应用数学和力学, 第 24 卷 第 12 期(2003 年 12 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 12_1211_06

重建极性连续统理论的基本定律和原理(Ⅵ)——质量和惯性守恒定律*

戴天民

(辽宁大学 数学系和数学应用中心, 沈阳 110036)

(我刊原编委戴天民来稿)

摘要: 重建极性连续统理论的耦合型质量和惯性的守恒定律和局部守恒方程以及跳变条件• 为此推导出新的变形梯度、线元、面元和体元的物质导数, 并给出广义 Reynolds 输运定理• 把这些结果和作者以前推导出的耦合型动量、动量矩和能量的基本定律和有关原理结合在一起就大体上构成极性连续统理论相当完整的耦合型基本定律、局部守恒和均衡方程及原理体系• 从此体系可以根据常用的局部化方法给出耦合型的非局部质量和惯性守恒方程以及动量、动量矩和能量均衡方程•

关 键 词: 极性连续统; 耦合型的; 输运定理; 质量和惯性守恒定律
中图分类号: O33 文献标识码: A

引 言

本文是我们的前期工作[1~ 8] 的直接延续和补充•

在这些前期工作中, 我们已经重建了极性连续统理论的耦合型的动量、动量矩和能量的均衡定律和局部均衡方程以及有关的 Hamilton 原理, 虚功率原理和 Noether 定理等一系列新结果• 但是质量和微惯性守恒定律和守恒方程尚未重新建立起来•

本文的目的就是要重新建立耦合型的质量和惯性守恒定律和守恒方程, 以便和其它耦合型均衡定律和局部均衡方程一起, 构成极性连续统理论的基本定律及局部守恒和均衡方程体系• 为此, 我们必须重新建立变形梯度、线元、面元和体元的物质导数, 从而推导出广义 Reynolds 输运定理和具有以速度 $\boldsymbol{V}$ 运动的间断面 $\sigma(t)$ 的物质体积的物质导数• 由此可得各种连续统理论的质量和惯性的耦合型守恒定律和守恒方程以及跳变条件• 通过局部化还可得到相应的非局部守恒方程和跳变条件•

我们所重新建立起来的极性连续统理论的耦合型基本定律和原理体系应该可以说是全新的, 而且是较为完整的• 这个新体系已把我们对传统的各种连续统理论进行了全面再研究并

* 收稿日期: 2002_09_06; 修订日期: 2003_06_27
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10072024) ; 辽宁省教育委员会基础研究基金资助项目(99011 1001)
作者简介: 戴天民(1931—) , 男, 满族, 辽宁开原人, 教授, 博士, 博士生导师, 已发表专著译著 12 部和论文 60 余篇(E_mail: tianmin_dai@ yahoo. com. cn)•

对它们进行了本质上改进后所得到的半耦合型的结果作为特殊情形包括在内•

传统的各种连续统理论的专著和论文不胜枚举, 这里为节省篇幅不另列出, 而只列出与本文直接相关的文献•

1 物质导数

各物理量的和体积积分的物质导数在连续统场论研究中起着重要作用• 特别是在研究增率型连续统理论中尤其重要•

1.1 变形梯度和角变形梯度

现根据我们在[3, 4]中提出的较为完整的极性连续统模型给出广义的变形梯度的物质导数如下:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(x_{k,K}) = \underline{v}_{k,l}\,x_{l,K},\quad \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\boldsymbol{F}) = (\underline{\boldsymbol{v}}\nabla)\cdot\boldsymbol{F} \tag{1}$$

和

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(X_{K,k}) = -X_{K,l}\,\underline{v}_{l,k},\quad \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\boldsymbol{F}^{-1}) = -\boldsymbol{F}^{-1}\cdot(\underline{\boldsymbol{v}}\nabla), \tag{2}$$

这里 $\underline{v}_k = v_k + \varepsilon_{kij}\dot{\varphi}_i x_j$•

这些结果可直接证明如下:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(x_{k,K}) &= (x_{k,K})^{\cdot} = \dot{x}_{k,l}\,x_{l,K} = (v_k + \varepsilon_{kij}\dot{\varphi}_i x_j)_{,l}\,x_{l,K} = \\ &(v_{k,l} + \varepsilon_{lki}\dot{\varphi}_i + \varepsilon_{kij}x_j\dot{\varphi}_{i,l})x_{l,K} = \underline{v}_{k,l}\,x_{l,K}\end{aligned} \tag{1a}$$

或

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\boldsymbol{F}) = \dot{\boldsymbol{F}} = (\underline{\boldsymbol{v}}\nabla)\cdot\boldsymbol{F}• \tag{1b}$$

由于 $x_{k,K}X_{K,l} = \delta_{kl}$, 或 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^{-1} = \boldsymbol{I}$, 故有

$$(\boldsymbol{F}^{-1})^{\cdot} = -\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\dot{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{F}^{-1} = -\boldsymbol{F}^{-1}\cdot(\underline{\boldsymbol{v}}\nabla)\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^{-1} = -\boldsymbol{F}^{-1}\cdot(\underline{\boldsymbol{v}}\nabla)• \tag{2b}$$

在研究增率型极性连续统理论时还需要角变形梯度的物质导数, 这已在[9]中给出, 即

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\varphi_{k,K}) = \dot{\varphi}_{k,l}\,\varphi_{l,K},\quad \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\Psi) = (\dot{\varphi}\nabla)\cdot\Psi \tag{3}$$

和

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\Phi_{K,k}) = -\Phi_{K,l}\,\dot{\varphi}_{l,k},\quad \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\Psi^{-1}) = -\Psi^{-1}\cdot(\dot{\varphi}\nabla), \tag{4}$$

这里 Φ_K 和 φ_k 分别为物质和空间描述中的微角位移•

1.2 线元、面元、体元和面法线

线元的物质导数为

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}x_k) = \underline{v}_{k,l}\,\mathrm{d}x_l• \tag{5}$$

在式(1a)的两侧各乘以 $\mathrm{d}X_K$, 即得上式•

Jacobi 行列式 $j = v/V$ 的物质导数为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}j}{\mathrm{D}t} &= \frac{\partial j}{\partial x_{k,K}}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(x_{k,K}) = \frac{\partial j}{\partial x_{k,K}}\underline{v}_{k,l}\,x_{l,K} = \\ &jX_{K,k}\underline{v}_{k,l}\,x_{l,K} = j\underline{v}_{k,k}•\end{aligned} \tag{6}$$

同理, $J = V/v$ 的物质导数为

$$\frac{\mathrm{D}J}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial J}{\partial X_{K,k}}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(X_{K,k})=-\frac{\partial J}{\partial X_{K,k}}X_{k,l}\underline{v}_{l,k}=$$
$$Jx_{k,K}X_{K,l}\underline{v}_{l,k}=J\underline{v}_{k,k}. \tag{7}$$

由于 $\mathrm{d}v=j\,\mathrm{d}V$, 故体元 $\mathrm{d}v$ 的物质导数为

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}v)=\frac{\mathrm{D}j}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}V=\underline{v}_{k,k}j\,\mathrm{d}V=\underline{v}_{k,k}\,\mathrm{d}v. \tag{8}$$

同理, 体元 $\mathrm{d}V$ 的物质导数为

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}V)=\frac{\mathrm{D}J}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}v=\underline{v}_{k,k}J\,\mathrm{d}v=\underline{v}_{k,k}\,\mathrm{d}V. \tag{9}$$

面元 $\mathrm{d}a_k$ 的物质导数为

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}a_k)=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(jX_{K,k}N_K\,\mathrm{d}A)=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(jX_{K,k}\,\mathrm{d}A_K)=$$
$$\left[\frac{\mathrm{D}j}{\mathrm{D}t}X_{K,k}+j\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(X_{K,k})\right]\mathrm{d}A_K=\underline{v}_{p,p}\,\mathrm{d}a_k-\underline{v}_{p,k}\,\mathrm{d}a_p=$$
$$(\underline{v}_{p,p}n_k-\underline{v}_{p,k}n_p)\,\mathrm{d}a. \tag{10}$$

由于 $\mathrm{d}a^2=\mathrm{d}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}=j^2X_{K,k}X_{L,k}\,\mathrm{d}A_K\,\mathrm{d}A_L$, 故有

$$2\mathrm{d}a\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}}(\mathrm{d}a)=\left\{2j\frac{\mathrm{D}j}{\mathrm{D}t}X_{K,k}X_{L,k}+j^2\left[\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(X_{K,k})X_{L,k}+\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(X_{L,k})X_{K,k}\right]\right\}\mathrm{d}A_K\,\mathrm{d}A_L. \tag{a}$$

于是面元 $\mathrm{d}a$ 的物质导数可写成

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}a)=\frac{j^2}{\mathrm{d}a}(\underline{v}_{p,p}X_{K,k}X_{L,k}-X_{K,p}\underline{v}_{p,k}X_{L,k})\,\mathrm{d}A_K\,\mathrm{d}A_L=$$
$$\frac{1}{\mathrm{d}a}(\underline{v}_{p,p}\,\mathrm{d}a^2-\underline{v}_{p,k}\,\mathrm{d}a_p\,\mathrm{d}a_k)=(\underline{v}_{p,p}-\underline{v}_{p,k}n_pn_k)\,\mathrm{d}a. \tag{11}$$

现求面法线 n_k 的物质导数. 由于 $\mathrm{d}a_k=n_k\,\mathrm{d}a$, 故有

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}a_k)=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(n_k\,\mathrm{d}a)=\dot{n}_k\,\mathrm{d}a+n_k\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}a), \tag{b}$$

于是

$$\dot{n}_k\,\mathrm{d}a=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}a_k)-n_k\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}a)=(\underline{v}_{p,l}n_ln_pn_k-\underline{v}_{p,k}n_p)\,\mathrm{d}a, \tag{c}$$

故面法线 n_k 的物质导数为

$$\dot{n}_k=(\underline{v}_{p,l}n_ln_k-\underline{v}_{p,k})n_p. \tag{12}$$

2 广义输运定理

现按上节的结果对传统的输运定理加以推广则有下面的广义 Reynolds 输运定理. 令 $\boldsymbol{R}$ 为一光滑的空间场, 并假定 $\boldsymbol{R}$ 或是标量值的或是张量值的. 于是有

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_V\boldsymbol{R}\,\mathrm{d}v=\int_V(\dot{\boldsymbol{R}}+\boldsymbol{R}\,\mathrm{div}\,\underline{\boldsymbol{v}})\,\mathrm{d}v, \tag{13}$$

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_V\boldsymbol{R}\,\mathrm{d}v=\int_V\left[\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial t}+\mathrm{div}(\boldsymbol{R}\underline{\boldsymbol{v}})\right]\mathrm{d}v=\int_V\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial t}\mathrm{d}v+\int_A\boldsymbol{R}\underline{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}a. \tag{14}$$

如果略去角速度所引起的附加速度, 即把上列两式中的 $\underline{\boldsymbol{v}}$ 用 $\boldsymbol{v}$ 代替, 则得传统的 Reynolds 输运定理. 不少连续统力学专著中都有证明, 不另叙及.

现在考虑具有以速度 $\boldsymbol{V}$ 运动的间断面 $\sigma(t)$ 的物质体积 V 的物质导数.

我们现在要考虑由于角速度引起的附加速度, 故必须把传统的结果, 例如, Eringen 的专著[10]中的 $\boldsymbol{v}$ 用 $\underline{\boldsymbol{v}}$ 代替, 于是一个张量场对 $V-\sigma$ 的体积积分的广义物质导数可直接写成下列形式:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{V-\sigma}\boldsymbol{R}\mathrm{d}v=\int_{V-\sigma}\left[\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial t}+\operatorname{div}(\boldsymbol{R}\underline{\boldsymbol{v}})\right]\mathrm{d}v+\int_{\sigma}【\boldsymbol{R}(\underline{\boldsymbol{v}}-\boldsymbol{V})】\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a\cdot \tag{15}$$

3 质量守恒方程和跳变条件

3.1 微极连续统

令 ρ 和 ν_i 分别为质量密度和微角速度矢量, 并在式(15) 中取 $R=\rho$ 和 $\underline{v}_k=v_k+\varepsilon_{kij}\nu_i x_j$, 则得微极连续统的质量守恒方程如下:

$$\int_{V-\sigma}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\underline{\boldsymbol{v}})\right]\mathrm{d}v+\int_{\sigma}【\rho(\underline{\boldsymbol{v}}-\boldsymbol{V})】\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a=0\cdot \tag{16}$$

我们假定所有均衡定律对物体的每一部分和间断面均适用, 应用到式(16), 这就意味着每个被积表达式都必须为零, 于是

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\rho\underline{v}_k)_{,k}=0,\qquad 在\ V-\sigma 内; \tag{17}$$

$$【\rho(\underline{v}_k-V_k)】n_k=0,\qquad 在\ \sigma\ 上\cdot \tag{18}$$

式(17) 和式(18) 分别为质量局部守恒方程和跳变条件•

3.2 微态连续统

按照惯例, 取 $\omega_{kj}=-\varepsilon_{kji}\nu_i$ 为微旋转张量, 并在式(17) 和式(18) 中取 $\underline{v}_k=v_k+\omega_{kj}x_j$, 即得微态连续统的局部质量守恒方程和跳变条件• 实质上, 微极和微态连续统两者的质量守恒方程和跳变条件相同•

3.3 偶应力理论和耦合型连续统理论

我们已在[5]中讨论过有关偶应力理论和耦合型连续理论间的关系问题• 令 $\dot{\vartheta}$ 为宏角速度矢量, 并在式(17) 和式(18) 中取 $\underline{v}_k=v_k+\varepsilon_{kij}\dot{\vartheta}_i x_j$, 则得偶应力理论和耦合型连续统的质量局部守恒方程和跳变条件•

4 惯性守恒方程和跳变条件

4.1 极性连续统

1964 年 Eringen[11] 根据物理的考虑推导出下列极性连续统的微惯性守恒定律以及局部微惯性守恒方程和跳变条件:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{V-\sigma}\rho j_{kl}\,\chi_{kK}\,\chi_{lL}\mathrm{d}v=0 \tag{19}$$

以及

$$\frac{\partial j_{kl}}{\partial t}+\frac{\partial j_{kl}}{\partial x_m}v_m-j_{km}\,\omega_{lm}-j_{ml}\,\omega_{km}=0, \tag{20}$$

$$【\rho j_{kl}(v_m-V_m)】n_m=0\cdot \tag{21}$$

我们现在考虑微角速度引起的附加速度, 则可把式(20) 和式(21) 中的 v_m 用 $\underline{v}_m$ 代替, 即得极性连续统的较为完整的微惯性守恒方程和跳变条件:

$$\frac{\partial j_{kl}}{\partial t}+\frac{\partial j_{kl}}{\partial x_m}\underline{v}_m-j_{km}\,\omega_{lm}-j_{ml}\,\omega_{km}=0, \tag{22}$$

$$【\vartheta_{kl}(\underline{v}_m - V_m)】n_m = 0• \quad (23)$$

4.2 偶应力理论和耦合型连续统理论

现把微角速度 ν_i 用宏角速度 $\dot{\vartheta}_i$ 代替，并在式(22)和式(23)中把 $\underline{v}_m$ 和 ω_{lm} 分别用 $\underline{v}_m^* = v_m + \varepsilon_{mij}\dot{\vartheta}_i x_j = v_m + \Omega_{mj} x_j$ 和 Ω_{lm} 代替，即得偶应力理论和耦合型连续统理论的宏惯性守恒方程和跳变条件

$$\frac{\partial j_{kl}}{\partial t} + \frac{\partial j_{kl}}{\partial x_m}\underline{v}_m^* - j_{km}\Omega_{lm} - j_{ml}\Omega_{km} = 0, \quad (24)$$

$$【\vartheta_{kl}(\underline{v}_m^* - V_m)】n_m = 0, \quad (25)$$

这里 Ω_{lm} 我们可称为宏旋转张量•

若在式(24)中取 $\underline{v}_m^*$ 为 v_m，即得

$$\frac{\partial j_{kl}}{\partial t} + \frac{\partial j_{kl}}{\partial x_m}v_m - j_{km}\Omega_{lm} - j_{ml}\Omega_{km} = 0, \quad (26)$$

这便是我们在[1]中给出的结果•

5 结 束 语

我们已对传统的带有(包括不带)微结构的各种连续统理论的基本定律和原理进行了全面地再研究，并找出了这些理论的存在不同程度的不完整性的原因，从而提出了考虑动量、面力和体力所引起的附加动量矩、面力矩和体力矩影响的各种连续统理论的基本定律和原理• 我们把这类结果与非耦合型的，即传统的结果对应地称为半耦合型的•

把本文给出的各种连续统理论的质量和惯性的守恒定律和局部守恒方程和我们在[1~8]中给出的动量、动量矩、能量均衡定律和局部均衡方程以及有关原理结合在一起，我们就已大体上重新建立起带有(包括不带)微结构的连续统理论的基本定律和原理体系• 我们把这类结果称为耦合型的• 这种耦合型的基本定律和原理体系是相当普遍和完整的• 它已把几乎全部现有极性连续统理论的半耦合型和非耦合型(即传统)的基本定律和均衡方程都作为特殊情形包括在内• 通过对比还可以清晰地看出各种结果间的相互关系•

通过常用的方法以及局部化过程还易导出耦合型的动量，角动量和能量的跳变条件以及非局部基本均衡方程体系• 在本重建极性连续统理论系列论文中为节省篇幅均未另行列出•

[参 考 文 献]

[1] DAI Tian-min. New laws and principles for continuum mechanics_Part Ⅰ: Balance laws and equations [A]. In: CHIEN Wei_zang Ed. Proceedings of the 4th International Conference on Nonlinear Mechanics [C]. Shanghai: Shanghai University Press, 2002, 206—209.

[2] DAI Tian-min. New laws and principles for continuum mechanics_Part Ⅱ: Energy rate and power [A]. In: Ibid [C]. Shanghai: Shanghai University Press, 2002, 210—212.

[3] DAI Tian-min. On basic laws and principles for continuum field theories[A]. In: Ibid [C]. Shanghai: Shanghai University Press, 2002, 29—41.

[4] 戴天民. 重建极性连续统理论的基本定律和原理(Ⅰ)——微极连续统[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(10): 991—997.

[5] 戴天民. 重建极性连续统理论的基本定律和原理(Ⅱ)——微态连续统理论和偶应力理论[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(10): 998—1014.

[6] 戴天民. 重建极性连续统理论的基本定律和原理(Ⅲ)——Noether定理[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(10): 1015－1021.
[7] 戴天民. 重建极性连续统理论的基本定律和原理(Ⅳ)——表面守恒定律[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(11): 1101－1107.
[8] 戴天民. 重建极性连续统理论的基本定律和原理(Ⅴ)——极性热力连续统[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(11): 1108－1113.
[9] 戴天民. 极性连续统的增率型运动方程和边界条件[J]. 应用数学和力学, 2000, **21**(3): 221－225.
[10] Eringen A C. 连续统物理的基本原理[M]. 朱照宣 译. 南京: 江苏科学技术出版社, 1985.
[11] Eringen A C, Kafadar C B. 微极场论[M]. 戴天民 译. 南京: 江苏科学技术出版社, 1982.

Renewal of Basic Laws and Principles for Polar Continuum Theories (Ⅵ) —Conservation Laws of Mass and Inertia

DAI Tian-min
(Department of Mathematics & Center for the Application of Mathematics, Liaoning University, Shenyang 110036, P. R. China)

Abstract: The purpose is to reestablish the coupled conservation laws, the local conservation equations and the jump conditions of mass and inertia for polar continuum theories. In this connection the new material derivatives of the deformation gradient, the line element, the surface element and the volume element were derived and the generalized Reynolds' transport theorem was presented. Combining these conservation laws of mass and inertia with the balance laws of momentum, angular momentum and energy derived in our previous papers of this series, a rather complete system of coupled basic laws and principles for polar continuum theories is constituted on the whole. From this system the coupled nonlocal balance equations of mass, inertia, momentum, angular momentum and energy may be obtained by the usual localization.

Key words: polar continua; coupled; transport theorem; conservation law of mass and inertia