

文章编号: 1000-0887(2003) 12-1238-05

圆柱正交各向异性圆管瞬态 温度应力分析*

凌道盛

(浙江大学 建筑工程学院, 杭州 310027)

(皓江推荐)

摘要: Kardomateas 关于圆柱正交各向异性圆管瞬态温度应力的研究(Journal of Applied Mechanics, 1989, 1990) 存在公式推导错误, 虽经勘误, 但没有给出正确的数值结果. 该文采用 Mathematica 计算克服了 Bessel 函数计算过程中的大宗量问题, 采用统一的计算公式给出了一般温度边界条件下圆管温度应力场的解析解, 并给出了正确的数值结果.

关键词: 柱面正交各向异性; 瞬态温度应力; 复合材料圆管

中图分类号: O343.8 文献标识码: A

引 言

圆柱正交各向异性圆管在实际工程中得到广泛应用, 其应力场的研究引起了众多科技人员的重视. Lehnitskii^[1], Sherrer^[2], Pagano^[3] 等对机械荷载作用下的应力场进行了研究, Kalam & Tauchert^[4] 和 Hyer & Cooper^[5] 则对定常温度场引起的应力进行了研究. 同时考虑轴向应变影响, 有关非常温度场在正交各向异性圆管中引起的瞬态热应力问题的研究是 Kardomateas 于 1989 年提出和完成的^[6], 1990 年他又完成了进一步的研究工作^[7]. 遗憾的是文献[6, 7] 的公式推导存在错误, 虽在 1991 年给出了勘误表, 但没有给出正确的数值结果. 本文采用 Mathematica 计算克服了 Bessel 函数计算过程中的大宗量问题, 采用文[6] 的方法给出了一般温度边界条件下圆管温度应力场解析解的统一形式, 并给出了正确的数值结果.

1 基本方程

内外半径分别为 r_1 和 r_2 的圆筒参考温度为零度. Kardomateas^[6,7] 研究了受下列非常温度场作用的瞬态应力问题,

$$T(r, t) = d_1 + d_2 \ln(r/r_1) + d_3 \ln(r/r_2) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-Ka_n^2 t} [d_{4n} J_0(r\alpha_n) + d_{5n} Y_0(r\alpha_n)], \quad (1)$$

式中, $J_\nu(x)$ 和 $Y_\nu(x)$ 分别为第一和第二类 ν 阶 Bessel 函数, α_n 是下列方程正根(按由小到大排

* 收稿日期: 2002_03_19; 修订日期: 2003_06_27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10172075)

作者简介: 凌道盛(1968—), 男, 安徽黄山人, 副研究员, 博士(E-mail: dsling@zju.edu.cn).

列),

$$\begin{aligned} & [h_1 x J_1(r_1 x) + h_2 J_0(r_1 x)] [h_1^* x Y_1(r_2 x) - h_2^* Y_0(r_2 x)] - \\ & [h_1 x Y_1(r_1 x) + h_2 Y_0(r_1 x)] [h_1^* x J_1(r_2 x) - h_2^* J_0(r_2 x)] = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

常数 d_1, d_2, d_3, d_{4n} 和 d_{5n} 可参见文[7]的附录A•

圆管的位移场可采用 Lekhnitskiĭ^[1] 的假定, 即

$$u_r = U(r, t), \quad u_\theta = 0, \quad u_z = zC(t), \quad (3)$$

此时, 圆柱正交各向异性的本构关系简化为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial U/\partial r - \alpha_r \Delta T \\ U/r - \alpha_\theta \Delta T \\ C(t) - \alpha_z \Delta T \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{rz} = \tau_{\theta r} = 0, \quad (5)$$

式中 C_{ij} 为弹性常数, $\alpha_r, \alpha_\theta, \alpha_z$ 为热膨胀系数•

将(4)和(5)代入应力表示的平衡方程, 可得到一个用位移表示的平衡方程:

$$\begin{aligned} C_{11} \left[\frac{\partial^2 U(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U(r, t)}{\partial r} \right] - \frac{C_{22}}{r^2} U(r, t) = \\ q_1 \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} + q_2 \frac{T(r, t)}{r} + (C_{23} - C_{13}) \frac{C(t)}{r}, \end{aligned} \quad (6)$$

式中

$$q_1 = C_{11} \alpha_r + C_{12} \alpha_\theta + C_{13} \alpha_z, \quad (7)$$

$$q_2 = (C_{11} - C_{12}) \alpha_r + (C_{12} - C_{22}) \alpha_\theta + (C_{13} - C_{23}) \alpha_z; \quad (8)$$

边界条件为

$$\sigma_{rr}(r_i, t) = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (9)$$

以及轴向合力为零,

$$\int_{r_1}^{r_2} \sigma_{zz}(r, t) 2\pi r dr = P_z(t) = 0 \quad (10)$$

2 问题求解

和文[6]及[7]一样, 分别将 $C(t)$ 和 $U(r, t)$ 写成下列级数形式,

$$C(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-K_n^2 t}, \quad (11)$$

$$U(r, t) = U_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} U_n(r) e^{-K_n^2 t}, \quad (12)$$

式中, C_n 和 $U_n(r)$ 分别为待定常数和待定函数• 为了书写方便, 已将文[6]、[7]中的 $R_n(r)$ 改写为 $U_n(r)$ • 将(11)和(12)代入(6)可得到关于 $U_n(r)$ 的方程:

$$\begin{aligned} C_{11} \left[\ddot{U}_0(r) + \frac{\dot{U}_0(r)}{r} \right] - \frac{C_{22}}{r^2} U_0(r) = \frac{q_1(d_2 + d_3) + q_2 d_1 + (C_{23} - C_{13}) C_0}{r} + \\ q_2 d_2 \frac{1}{r} \ln \left[\frac{r}{r_1} \right] + q_2 d_3 \frac{\ln(r/r_2)}{r}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} C_{11} \left[\ddot{U}_n(r) + \frac{\dot{U}_n(r)}{r} \right] - \frac{C_{22}}{r^2} U_n(r) = \\ \frac{C_{23} - C_{13}}{r} C_n + d_{4n} \left[q_2 \frac{J_0(r\alpha_n)}{r} - q_1 \alpha_n J_1(r\alpha_n) \right] + \end{aligned}$$

$$d_{5n} \left[q_2 \frac{Y_0(r\alpha_n)}{r} - q_1 \alpha_n Y_1(r\alpha_n) \right] \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (14)$$

注意到式(14)已纠正了文[6]的(14)式和文[7]的(11)式。方程(13)和(14)的解可写成如下形式:

$$U_n(r) = G_{n0} r^{\lambda_1} + G_{n0} r^{\lambda_2} + \frac{C_{23} - C_{13}}{C_{11} - C_{22}} C_n r + U_n^*(r), \quad \text{当 } C_{11} \neq C_{22} \text{ 时}, \quad (15a)$$

$$U_n(r) = G_{n0} r + \frac{G_{n0}}{r} + \frac{C_{23} - C_{13}}{2C_{11}} C_n r \ln \left(\frac{r}{r_2} \right) + U_n^{**}(r), \quad \text{当 } C_{11} = C_{22} \text{ 时}, \quad (15b)$$

式中, $n = 0, 1, 2, \dots$, G_{1n} 和 G_{2n} 是积分常数, $U_n^*(r)$ 和 $U_n^{**}(r)$ 分别对应(13)和(14)最后两项的特解, 其中的 Bessel 函数按文[6]的方法展开为级数。以及

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{C_{22}/C_{11}} \quad (16)$$

将(11)和(12)代入(9)可得 $U_n(r)$ 的边界条件,

$$C_{11} \dot{U}_n(r) |_{r=r_i} + C_{12} U_n(r_i)/r_i + C_{13} C_n = q_1 T_n(r_i) \quad (i = 1, 2; n = 0, 1, 2, \dots), \quad (17)$$

式中

$$\begin{cases} T_0(r) = d_1 + d_2 \ln(r/r_1) + d_3 \ln(r/r_2), \\ T_n(r) = d_{4n} J_0(r\alpha_n) + d_{5n} Y_0(r\alpha_n). \end{cases}$$

将(11)和(12)代入(9)可得到

$$\int_{r_1}^{r_2} [C_{13} \dot{U}_n(r) + C_{23} U_n(r) + C_{33} C_n r - q_3 T_n(r) r] dr \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (18)$$

将(15)式所示的 $U_n(r)$ 代入(17)和(18), 就得到关于 G_{1n} 、 G_{2n} 和 C_n 的联立代数方程组, 求得它们之后就可求得位移 $U(r, t)$ 和 $C(t)$ 。

3 数值算例

下面来计算文[6, 7]中的算例。 $r_1 = 20 \text{ mm}$, $r_2 = 36 \text{ mm}$ 的环向加强的玻璃/环氧树脂柱面正交各向异性圆管, r 方向热传导系数为 $K = 0.112 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, 热膨胀系数为 $\alpha_r = 40 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, $\alpha_\theta = 10 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, $\alpha_z = 40 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ 。材料的弹性模量和泊松比如下:

$$E_1 = 13.7 \text{ GPa}, E_2 = 55.9 \text{ GPa}, E_3 = 13.7 \text{ GPa},$$

$$\nu_{12} = 0.068, \nu_{23} = 0.277, \nu_{31} = 0.4,$$

式中, 1、2、3 分别代表 r 、 θ 、 z 方向。在 $r = r_1$ 处给定温度 $T(r_1, t) = T_0 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ 。在 $r = r_2$ 处为热交换边界, 热交换系数为 $h = 0.15 \text{ m}^{-1}$, 周围环境温度为参考温度。

引入无量纲量,

$$\xi = (r - r_i)/(r_2 - r_1), \quad \tau = Kt/(r_2 - r_1)^2.$$

图 1 为不同时刻圆管内位移场的分布曲线, 图 2~ 4 给出了相应的应力分布。

4 结 论

- 1) 本文纠正了 Kardomateas 研究中的错误, 并给出了正确的公式和数值结果。
- 2) 有关温度场的计算结果和文[6, 7]一致, 在 $\tau = 10$ 时已接近稳态结果, 此时的位移和应

力分布曲线和文[6, 7]大致相同, 而其它时刻的曲线则大相径庭。

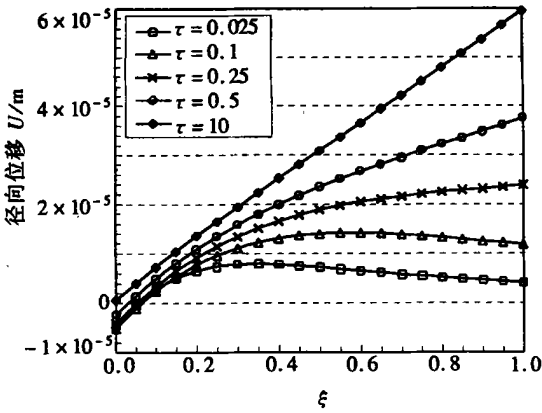


图 1 位移 U 分布曲线

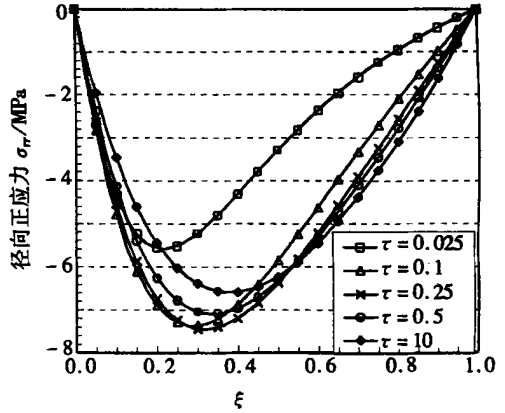


图 2 径向正应力 σ_{rr} 分布曲线

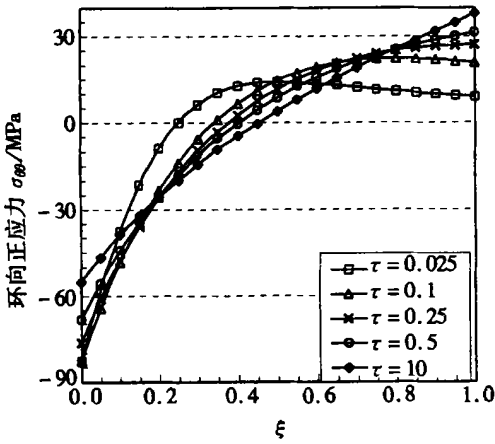


图 3 环向正应力 $\sigma_{\theta\theta}$ 分布曲线

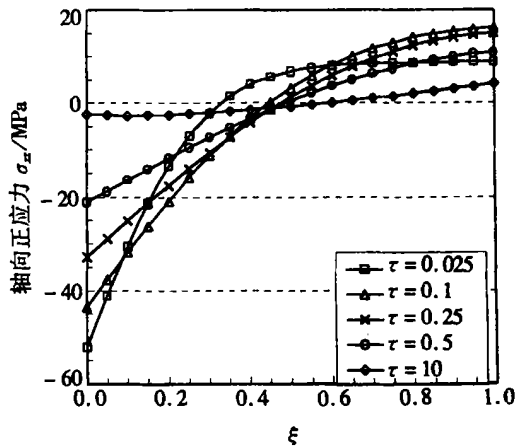


图 4 轴向正应力 σ_z 分布曲线

由图 1 可以看出, 在算例给定的温度边界条件下, 初期的位移场表现出内径向内, 外径向外逐步膨胀的特点, 此时径向位移的最大值并不在圆柱体的表面 ($\tau = 0.025$ 到 0.1), 随后圆柱整体向外膨胀。

由图 2~ 4 可以看出, 径向正应力 σ_{rr} 均为压应力, 其数量级比环向正应力小, 要注意的是, σ_{rr} 的最大值既不是发生在温度场作用的瞬间, 也不是发生在稳态。与 Kardomateas 给出的结论不同, 圆管内环向应力 $\sigma_{\theta\theta}$ 分布随时间变化比较复杂, 但沿径向总体体现为内压外拉的趋势。温度场作用初期有很大的轴向应力, 稳态时很小。

3) 采用 Mathematica 计算可以解决 Bessel 函数的大宗量问题。

[参 考 文 献]

[1] Lekhnitskii S.G. Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body [M]. Moscow: Mir Publishers, 1981.
 [2] Sherrer R.E. Filament wound cylinder with axial symmetric loads[J]. Journal of Composite Material, 1967, 1(3): 344—355.
 [3] Pagano N.J. The stress field in a cylindrically anisotropic body under two dimensional surface traec

- tion[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1972, **39**(6): 791—796.
- [4] Kalam M A, Tauchert T R. Stresses in an orthotropic elastic cylinder due to a plane temperature distribution $T(r, \theta)$ [J]. Journal of Thermal Stresses, 1978, **1**(1): 13—24.
- [5] Hyer M W, Cooper D E. Stresses and deformations in composite tubes due to a circumferential temperature gradient[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1986, **53**(6): 757—764.
- [6] Kardomateas G A. Transient thermal stress in cylindrically orthotropic composite tubes[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1989, **56**(4): 411—417. (see also Errata[J]. Ibid, 1989, **58**: 909)
- [7] Kardomateas G A. The initial phase of transient thermal stresses due to general boundary thermal loads in orthotropic hollow cylinders[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1990, **57**(6): 719—724.

Analysis of Transient Thermal Stress in Cylindrically Orthotropic Tubes

LING Dao_sheng

(Department of Civil Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, P. R. China)

Abstract: The incorrect deduction of equations in the research works devoted to the studies of transient stress in cylindrically orthotropic tubes and done by Kardomateas (Journal of Applied Mechanics, 1989, 1990) leads to the wrong results. The errata(1991) correct the deduction error, but do not give the right numerical results. All errors are corrected, and the Mathematica is adopted to solve the large argument problem for Bessel function. A theoretical solution of the transient thermal stresses in tubes with uniform form is presented, and a numerical example is studied.

Key words: cylindrically orthotropic; transient thermal stress; composite tube