流速度引起的剪应力的振幅是减小的. 另一方面, 随着 m 的增大, 由次流速度产生的剪应力振幅先是减小, 达到最小值, 然后增大. 当平板上有吹出(速度)时, 该问题的解依然存在. 同时, 研究了计及粘性和 Joule 耗散时的热传导特性. 研究发现, 平板的平均温度 $\theta_0(0)$ 随着 Hall 参数 m 的增大而减小.

1 数学公式及其解

研究粘性不可压缩导电流体越过无限多孔平板, 平板上有均匀的吸入(速度)或吹出(速度)作用时的非稳定流动. 平板在其自身平面内, 在一个给定的方向上, 以速度 $U \cos nt$ 振动. 取 x -轴沿着流动方向, z -轴垂直于平板, y -轴正交于 xz -平面. 沿 z -轴方向作用均匀磁场 H_0 (见图 1), 平板不导电. 因为无限宽平板处在 $z = 0$ 平面内, 所以全部物理量仅与 z 和 t 有关. 由连续性方程 $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$ 得到 $\partial w / \partial z = 0$, 积分产生 $w = -w_0$ (常数), 其中 $\mathbf{q} \equiv (u, v, w)$. 常数 w_0 表示平板上的法向速度, 吸入为正, 吹出为负.

沿 x -和 y -方向的动量方程给出如下:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - w_0 \frac{\partial u}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\mu_e H_0}{\rho} j_y, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - w_0 \frac{\partial v}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\mu_e H_0}{\rho} j_x, \tag{2}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \tag{3}$$

其中 μ_e, ρ, ν 和 p 分别表示导磁率、流体密度、动粘滞系数和流体压力, $\mathbf{j} \equiv (j_x, j_y, j_z)$ 为电流密度矢量.

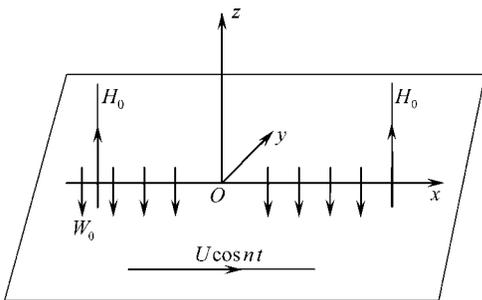


图 1 问题的几何示意图

问题的边界条件为

$$\begin{cases} z = 0 \text{ 时, } u = U \cos nt, v = 0, \\ z \rightarrow \infty \text{ 时, } u \rightarrow 0, v \rightarrow 0. \end{cases} \tag{4}$$

考虑 Hall 电流作用, 忽略离子滑动及热电效应, 广义 Ohm 定律为(见文献[11])

$$\mathbf{j} + \frac{\omega_e \tau_e}{H_0} (\mathbf{j} \times \mathbf{H}) = \sigma (\mathbf{E} + \mu_e \mathbf{q} \times \mathbf{H}), \tag{5}$$

其中 \mathbf{H} 为磁场矢量, \mathbf{E} 为电场矢量, ω_e 为回旋频率, τ_e 为电子碰撞时间, μ_e 为导磁率, σ 为导电率.

假设流动的磁 Reynolds 数很小, 感应磁场可以忽略不计. 该假设是合理的, 因为对于部分

离子化气体,磁 Reynolds 数一般很小. 根据该磁场的无散度关系 $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$, 得到该磁场中 $H_z = H_0 = \text{常数}$, 处处成立, 其中 $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$. 由电荷守恒方程 $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ 得到 $j_z = \text{常数}$, 该常数为 0, 因为 $j_z = 0$ 的平板上不导电, 所以流动中处处有 $j_z = 0$. 因为感应磁场可以忽略不计, Maxwell 方程 $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{H} / \partial t$ 变为 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, 因此得到 $\partial E_x / \partial z = 0$ 和 $\partial E_y / \partial z = 0$. 这意味着流动中处处满足 $E_x = \text{常数}$ 及 $E_y = \text{常数}$.

考虑到上述假设, 由方程(5)得到

$$j_x + mj_y = \sigma(E_x + \mu_e v H_0), \quad (6)$$

$$j_y - mj_x = \sigma(E_y - \mu_e u H_0), \quad (7)$$

其中 $m = \omega_e \tau_e$ 为 Hall 参数. 因为自由流中磁场是均匀的, 因此不存在电流, 即有

$$\text{当 } z \rightarrow \infty \text{ 时, } j_x \rightarrow 0, j_y \rightarrow 0, \quad (8)$$

利用式(8), 由方程(6)、(7)可以得到

$$E_x = 0, E_y = 0, \quad (9)$$

在流场中处处满足. 用上述 E_x 和 E_y 值代入方程(6)和(7), 并对 j_x 和 j_y 求解, 得

$$j_x = \frac{\sigma \mu_e H_0}{1 + m^2} (v + mu), \quad (10)$$

$$j_y = -\frac{\sigma \mu_e H_0}{1 + m^2} (u - mv). \quad (11)$$

利用式(10)、(11), 方程(1)、(2)变为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - w_0 \frac{\partial u}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\sigma \mu_e^2 H_0^2}{\rho(1 + m^2)} (u - mv), \quad (12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - w_0 \frac{\partial v}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\sigma \mu_e^2 H_0^2}{\rho(1 + m^2)} (v + mu). \quad (13)$$

引入无量纲变量

$$u^* = \frac{u}{U}, v^* = \frac{v}{U}, \eta = \frac{U}{\nu z}, t^* = \frac{U^2}{\nu t}, n^* = \frac{w_0}{U^2}, \quad (14)$$

方程(12)、(13)省略“*”之后, 变为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - S \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{M^2}{1 + m^2} (u - mv), \quad (15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - S \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - \frac{M^2}{1 + m^2} (v + mu), \quad (16)$$

其中 $S = w_0 / U$ 为吸入参数, $M^2 = \sigma \mu_e^2 H_0^2 \nu / (\rho U^2)$ 为磁参数.

利用式(14), 边界条件(4)变为

$$\eta = 0 \text{ 时, } u = \cos nt, v = 0; \eta = \infty \text{ 时, } u \rightarrow 0, \eta \rightarrow \infty. \quad (17)$$

结合方程(15)、(16), 得到

$$\frac{\partial q}{\partial t} - S \frac{\partial q}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} - \frac{M^2(1 + im)}{1 + m^2} q, \quad (18)$$

其中

$$q(\eta, t) = u(\eta, t) + iv(\eta, t), i = \sqrt{-1}. \quad (19)$$

边界条件(17), 现在变为

$$q(0, t) = \cos nt \text{ 和 } q(\infty, t) = 0. \quad (20)$$

假设采用下列形式的解:

$$q(\eta, t) = e^{im\eta} f_1(\eta) + e^{-im\eta} f_2(\eta). \quad (21)$$

用式(21)代入方程(18), 发现 $f_1(\eta)$ 和 $f_2(\eta)$ 满足下列方程:

$$f_1''(\eta) + \mathcal{S}'_1(\eta) - \left[\frac{M^2(1+im)}{1+m^2} + in \right] f_1(\eta) = 0, \quad (22)$$

$$f_2''(\eta) + \mathcal{S}'_2(\eta) - \left[\frac{M^2(1+im)}{1+m^2} - in \right] f_2(\eta) = 0, \quad (23)$$

其中“'”表示对 η 的微分, $f_1(\eta)$ 和 $f_2(\eta)$ 对应的边界条件为

$$f_1(0) = \frac{1}{2}, f_2(0) = \frac{1}{2}, f_1(\infty) = 0, f_2(\infty) = 0. \quad (24)$$

应该指出, 当不存在吸入或吹出($S=0$)以及 $n = mM^2/(1+m^2)$ 时, 方程(23)简化为

$$f_2''(\eta) - \frac{M^2}{1+m^2} f_2(\eta) = 0. \quad (25)$$

显然, 该方程有一个解, 满足 $f_2(0) = 1/2$ 和 $f_2(\infty) = 0$. 因此当 $n = mM^2/(1+m^2)$ 时有一个振动解, 且这时不发生共振现象. 满足边界条件(24)时, 方程(22)和(23)的解为

$$f_1(\eta) = \frac{1}{2} e^{-(S/2\alpha_1 + i\beta_1)\eta}, f_2(\eta) = \frac{1}{2} e^{-(S/2\alpha_2 \pm i\beta_2)\eta}, \quad (26)$$

其中的±号, $n < mM^2/(1+m^2)$ 时取正号, $n > mM^2/(1+m^2)$ 时取负号, 且

$$\begin{cases} \alpha_1, \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left\{ \left(\frac{S^2}{4} + \frac{M^2}{1+m^2} \right)^2 + \left(\frac{mM^2}{1+m^2} + n \right)^2 \right\}^{1/2} \pm \left[\frac{S^2}{4} + \frac{M^2}{1+m^2} \right]^{1/2} \right], \\ \alpha_2, \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left\{ \left(\frac{S^2}{4} + \frac{M^2}{1+m^2} \right)^2 + \left(\frac{mM^2}{1+m^2} - n \right)^2 \right\}^{1/2} \pm \left[\frac{S^2}{4} + \frac{M^2}{1+m^2} \right]^{1/2} \right]. \end{cases} \quad (27)$$

因此利用式(26), 方程(21)变为

$$q(\eta, t) = \frac{1}{2} [e^{-(S/2\alpha_1 + i\beta_1)\eta + imt} + e^{-(S/2\alpha_2 \pm i\beta_2)\eta - imt}], \quad n \neq \frac{mM^2}{1+m^2} \quad (28)$$

及

$$q(\eta, t) = \frac{1}{2} [e^{-(S/2\alpha_1 + i\beta_1)\eta + imt} + e^{-(S/2\alpha_2^* \mp i\beta_2^*)\eta - imt}], \quad n = \frac{mM^2}{1+m^2}, \quad (29)$$

其中 $\alpha_2^* = (S^2/4 + m^2/(1+m^2))^{1/2}$, α_1 和 β_1 由式(27)给出. 分离实部和虚部, $n \neq mM^2/(1+m^2)$ 时,

$$u(\eta, t) = \frac{1}{2} [e^{-(S/2\alpha_1)\eta} \cos(nt - \beta_1\eta) + e^{-(S/2\alpha_2)\eta} \cos(nt \pm \beta_2\eta)], \quad (30)$$

$$v(\eta, t) = \frac{1}{2} [e^{-(S/2\alpha_1)\eta} \sin(nt - \beta_1\eta) - e^{-(S/2\alpha_2)\eta} \sin(nt \pm \beta_2\eta)]. \quad (31)$$

同样地, $n = mM^2/(1+m^2)$ 时, 速度分量 u 和 v 为

$$u(\eta, t) = \frac{1}{2} [e^{-(S/2\alpha_1)\eta} \cos(nt - \beta_1\eta) + e^{-(S/2\alpha_2^*)\eta} \cos nt], \quad (32)$$

$$v(\eta, t) = \frac{1}{2} [e^{-(S/2\alpha_1)\eta} \sin(nt - \beta_1\eta) - e^{-(S/2\alpha_2^*)\eta} \sin nt]. \quad (33)$$

平板上无论是吸入还是吹出, 上述解都有效.

2 结果及讨论

从方程(30)和(31)可以看到, 速度变化图由两部分组成, 一部分以振幅 $e^{-(S/2\alpha_1)\eta}/2$ 振动,

另一部分以振幅 $e^{-(S/2+\alpha_2)\eta}/2$ 振动, 其中 α_1 和 α_2 由式(27) 给出. 由式(27) 发现, 因为 β_1 总是大于 β_2 , 所以波长 $2\pi/\beta_2$ 总是大于波长 $2\pi/\beta_1$, 解呈现随平板距离指数衰减振动的流动. 对应于前一部分, 在距平板 η 距离处, 相位滞后 $\beta_1\eta$ 振动; 对应于后一部分, 当 $n < mM^2/(1+m^2)$ 时, 相位提前 $\beta_2\eta$ 振动, 当 $n > mM^2/(1+m^2)$ 时, 相位滞后 $\beta_2\eta$ 振动. 有意思的是, $S = 0$ 和 $n = mM^2/(1+m^2)$ 时, 正解存在. 这是由于当 $S = 0$ 和 $n = mM^2/(1+m^2)$ 时 $\beta_2 > 0$. 结果表明, 在 $S = 0$ 和 $n = mM^2/(1+m^2)$ 时, 剪切振动也被限制在平板附近.

图 2~ 图 4 中示出, 当 $M^2 = 12, S = 1$ 时, 对于不同的 Hall 参数 m 、频率参数 n 及 nt , 主流速分量 u 和次流速分量 v 随着 η 的变化. 从图 2 可以发现, 无论 $n < mM^2/(1+m^2)$ 还是 $n > mM^2/(1+m^2)$, 主流速分量 u 随着 n 的增大而增大, 而次流速分量 v 在 $n < mM^2/(1+m^2)$ 时减小, $n > mM^2/(1+m^2)$ 时增大. 从图 3 可以看到, 随着 Hall 参数 m 的增大, 主流速分量 u 增大, 次流速分量 v 减小. 从图 4 中可以发现, 主流速分量 u 随着 nt 的增大而减小, 另一方面, 次流速分量 v 随着 nt (当 $nt \leq 45^\circ$ 时) 的增大减小, 然后随着 nt 的进一步的增大而增大.

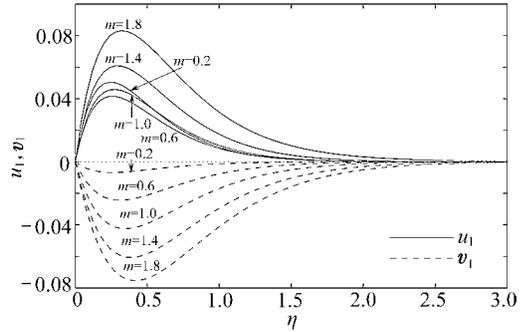
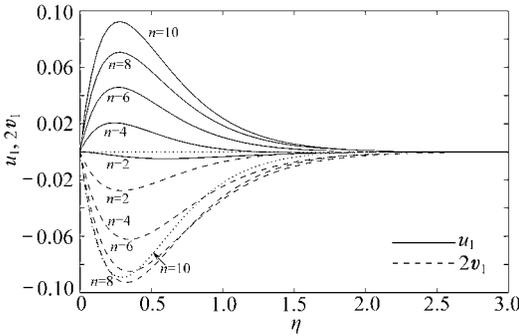


图 2 主、次流速分量 u, v 分别随 n 的变化情况 图 3 主、次流速分量 u, v 分别随 m 的变化情况

由主流速度引起平板 $\eta = 0$ 上的无量纲剪应力

力为

$$\tau_u = \left[\frac{\partial u}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} = -\frac{1}{2} R_1 \cos(nt + \theta_1), \quad (34)$$

其中

$$\begin{cases} R_1^2 = (S + \alpha_1 + \alpha_2)^2 + (\beta_1 \mp \beta_2)^2, \\ \tan \theta_1 = \frac{(\beta_1 \mp \beta_2)}{(S + \alpha_1 + \alpha_2)}. \end{cases} \quad (35)$$

方程(35) 表明 $0 < \tan \theta_1 < 1$. 因此从式(34) 和(17) 可以推断, 由于主流速引起的剪应力比平板振动相位超前 $\theta_1 < \pi/4$. 由次流速引起平板 $\eta = 0$ 上的无量纲剪应力为

$$\tau_v = \left[\frac{\partial v}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} = -\frac{1}{2} R_2 \cos(nt - \theta_2), \quad (36)$$

其中

$$R_2^2 = (\beta_1 \pm \beta_2)^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)^2, \quad \tan \theta_2 = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{(\beta_1 \pm \beta_2)}. \quad (37)$$

从式(37) 可以发现 $0 < \tan \theta_2 < 1$. 因此, 根据式(36) 和(17) 得到的次流速引起的剪应力比平

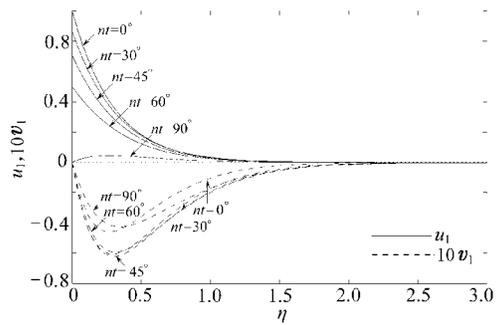


图 4 主、次流速分量 u, v 分别随 nt 的变化情况

板振动相位滞后 $\theta_2 < \pi/4$.

图5表明,当 $S = 1$ 和 $M^2 = 10$, 对不同的 n 值, 由主流速度和次流速度产生的剪应力的振幅 R_1 和 R_2 随 m 的变化情况. 观察发现, 振幅 R_1 和 R_2 都随着 n 的增大而增大. 另一方面, 振幅 R_1 随着 Hall 参数 m 的增大而减小, 振幅 R_2 随着 Hall 参数 m 的增大首先减小, 达到最小值后再增大. 进一步地, 当 $m > 1$ 时, 振幅 R_2 几乎不受到 Hall 电流的影响. 由主流速度和次流速引起的剪应力相位角正切值 $\tan \theta_1$ 和 $\tan \theta_2$ 的变化情况在图6中表示. 可以发现, 随着 n 的增大, $\tan \theta_1$ 在平板附近时是增大的, 远离平板时是减小的, 而 $\tan \theta_2$ 都是增大的. 还可以发现, 随着 m 的增大, $\tan \theta_2$ 首先减小, 达到最小值后再增大.

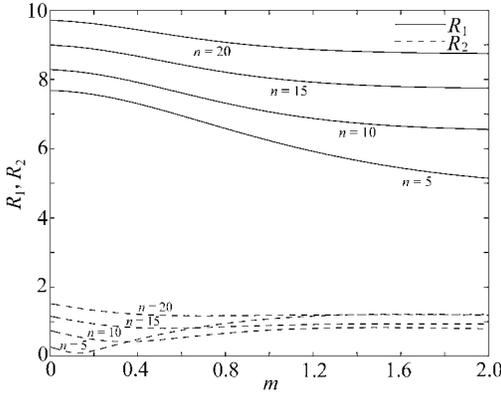


图5 R_1 和 R_2 随 n 的变化情况

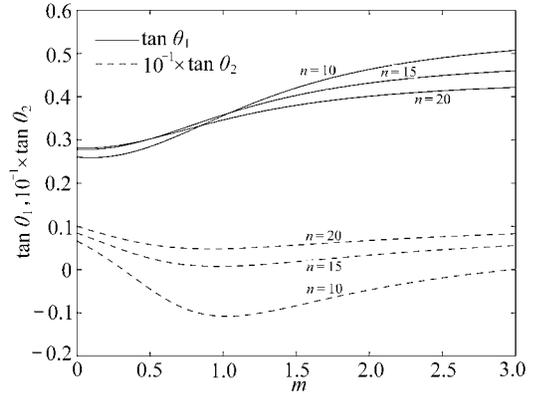


图6 $\tan \theta_1$ 和 $\tan \theta_2$ 随 n 的变化情况

3 热传递

现在讨论均匀磁场垂直作用的流场中, 振动流通过一个具有吸入作用的多孔平板时的温度分布. 温度分布的能量方程为(见文献[12])

$$\rho C_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} - w_0 \frac{\partial T}{\partial z} \right] = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{1}{\sigma} (j_x^2 + j_y^2), \quad (38)$$

其中 λ , μ , C_p 和 σ 分别是导热系数, 动粘滞系数, 流体比热比和导电率. 最后括号中的两项分别为粘滞耗散和 Joule 热. 假定平板是绝热的, 因此温度分布的边界条件为

$$z = 0 \text{ 时, } \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad z \rightarrow \infty \text{ 时, } T \rightarrow T_\infty, \quad (39)$$

其中 T_∞ 为周围环境温度常数. 引入无量纲变量

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_\infty} \quad (40)$$

并利用式(14), 方程(38)简化为(省去无量纲变量的“*”)

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - S \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + E_c \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \frac{M^2}{1 + m^2} E_c (u^2 + v^2), \quad (41)$$

其中 $E_c = U^2 / (C_p T_\infty)$ 为 Eckert 数, $Pr = \nu / \alpha$ 为 Prandtl 数. 边界条件(39)变为

$$\eta = 0 \text{ 时, } \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0; \quad \eta \rightarrow \infty \text{ 时, } \theta \rightarrow 0. \quad (42)$$

因为式(30)、(31)给出的速度场均值为零, 假定温度分布如下:

$$\theta(\eta, t) = \theta_0(\eta) + \theta_2(\eta) e^{2im} + \theta_2(\eta) e^{-2im}, \quad (43)$$

其中 $\theta_0(\eta)$ 表示平均值, $\theta_2(\eta)$ 表示 $\theta_2(\eta)$ 的复共轭. 将式(30)、(31)和(43)代入式(41), 并使谐波系数和非谐波系数相等, 得出下列方程:

$$\frac{d^2\theta_0}{d\eta^2} + SP_r \frac{d\theta_0}{d\eta} = - E_c Pr [A_1 e^{-(S+2\alpha_1)\eta} + A_2 e^{-(S+2\alpha_2)\eta}], \quad (44)$$

$$\frac{d^2\theta_2}{d\eta^2} + SP_r \frac{d\theta_2}{d\eta} - 2inPr \theta_2 = - E_c Pr (c_r + ic_i) e^{-(\alpha_3 + i\beta_3)\eta}, \quad (45)$$

$$\frac{d^2\theta_2}{d\eta^2} + SP_r \frac{d\theta_2}{d\eta} + 2inPr \theta_2 = - E_c Pr (c_r - ic_i) e^{-(\alpha_3 - i\beta_3)\eta}, \quad (46)$$

其中

$$\begin{cases} A_1 = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{S}{2} + \alpha_1 \right)^2 + \beta_1^2 + \frac{M^2}{1+m^2} \right], \\ A_2 = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{S}{2} + \alpha_2 \right)^2 + \beta_2^2 + \frac{M^2}{1+m^2} \right], \\ c_r = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{S}{2} + \alpha_1 \right) \left(\frac{S}{2} + \alpha_2 \right) \pm \beta_1 \beta_2 + \frac{M^2}{1+m^2} \right], \\ c_i = \beta_1 \left(\frac{S}{2} + \alpha_2 \right) \mp \beta_2 \left(\frac{S}{2} + \alpha_1 \right), \\ \alpha_3 = S + \alpha_1 + \alpha_2, \\ \beta_3 = \beta_1 \mp \beta_2. \end{cases} \quad (47)$$

这里 $n < mM^2/(1+m^2)$ 时取正负号的上部, $n > mM^2/(1+m^2)$ 时取正负号的下部. $\theta_0(\eta)$, $\theta_2(\eta)$ 和 $\theta_2(\eta)$ 的边界条件变为

$$\begin{cases} \eta = 0 \text{ 时, } \frac{d\theta_0}{d\eta} = 0, \frac{d\theta_2}{d\eta} = 0, \frac{d\theta_2}{d\eta} = 0, \\ \eta \rightarrow \infty \text{ 时, } \theta_0 \rightarrow 0, \theta_2 \rightarrow 0, \theta_2 \rightarrow 0. \end{cases} \quad (48)$$

式(44)满足条件(48)时的解为:

当 $S + 2\alpha_1 \neq SP_r$, $S + 2\alpha_2 \neq SP_r$ 时,

$$\begin{aligned} \theta_0(\eta) = Pr E_c \left[\frac{A_1 e^{-(S+2\alpha_1)\eta}}{(S+2\alpha_1)(SP_r - S - 2\alpha_1)} + \frac{A_2 e^{-(S+2\alpha_2)\eta}}{(S+2\alpha_2)(SP_r - S - 2\alpha_2)} \right] - \\ \frac{E_c}{S} \left[\frac{A_1}{(SP_r - S - 2\alpha_1)} + \frac{A_2}{(SP_r - S - 2\alpha_2)} \right] e^{-SP_r\eta}; \end{aligned} \quad (49)$$

当 $S + 2\alpha_1 = SP_r$, $S + 2\alpha_2 \neq SP_r$ 时,

$$\begin{aligned} \theta_0(\eta) = Pr E_c \left[\frac{A_1 \eta e^{-SP_r\eta}}{SP_r} + \frac{A_2 e^{-(S+2\alpha_2)\eta}}{(S+2\alpha_2)(SP_r - S - 2\alpha_2)} \right] + \\ \frac{E_c}{S} \left[\frac{A_1}{SP_r} - \frac{A_2}{(SP_r - S - 2\alpha_2)} \right] e^{-SP_r\eta}; \end{aligned} \quad (50)$$

当 $S + 2\alpha_1 \neq SP_r$, $S + 2\alpha_2 = SP_r$ 时,

$$\begin{aligned} \theta_0(\eta) = Pr E_c \left[\frac{A_1 e^{-(S+2\alpha_1)\eta}}{(S+2\alpha_1)(SP_r - S - 2\alpha_1)} + \frac{A_2 \eta e^{-SP_r\eta}}{SP_r} \right] + \\ \frac{E_c}{S} \left[\frac{A_2}{SP_r} - \frac{A_1}{(SP_r - S - 2\alpha_1)} \right] e^{-SP_r\eta}; \end{aligned} \quad (51)$$

其中 α_1 和 α_2 由式(27)给出. 方程(45)满足条件(48)时的解为

$$\theta_2(\eta) = \frac{E_c Pr (c_r + i c_i)}{d_r + i d_i} \left[\frac{(\alpha_3 + i \beta_3)}{\alpha + i \beta} e^{-(\alpha + i \beta)\eta} - e^{-(\alpha_3 + i \beta_3)\eta} \right], \tag{52}$$

其中

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\sqrt{2} S Pr + \left\{ (S^4 Pr^4 + 64 Pr^2 n^2)^{1/2} + S^2 Pr^2 \right\}^{1/2} \right], \\ \beta = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ (S^4 Pr^4 + 64 Pr^2 n^2)^{1/2} - S^2 Pr^2 \right\}^{1/2}, \\ d_r = \alpha_3^2 - S Pr \alpha_3 - \beta_3^2, \quad d_i = 2\alpha_3 \beta_3 - S Pr \beta_3 - 2n Pr. \end{cases} \tag{53}$$

因为方程(46)是方程(45)的复共轭,因此取 θ_2 的复共轭得到方程(46)的解.

由式(40)可获得壁面温度

$$\theta(0, t) = \theta_0(0) + \theta_2(0) e^{2int} + \theta_2(0) e^{-2int}. \tag{54}$$

利用式(49)至(52)得到

$$\theta(0, t) = \theta_0(0) + 2 E_c Pr R_3 \cos(2nt + \phi), \tag{55}$$

其中

$$\begin{cases} R = (d_r^2 + d_i^2) (\alpha^2 + \beta^2), \\ X = (d_r \alpha - d_i \beta) (\alpha_3 - \alpha) + (d_r \beta + d_i \alpha) (\beta_3 - \beta), \\ Y = (d_r \alpha - d_i \beta) (\beta_3 - \beta) - (d_r \beta + d_i \alpha) (\alpha_3 - \alpha), \\ R_3^2 = \left[\frac{c_r X - c_i Y}{R} \right]^2 + \left[\frac{c_i X + c_r Y}{R} \right]^2, \\ \tan \theta_3 = \frac{c_i X + c_r Y}{c_r X - c_i Y}. \end{cases} \tag{56}$$

无论 $S + 2\alpha_1 \neq S Pr$, $S + 2\alpha_2 \neq S Pr$, 还是 $S + 2\alpha_1 = S Pr$, $S + 2\alpha_2 \neq S Pr$, 还是 $S + 2\alpha_1 \neq S Pr$, $S + 2\alpha_2 = S Pr$, 壁面的平均温度 $\theta_0(0)$ 由下式给出

$$\theta_0(0) = \frac{E_c}{S} \left[\frac{A_1}{S + 2\alpha_1} + \frac{A_2}{S + 2\alpha_2} \right]. \tag{57}$$

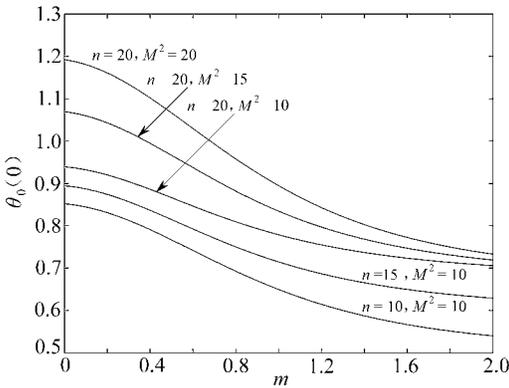


图7 $\theta_0(0)$ 随 n 和 M^2 的变化情况

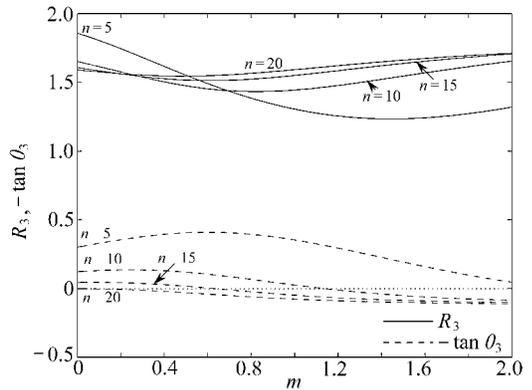


图8 R_3 和 $\tan \theta_3$ 随 n 的变化情况

从图7可以发现,无论频率参数 n , 还是磁场参数 M^2 增大时,平均温度 $\theta_0(0)$ 都增大. 进一步地,平均温度 $\theta_0(0)$ 随着Hall参数 m 的增大而减小. 当 $M^2 = 10, E_c = 0.1, Pr = 0.5, S = 1$, 对于不同的 n 值, 振幅 R_3 和相位角正切值 $\tan \theta_3$ 随 m 的变化情况在图8中表示. 从图8

可以看到, 随着 n 的增大, 振幅 R_3 在平板附近($\eta = 0$) 减小, 远离平板时增大. 还可以发现, 随着 Hall 参数 m 的增大, 振幅 R_3 首先减小, 达到最小值后再增大. 图 8 表明, $\tan\theta_3$ 随着频率参数 n 的增大而增大. 可以发现, 随着 Hall 参数 m 的增大, 当频率参数 n 较小时, 相位角正切值 $\tan\theta_3$ 首先减小, 达到最小值后再增大; 另一方面, 当频率参数 n 较大时, 相位角正切值 $\tan\theta_3$ 增大.

4 结 论

本文研究了边界为无限多孔平板, 粘性不可压缩流体非稳定 MHD 流动问题的 Hall 电流效应. 同时, 平板在其自身平面内以速度 $U\cos nt$ 发生简谐振动, 有一均匀磁场 H_0 垂直作用在该平板上. 研究发现, 在有 Hall 电流情况下, 以均匀的吸入(速度)或吹出(速度)作用在平板时, 对于所有的频率值, 在平板附近形成了一个振动层. 当 $n = mM^2/(1+m^2)$ 时, 平板附近也形成了振动层. 可以发现, 流体速度受到磁场参数的强烈影响. 无论是吸入还是吹出, 由主流速度引起的剪应力的相位超前于平板振动, 然而, 由次流速度产生的剪应力的相位滞后于平板振动. 平均温度随着 Hall 参数 m 的增大而减小.

致谢 作者衷心地感谢审稿人对本文提出的宝贵意见.

[参 考 文 献]

- [1] Katagiri M. The effect of Hall currents on the magnetohydrodynamic boundary layer flow past a semi-infinite flat plate[J]. Journal of the Physical Society of Japan, 1969, 27(4): 1051-1059.
- [2] Pop I, Soundalgekar V M. Effects of Hall current on hydromagnetic flow near a porous plate[J]. Acta Mechanica, 1974, 20(3/4): 315-318.
- [3] Gupta A S. Hydromagnetic flow past a porous flat plate with Hall effects[J]. Acta Mechanica, 1975, 22(3/4): 281-267.
- [4] Jana R N, Gupta A S, Datta N. Hall effects on the hydromagnetic flow past an infinite porous flat plate[J]. Journal of the Physical Society of Japan, 1977, 43(5): 1767-1772.
- [5] Datta N, Jana R N. Oscillatory magnetohydrodynamic flow past a flat plate with Hall effects[J]. Journal of the Physical Society of Japan, 1976, 40(5): 1469-1474.
- [6] Bhadram C V V. Hall effects on the hydromagnetic flow due to an oscillating plane with or without rotation[J]. Acta Mechanica, 1976, 24(3/4): 319-326.
- [7] Mazumder B S. Combined effects of Hall current and rotation on hydromagnetic flow over an oscillating porous plate[J]. International Journal Engineering Science, 1977, 15(9/10): 601-606.
- [8] Singh A K. Hall effects on an oscillatory MHD flow in the Stokes problem past an infinite vertical porous plate[J]. Astrophysics and Space Science, 1983, 93(1): 1-13.
- [9] Asghar S, Mohyiddin Muhammad R, Hayat T. Effects of Hall current and heat transfer on flow due to a pull of eccentric rotating disks[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2005, 48(3/4): 599-607.
- [10] Guria M, Das S, Jana R N. Hall effects on unsteady flow of a viscous fluid due to non-coaxial rotation of a porous disk and a fluid at infinity[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2007, 42(10): 1204-1209.
- [11] Cowling T G. Magnetohydrodynamics [M]. New York: Interscience Publisher, Inc, 1957.
- [12] Guria M, Das B K, Jana R N, et al. Hydromagnetic flow between two porous disks rotating about

non-coincident axes[J]. Acta Mechanica Sinica, 2008, 24(5): 489-496.

Hall Effects on Hydromagnetic Flow on an Oscillating Porous Plate

S. L. Maji, A. K. Kanch, M. Guria, R. N. Jana

(Department of Applied Mathematics, Vidyasagar University, Midnapore 721 102, India)

Abstract: An analysis was made on the unsteady flow of an incompressible electrically conducting viscous fluid bounded by an infinite porous flat plate. The plate executes harmonic oscillations with frequency n in its own plane. A uniform magnetic field is imposed perpendicular to the direction of the flow. It is found that the solution also exists for blowing at the plate. The temperature distribution is also obtained on taking viscous and Joule dissipation into account. The mean wall temperature decreases with increase in Hall parameter. It is found that no temperature distribution exists for the blowing at the plate.

Key words: Hall effects; oscillation; resonance; heat transfer; mean temperature