

文章编号: 1000_0887(2003) 12_1309_10

污染物在非饱和带内运移的流固耦合数学模型及其渐近解*

薛 强¹, 梁 冰¹, 刘晓丽¹, 李宏艳²

(1. 辽宁工程技术大学 力学与工程科学系, 辽宁阜新 123000;
2. 北京师范大学 环境科学研究所, 北京 1000875)

(刘宇陆推荐)

摘要: 污染物在非饱和带中运移过程是多组分多相渗流问题。在考虑气相的存在对水相影响的前提下, 基于流固耦合力学理论, 建立了污染物在非饱和带内运移的流固耦合数学模型。对该强非线性数学模型采用摄动法及积分变换法进行拟解析求解, 得出了解析表达式。对非饱和带内的孔隙压力分布、孔隙水流速以及污染物的浓度在耦合与非耦合气相条件下的分布规律进行解析计算。对该渐近解与 Faust 模型的计算结果进行了对比分析, 结果表明: 该模型解与 Faust 解基本吻合, 且气相作用以及介质的变形对溶质的输运过程产生较大的影响, 从而验证了解析表达式的正确性和实用性。这为定量化预报预测污染物在非饱和带中迁移转化和实验室确定压力_饱和度_渗透率三者之间的关系提供了可靠的理论依据。

关键词: 污染物运移; 非饱和带; 数学模型; 流固耦合; 渐近解
中图分类号: TU411 **文献标识码:** A

引 言

污染物在非饱和带内的运移问题引起了国内外广大学者的高度重视。早在 60 年代, 国外开始对土壤和地下水污染问题进行研究^[1]。近几年来, 在国内, 水文地质领域、石油工程领域以及环境工程等领域对污染物的迁移与转化问题也进行了深入的研究^[2,3]。到目前为止, 已经提出了部分有关污染物在非饱和带中运移的数学模型, 如 Paker^[4] 等人运用多相流理论研究多孔介质中石油污染时, 建立了控制水、气和污染物多组分参数本构模型, Abriola 和 Pinder^[5,6] 模拟了石油污染在土壤中迁移转化的过程, T. Kuppasamy^[7] 运用有限元方法计算土壤中多相非溶混渗流问题, Faust^[8] 等人建立了非溶混流体在非饱和带中运移的耦合数学模型。但在上述的数值模拟研究当中, 均考虑了非饱和带内水的运动和污染物随水流的迁移转化问题, 忽视了气相作用以及岩土变形对水渗流的影响。

近年来, 随着流固耦合力学理论和多相流理论的发展, 人们对非饱和带内多孔介质的力学机理有了深刻的认识: 气相的存在对水相的运动产生很大的影响, 从而对污染物在水中的运移

* 收稿日期: 2001_03_30; 修订日期: 2003_05_16

基金项目: 国家“十五”攻关资助项目(2001BA803B0404); 辽宁省自然科学基金资助项目(2001101063)

作者简介: 薛强(1976—), 男, 山东潍坊人, 博士研究生(E-mail: milson_xq@163.com)。

产生影响;岩土在渗流作用下会产生变形,而岩土的变形反过来又会影响流体的渗流。经典渗流力学已进行了广泛研究,但在以往的分析 and 计算中都没有考虑流体流动和岩土变形之间的相互作用以及气相的作用,而且在早期非饱和带研究对象一般只限于水相,只考虑非饱和带内水的流动,忽视了气相的作用,其根据为 Richards 近似方法, Milly 对这一近似方法做了详细的论述^[9]。但近几年来,人们发现在许多情况下,气相的存在对水相的运动产生较大的影响。唐海行等人通过大量的实验资料和野外观测指出:非饱和带中空气对水流入渗有明显的影 响,并采用了折减的饱和渗水系数方法,考虑了气压势作用^[10]。Green 等首先认识到包气带中气相的作用,并把它考虑进一个一维两相有限差模型中去。Touma^[11](1986)、Weir^[12](1992)等通过实验方法模拟了多孔介质中水气两相互不容混流体相互驱替的过程,得出了气体对土壤中水分运移的影响。一方面当空气不能自由排出时,以泡沫的形式存于水中,气体被压缩压力增大,增加了水的流动阻力,从而降低了水的渗透率;另一方面空气在水的驱动下,水气同时流动,由此产生了对水流的阻滞或拖拽作用。此外岩土在流体渗流作用下会产生变形,而岩土的变形反过来又会影 响流体的渗流,两者是相互影响相互作用的。因此,如何建立一个耦合的数学模型就至关重要。上述数学模型求解过程非常复杂,且求解结果只能给出数值的大小,无法用准确的解析表达式定量化的描述污染物迁移的行为。为此,本文在流固耦合力学理论基础上,建立了污染物在土壤中迁移的非线性流固耦合的数学模型,并采用摄动法及积分变换法进行一维拟解析求解。对非饱和带内的孔隙压力分布、孔隙水流速以及污染物的浓度在耦合与非耦合气相的条件下分布规律进行定性分析,并且对该解析解与 Faust 模型的计算结果进行对比验证,验证了解析表达式的正确性和可靠性,这为量化地预测预报污染物的迁移转化问题和实验室确定压力_饱和度_渗透率三者之间的关系提供可靠的理论依据。

1 基本理论

污染物在非饱和带内运移问题属于流固耦合问题,而该问题要用流固耦合方程来描述,应包括应力场方程、渗流场方程和浓度场方程。

建立方程前首先引入几个假设:

- 1) 土体是各项同性的线弹性地质材料。
- 2) 固体骨架的变形遵从 Terzaghi 有效应力规律:

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + p \delta_{ij}, \quad (1)$$

式中 σ_{ij} 为总应力张量, σ'_{ij} 为有效应力张量, p 为孔隙水压力, δ_{ij} 为 Kronecker 符号。

- 3) 土体内水渗流遵守达西定律,即

$$q_i = - \frac{k_i}{\mu \gamma} p_{,i}, \quad (2)$$

式中 q_i 为水渗流速度, k_i 为渗透系数, μ 为液体的粘度, γ 为液体的容重。

1.1 应力场方程

- 1) 应力平衡方程(忽略体积力)

$$\sigma'_{ij,j} = 0; \quad (3)$$

- 2) 几何方程(应变与位移关系)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}); \quad (4)$$

- 3) 本构关系(应力与应变关系)

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G \left[\frac{\nu}{1+\nu} \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij} \right], \quad (5)$$

式中 $G = E / (2(1 + \nu))$, G 为剪切模量, E 为土体的弹性模量, ν 为泊松比, 体积应变 $\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

4) 用位移表示的土体应力平衡方程

由式(1)、(3)、(4)、(5) 联立可得用位移和应力表示的土体应力平衡方程

$$\frac{G}{1-2\nu} u_{j,j} + Gu_{i,jj} + p_{,i} = 0 \quad (6)$$

1.2 渗流场方程

引入水头流动势函数

$$\varphi = z + \frac{p}{\gamma} \quad (7)$$

假定土体的孔隙率为 n , 饱和度为 S , 固体颗粒本身是刚性的, 即

$$\rho_s = \text{const} \quad (8)$$

三相分别用下标: 固相(s), 液相(w), 气相(a) 表示,

由于渗流发生在弹性变形的多孔介质中, 因而不但流体具有一定的渗流速度, 而且固体颗粒也有一定的运动速度, 所以流体速度可表示为

$$V_f = V_r + V_s \quad (f = w, a), \quad (9)$$

其中 V_f 为流体运动的绝对速度, V_s 为固体颗粒运动的绝对速度, V_r 为流体相对于固体颗粒的速度, 其表达式

$$V_r = \frac{1}{nS} q_f \quad (10)$$

式中 q_f 为达西流速, 其表达式为

$$q_f = - \frac{Kk_{rf}}{\mu_Y} \text{grad} \varphi, \quad (11)$$

其中 K 为流体的绝对渗透率, k_{rf} 为流体的相对渗透率

由于流体密度仅是压力 p 的函数, 对于微可压流体, 定义压缩系数为

$$\beta_f = \frac{1}{\rho_f} \frac{d\rho_f}{dp} \quad (f = w, a) \quad (12)$$

由式(12)可以得到

$$\text{grad} \rho_f = \rho_f \beta_f \text{grad} p, \quad \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = \rho_f \beta_f \frac{\partial p}{\partial t} \quad (13)$$

三相的质量守恒方程为

固相:

$$\text{div}[\rho_s(1-n)V_s] + \frac{\partial[\rho_s(1-n)]}{\partial t} = 0 \quad (14)$$

液相:

$$\text{div}[nS\rho_w V_w] + \frac{\partial(nS\rho_w)}{\partial t} = 0 \quad (15)$$

气相:

$$\text{div}[\rho_a n(1-S)V_a] + \frac{\partial[\rho_a n(1-S)]}{\partial t} = 0 \quad (16)$$

对式(7)~(16) 联立推导可得水流的运动方程^[13]

$$\frac{k}{\mu_Y} \cdot \nabla^2 p = \operatorname{div} V_s + n\beta_a \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (17)$$

其中

$$\beta_a = \beta_w + (1 - S)/p. \quad (18)$$

由于

$$V_s = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \varepsilon = \operatorname{div} u = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \quad \operatorname{div} V_s = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \quad (19)$$

所以式(17)变为

$$\frac{k}{\mu_Y} \cdot \nabla^2 p = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + n\beta_a \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (20)$$

对式(6)左边分别对 x, y, z 求导, 然后相加后得

$$\left[\frac{G}{1 - 2\nu} + G \right] \cdot \nabla^2 \varepsilon = \cdot \nabla^2 p. \quad (21)$$

对式(21)两边积分后得

$$\left[\frac{G}{1 - 2\nu} + G \right] \varepsilon = p + f(x, y, z, t). \quad (22)$$

将式(22)代入式(21)得

$$\frac{k}{\mu_Y} \cdot \nabla^2 p = (\alpha + n\beta_a) \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (23)$$

其中 $\alpha = 1/[G/(1 - 2\nu) + G]$.

1.3 浓度场方程

污染物在非饱和带内运移的一维数学模型(忽略化学反应项)

$$\frac{\partial(\theta C)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\theta D \frac{\partial C}{\partial x} \right] - \frac{\partial(qC)}{\partial x}, \quad (24)$$

其中 $\theta = nS$.

由此可以得出污染物在非饱和带内运移的流固耦合的数学模型

$$(I) \begin{cases} \frac{k}{\mu_Y} \cdot \nabla^2 p = (\alpha + n\beta_a) \frac{\partial p}{\partial t}, & (a) \\ q = - \frac{Kk_{rf}}{\mu_Y n S} \operatorname{grad}(p), & (b) \\ \frac{\partial(\theta C)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\theta D \frac{\partial C}{\partial x} \right] - \frac{\partial(qC)}{\partial x}. & (c) \end{cases}$$

1.4 定解条件的确定

考虑如下非饱和带内流体流动问题, 其边界条件及初始条件如下:

1) 渗流场的方程的初始边界条件

$$\textcircled{1} p(x, 0) = p_0; \quad (25)$$

$$\textcircled{2} p(h, t) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (26)$$

2) 浓度场的方程的初始边界条件

①初始条件

$$C(x, 0) = C_i, \quad (27)$$

②Dirichlet 边界条件

$$\frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=\infty} = 0, \quad (28)$$

③Neumann 边界条件

$$-D \frac{\partial C}{\partial t} + \mathcal{V}C \Big|_{x=0} = \mathcal{V}C_0 \tag{29}$$

2 数学模型的解析求解

数学模型 (I) 的求解过程是通过式 (a) 求解得 p , 然后将其传递到式 (b), 求得 q , 最后将 q 代入式 (c), 求得浓度 C 的分布。

式 (a) 属于二阶非线性偏微分方程, 本文采用摄动法进行求解^[14], 具体求解过程如下:

对式 (a) 作如下变化, $\alpha' = \alpha + n\beta$, $\beta = n(1 - S)$, 则式 (a) 变为

$$\frac{k}{\mu_Y} \cdot^2 p = \left[\alpha' + \frac{\beta}{p} \right] \frac{\partial p}{\partial t} \tag{30}$$

其中 β/p 一项表示为气相作用。

设小参数 $\omega = n(1 - S)$, 所以问题式 (30) 可转化为

$$\frac{k}{\mu_Y} \cdot^2 p = \left[\alpha' + \frac{\omega}{p} \right] \frac{\partial p}{\partial t} \tag{31}$$

由此可得由式 (31)、(25) 和 (26) 组成正则摄动问题。

当小参数 $\omega = 0$ 时可以退化为一维抛物线方程的初边值问题可以唯一求解, 对 p 可作如下展开式

$$p = p_1 + \omega p_2 + \omega^2 p_3 + \dots \tag{32}$$

将式 (32) 代入式 (31) 和式 (25)、(26), 合并 ω 的同次幂项可得

$$\omega^0 \begin{cases} \cdot^2 p_1 = \alpha' \frac{\partial p_1}{\partial t}, \\ p_1(x, 0) = p_0, p_1(h, t) = 0, \frac{\partial p_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \end{cases} \tag{33}$$

$$\omega^1 \begin{cases} \cdot^2 p_2 = \alpha' \frac{\partial p_2}{\partial t} + \frac{1}{p_1} \frac{\partial p_1}{\partial t}, \\ p_2(x, 0) = 0, p_2(h, t) = 0, \frac{\partial p_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \end{cases} \tag{34}$$

$$\omega^2 \begin{cases} \cdot^2 p_3 = \alpha' \frac{\partial p_3}{\partial t} + \frac{1}{p_1} \frac{\partial p_2}{\partial t} - \frac{p_2}{p_1^2} \frac{\partial p_1}{\partial t}, \\ p_3(x, 0) = 0, p_3(h, t) = 0, \frac{\partial p_3}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0. \end{cases} \tag{35}$$

对于 (33) 式采用分离变量法进行求解可得如下解答:

$$p_1(x, t) = p_0 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{2}{\beta_m h} \cos(\beta_m x) \cdot \exp\left(-\frac{\beta_m^2}{\alpha'} t\right), \tag{36}$$

其中 $\beta_m = \pi(2m - 1)/(2h)$ 。

对于式 (34)、(35) 均为非齐次定解问题, 它们的定解条件相同, 只是非齐次项有差别, 其类型完全相同, 可以统一写为:

$$\begin{cases} \dot{p}_i = \alpha' \frac{\partial p_i}{\partial t} + f(x, t), \\ p_i(x, 0) = 0, p_i(h, t) = 0, \left. \frac{\partial p_i}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \end{cases} \quad (37)$$

对于式(37)采用积分变换法进行求解。对应于式(37)的特征问题为:

$$\begin{cases} \frac{d^2 y_m}{dx^2} + \beta_n^2 y_m = 0, \\ y_m(h) = 0, \left. \frac{dy_m}{dx} \right|_{x=1} = 0; \end{cases} \quad (38)$$

满足式(38)的特征函数为

$$y_m = \cos \beta_n x, \quad \beta_n = \frac{2n-1}{2h} \pi; \quad (39)$$

积分变换格式为

$$p_i(\beta_m, t) = \int y_m p_i(x, t) dx; \quad (40)$$

逆积分变换

$$p_i(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y_m(\beta_m, t)}{N(\beta_m)} p_i(\beta_m, t), \quad (41)$$

其中

$$N(\beta_m) = \int_0^h \cos(\beta_m x) dx = \frac{1}{2}. \quad (42)$$

将式(37)两边同时乘以 y_m , 得

$$\int_0^h y_m \frac{\partial^2 p_i}{\partial x^2} dx = \int_0^h y_m \alpha' \frac{\partial p_i}{\partial t} dx + \int_0^h y_m f_i(x, t) dx; \quad (43)$$

右端项化简为

$$\int_0^h y_m \alpha' \frac{\partial p_i}{\partial t} dx = \alpha' \frac{\partial p_i}{\partial t}, \quad \int_0^h y_m f_i(x, t) dx = f_i(\beta_m, t); \quad (44)$$

左端项进行两次分部积分简化为

$$\begin{aligned} \int_0^h y_m \frac{\partial^2 p_i}{\partial x^2} dx &= \left[y_m \frac{\partial p_i}{\partial x} - p_i \frac{\partial y_m}{\partial x} \right] \Big|_0^h + \int_0^h \frac{\partial^2 y_m}{\partial x^2} p_i(x, t) dx = \\ &= 0 - \beta_m^2 \int_0^h y_m p_i(x, t) dx = -\beta_m^2 p_i. \end{aligned} \quad (45)$$

式(37)的定解条件通过积分变换变为

$$p_i(0) = 0 \quad (46)$$

将式(44)、(45)代入(43)得定解问题

$$\begin{cases} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\beta_m^2}{\alpha'} p_i = -\frac{f_i(\beta_m, t)}{\alpha'}, \\ p_i(0) = 0 \end{cases} \quad (47)$$

满足式(47)的解为

$$\begin{aligned} p_i(\beta_m, t) &= -\frac{\exp(-t\beta_m^2/\alpha')}{\alpha'} \int_0^h f_i(\beta_m, t) \exp\left(\frac{\beta_m^2}{\alpha'} t\right) dt = \\ &= -\frac{\exp(-t\beta_m^2/\alpha')}{\alpha'} \int_0^h \int_0^h \cos(\beta_m x) \cdot f_i(x, t) \exp\left(\frac{\beta_m^2}{\alpha'} t\right) dx dt. \end{aligned} \quad (48)$$

为了简化计算,在此只进行 $f_1(x, t)$ 的计算

$$f_1(x, t) = \frac{1}{p_1} \frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{\sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-1} \left[-\frac{2\beta_p}{\alpha h} \right] \cos(\beta_p x) \cdot \exp\left[-\frac{\beta_p^2}{\alpha} t\right]}{\sum_{q=1}^{\infty} (-1)^{q-1} \left[\frac{2}{\beta_q h} \right] \cos(\beta_q x) \cdot \exp\left[-\frac{\beta_q^2}{\alpha} t\right]}, \quad (49)$$

所以

$$p_2(\beta_m, t) = \frac{\exp(-t\beta_m^2/\alpha') \int_0^t \int_0^h \cos(\beta_m x) \times \frac{\sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-1} \beta_p \cos(\beta_p x) \cdot \exp\left[-\frac{\beta_p^2}{\alpha} t\right]}{\sum_{q=1}^{\infty} (-1)^{q-1} \left[\frac{1}{\beta_q} \right] \cos(\beta_q x) \cdot \exp\left[-\frac{\beta_q^2}{\alpha} t\right]} \exp\left[\frac{\beta_m^2}{\alpha} t\right] dx dt}{\sum_{q=1}^{\infty} (-1)^{q-1} \left[\frac{1}{\beta_q} \right] \cos(\beta_q x) \cdot \exp\left[-\frac{\beta_q^2}{\alpha} t\right]} \exp\left[\frac{\beta_m^2}{\alpha} t\right] dx dt \quad (50)$$

将式(50)代入式(41)得

$$p_2(x, t) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} y_m(\beta_m, t) p_2(\beta_m, t) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\beta_m x) \cdot p_2(\beta_m, t) \quad (51)$$

将式(51)、式(36)代入式(32)可得式(30)的一阶渐近解

$$p = p_1 + \Phi_2, \\ p(x, t) = p_0 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{2}{\beta_m h} \cos(\beta_m x) \cdot \exp\left[-\frac{\beta_m^2}{\alpha} t\right] + \frac{2n(1-S)}{(\alpha')^2} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\beta_m x) \cdot \exp\left[-\frac{\beta_m^2}{\alpha} t\right] \int_0^t \int_0^h \cos(\beta_m x) \times \frac{\sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-1} \beta_p \cos(\beta_p x) \cdot \exp\left[-\frac{\beta_p^2}{\alpha} t\right]}{\sum_{q=1}^{\infty} (-1)^{q-1} \left[\frac{1}{\beta_q} \right] \cos(\beta_q x) \cdot \exp\left[-\frac{\beta_q^2}{\alpha} t\right]} \exp\left[\frac{\beta_m^2}{\alpha} t\right] dx dt \quad (52)$$

对于浓度场的数学模型由控制方程(24)和定解条件(27)~(29),通过 Laplace 变换可以得到其解析解

$$\frac{C - C_i}{C_0 - C_i} = 1 - \frac{1}{2} \left[\operatorname{erfc} \left[\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} (2 - \alpha) \right] \right] + \exp(\beta) \cdot \operatorname{erfc} \left[\left[\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} (2 + \alpha) \right] \right], \quad (53)$$

其中 $\alpha = \frac{vt}{x}$, $\beta = \frac{vx}{D}$, $v = \frac{q}{\theta}$.

将式(52)代入数学模型中(I)的式(b)即可得到流速 q ,然后代入式(53)可得污染物浓度的分布 C .

3 渐近解的理论分析及验证

为了验证上述所建立的流固耦合数学模型渐近解的正确性和实用性,本文考虑一个3 m宽2 m深水平方向无限长的非饱和土层.土层初始状态含有常浓度的污染物,边界为定压边界.其参数取值为^[15]: 岩石的弹性模量3.6 GPa,泊松比0.3,孔隙率0.322,初始孔隙压力0.15 MPa,岩石骨架的体积压缩模量61.46 GPa,流体的体积压缩模量1.724 GPa,流体的相对渗透率为2,流体的绝对渗透率 $2.96 \times 10^{-11} \text{ m}^2$,流体的粘性系数为 $2 \times 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$.; 初始条件: $C(x, 0) = 1 \text{ mol/m}^3$, $p(x, 0) = 0.15 \text{ MPa}$; 边界条件: $C(0, t) = 1 \text{ mol/m}^3$, $C(\infty, t) = 0$.

利用本文考虑气相作用所推导出的污染物在非饱和带中运移模型的渐近解,与未耦合气

相作用以及 Faust 模型进行对比计算。计算结果如图 1~ 4 所示。

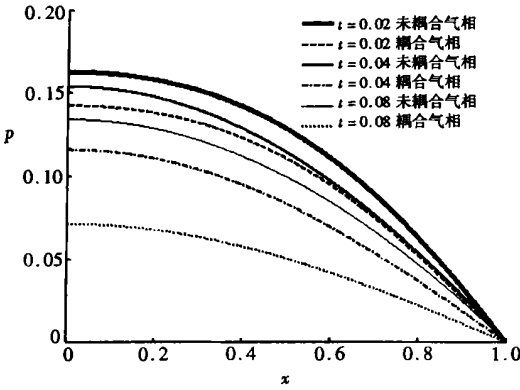


图 1 不同时间内耦合与非耦合气相孔隙压力的水平分布

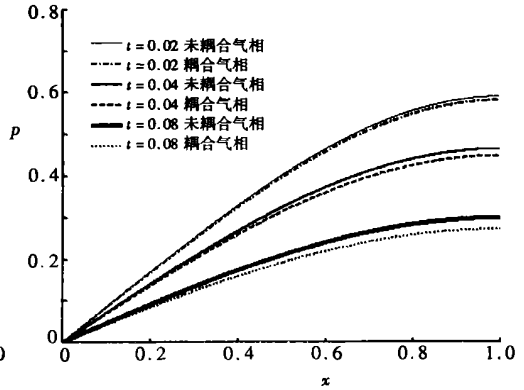


图 2 不同时间内耦合与非耦合气相孔隙水流速的水平分布曲线

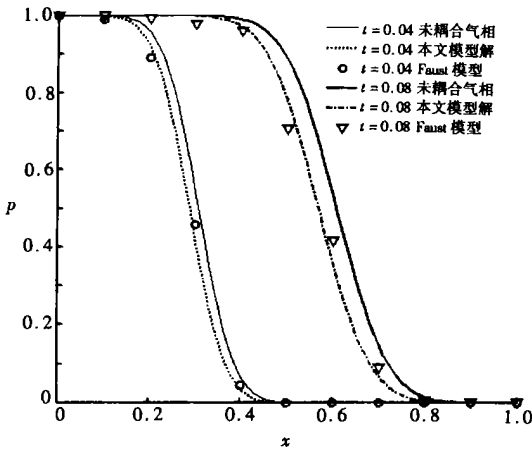


图 3 本文模型解与非耦合气相污染物的浓度与 Faust 模型对比

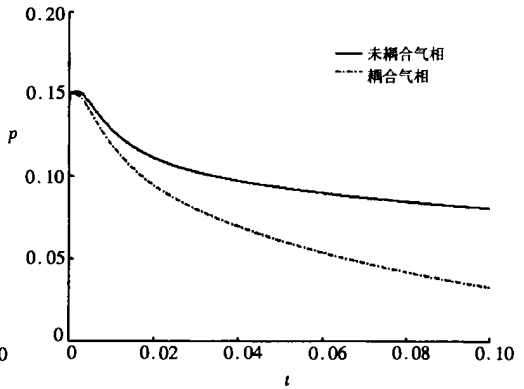


图 4 耦合与非耦合气相孔隙压力随时间变化的水平分布曲线

4 结 论

从以上的理论计算和模型对比分析,可以得出如下结论:

1) 考虑流体的压缩性与固体变形耦合作用的前提条件下,建立了污染物在非饱和带内运移的耦合数学模型,并采用了摄动法及积分变换法对流固耦合非线性方程进行解析求解。

2) 从不同时间内孔隙压力分布、孔隙水流速分布曲线图 1、图 2 可以看出,耦合气相的孔隙压力与流速计算数值小于非耦合气相的作用时的计算数值,且随着时间和距离的增长,其相对差值逐渐增大,从而进一步说明:在非饱和带水气流动过程中,气体被压缩压力增大,增加了水的流动阻力,对水流产生阻滞作用,降低了水的渗透率,导致水流速降低,这与前面的理论分析是相一致的。因此,在预报预测污染物浓度时必须考虑气相在耦合模型中的作用。

3) 用本文所推得拟解析解的计算结果与 Faust 模型利用有限元方法所得结果以及未耦合气相作用时计算结果进行对比,如图 3 所示。从图中可以看出,本模型渐近解的计算结果与 Faust 方法的计算结果的规律性是一致的,且计算精度略高于 Faust 方法和未耦合气相所得到

的解析解。原因由于多孔介质中水气运移时气体被压缩,流速受阻滞作用而降低(图 2),从而导致其迁移的浓度变化减慢。

4) 从不同时间内孔隙压力计算结果可看出,考虑耦合作用时孔隙压力小于非耦合作用的孔隙压力,原因是由于孔隙压力降低导致岩土被压密,渗透率降低,且相对差别随着时间的延长愈加明显,反映了气相在耦合过程中的重要性。

5) 考虑气体的作用条件下污染物运移耦合问题,能够真实反映污染物迁移的实际过程及其物理本质,可为准确预报预测污染物的运移和实验室确定压力_饱和度_渗透率三者之间的关系提供可靠的理论依据。

总之,通过上述理论分析和渐近解的求解可以看出,本模型与 Faust 模型相对比,其变化规律是相一致的,表明该模型的拟解析解的正确性和可靠性。因此,在研究污染物在非饱和带运移问题时,考虑气相作用的影响下建立耦合的数学模型是很有必要的。

致谢 感谢东北大学岩石破裂和失稳研究中心徐曾和教授的热心帮助与指导。

[参 考 文 献]

- [1] Kandil H, Miller C T, Skaggs R W. Modeling long term solute transport in drained unsaturated zones [J]. *Water Resources Research*, 1992, **28**(10): 2799—2809.
- [2] 李韵珠,李保国. 土壤溶质的运移[M]. 北京: 科学出版社, 1998, 113—130.
- [3] 李锡夔. 饱和_非饱和土壤中污染物运移过程的数值模拟[J]. *力学学报*, 1998, **30**(3): 321—332.
- [4] Parker J C. A parametric model for constitutive properties governing multiphase flow in porous media [J]. *Water Resource Research*, 1987, **23**(4): 619—623.
- [5] Abriola L M, Pinder G F. A multiphase approach to the modeling of porous media contamination by organic compounds_2: Numerical simulation[J]. *Water Resource Research*, 1985, **21**(1): 19—27.
- [6] Abriola L M, Pinder G F. A multiphase approach to the modeling of porous media contamination by organic compounds_1: Equation development[J]. *Water Resource Research*, 1985, **21**(1): 11—18.
- [7] Kuppasamy T. Finite element analysis of multiphase immiscible flow through soils[J]. *Water Resource Research*, 1987, **23**(4): 625—631.
- [8] Faust C R. Transport of immiscible fluids within and below the unsaturated zone: A numerical model [J]. *Water Resource Research*, 1985, **21**(4): 587—596.
- [9] Milly C D. Advances in modeling of water in the unsaturated zone [J]. *Transport in Porous Media*, 1988, **3**(2): 491—514.
- [10] 唐海行,张和平. 考虑气压势影响的降雨入渗数值模拟研究[J]. *水科学进展*, 1996, **7**(1): 8—13.
- [11] Touma J, Vaudin M. Experimental and numerical analysis of two phase infiltration in a partially saturated soil [J]. *Transport in Porous Media*, 1986, **12**(1): 27—55.
- [12] Weir G J, Kissling W M. The influence of gasflow on the vertical infiltration of water into soil [J]. *Water Resource Research*, 1992, **28**(10): 2765—2772.
- [13] 贝尔 J. 多孔介质流体动力学[M]. 李竟生,陈崇希译. 北京: 中国建筑工业出版社, 1983, 158—166.
- [14] 钱伟长. 奇异摄动理论在力学中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1981, 186—191.
- [15] Kurashige M. Tansient response of a fluid saturated poroelastic layer subjected to a sudden fluid pressure rise [J]. *J Appl Mech*, 1982, **49**(2): 492—496.

Fluid_Solid Coupling Mathematical Model of Contaminant Transport in Unsaturated Zone and Its Asymptotical Solution

XUE Qiang¹, LIANG Bing¹, LIU Xiao_li¹, LI Hong_yan²

(1. Department of Mechanics Engineering and Science, Liaoning Technical University, Fuxin, Liaoning 123000, P. R. China;

2. Institute of Environmental Sciences, Beijing Normal University, Beijing 100875, P. R. China)

Abstract: The process of contaminant transport is a problem of multicomponent and multiphase flow in unsaturated zone. Under the presupposition that gas existence affects water transport, a coupled mathematical model of contaminant transport in unsaturated zone has been established based on fluid_solid interaction mechanics theory. The asymptotical solutions to the nonlinear coupling mathematical model were accomplished by the perturbation and integral transformation method. The distribution law of pore pressure, pore water velocity and contaminant concentration in unsaturated zone has been presented under the conditions of with coupling and without coupling gas phase. An example problem was used to provide a quantitative verification and validation of the model. The asymptotical solution was compared with Faust model solution. The comparison results show reasonable agreement between asymptotical solution and Faust solution, and the gas effect and media deformation has a large impact on the contaminant transport. The theoretical basis is provided for forecasting contaminant transport and the determination of the relationship among pressure_saturation_permeability in laboratory.

Key words: contaminant transport; unsaturated zone; numerical model; fluid_solid coupling interaction; asymptotical solution