

文章编号: 1000-0887(2003) 11-1141-10

# 迷宫密封不平衡转子动力系统的 稳定性与分岔\*

李松涛<sup>1</sup>, 许庆余<sup>1</sup>, 万方义<sup>1</sup>, 张小龙<sup>2</sup>

(1. 西安交通大学 建力学院 西安 710049;

2. 西安建筑科技大学, 西安 710052)

(何友声推荐)

**摘要:** 研究迷宫密封对不平衡转子系统动力稳定性的影响。存在不平衡量的转子在旋转过程中受到周期激励, 低转速时, 转子作与激励同频率的周期运动, 随着转速的提高, 达到一定阈值时周期运动开始失稳。对迷宫密封的气动力采用 Muszynska 非线性力学模型, 用打靶法求解转子运动周期解, 并根据 Floquet 理论分析了周期解的稳定性及失稳后的动力学特性。

**关键词:** 非线性振动; 稳定性; 密封; 转子; 打靶法

**中图分类号:** O347.6      **文献标识码:** A

## 引 言

迷宫式密封广泛用于透平压缩机械中, 起阻滞流体泄漏的作用, 在一定条件下, 密封力也可能引起转子的自激振动, 成为影响转子系统动力稳定性的重要因素之一, 国内外很多学者都在研究这个问题<sup>[1~6]</sup>。对于密封力产生的机理, 一般认为, 密封激振力是由于转子在密封腔中偏置时, 密封周向存在不均匀分布压力所引起的。转子的扰动和密封中的流体相互作用, 所产生的密封激振力具有非线性的特性。目前分析转子密封系统的动力稳定性主要采用八参数模型<sup>[1~2]</sup>和 Muszynska 模型<sup>[3~6]</sup>来描述密封力。同八参数模型相比较而言, Muszynska 模型物理意义明确, 形势简洁, 能较好的反映密封力的非线性特性, 并得到了实验观察的验证<sup>[4]</sup>。文献[6]研究了单盘 Jeffcott 转子\_密封系统的平衡点失稳问题, 但实际上转子总存在不平衡量, 因此系统受到周期激励。在转速较低时, 周期激励使系统作与激励同频率的周期运动, 达到一定转速后, 周期运动失稳。本文采用打靶法求系统的周期解并用 Floquet 理论研究周期解的稳定性、失稳转速和失稳后转子运动的动力学特性, 同时讨论盘的不平衡量和密封参数对稳定性的影响。

## 1 密封力模型<sup>[3~7]</sup>

Muszynska 模型反映了流体激振力的非线性特性<sup>[3~7]</sup>, 其表达式为

\* 收稿日期: 2002\_03\_26; 修订日期: 2003\_06\_23

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50275113)

作者简介: 李松涛(1974—), 女, 河北武邑人, 博士(E-mail: leestmail@163.com)。

$$\begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K - m_f \tau^2 \omega^2 & \tau \omega D \\ - \tau \omega D & K - m_f \tau^2 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D & 2\tau \omega m_f \\ - 2\tau \omega m_f & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_f & 0 \\ 0 & m_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Muszynska 认为流体作用力与流体一起,以平均角速度  $\tau\omega$  旋转,  $\tau$  是流体周向平均流速比,是反映流体动力特性的关键量. 式(1)中  $\omega$  是转子旋转的角速度,  $K, D, m_f$  为密封力的当量刚度, 当量阻尼, 当量质量.  $K, D, \tau$  均为扰动位移  $X, Y$  的非线性函数, 依据文献[5~6], 可表达为

$$\begin{cases} K = K_0(1 - e^2)^{-n}, & D = D_0(1 - e^2)^{-n} \quad (n = 0.5 \sim 3), \\ \tau = \tau_0(1 - e)^b \quad (0 < b < 1), \end{cases} \quad (2)$$

式(2)中,  $e = \sqrt{X^2 + Y^2}/c$  为转子的相对偏心距,  $c$  为密封间隙.  $n, b, \tau_0$  用来描述具体的密封参数, 一般  $\tau_0 < 0.5$ . 本文采用 Muszynska 模型研究转子系统的稳定性, 密封力的特性系数  $K_0, D_0, m_f$  采用 Black\_Childs 公式计算<sup>[7]</sup>, 见附录.

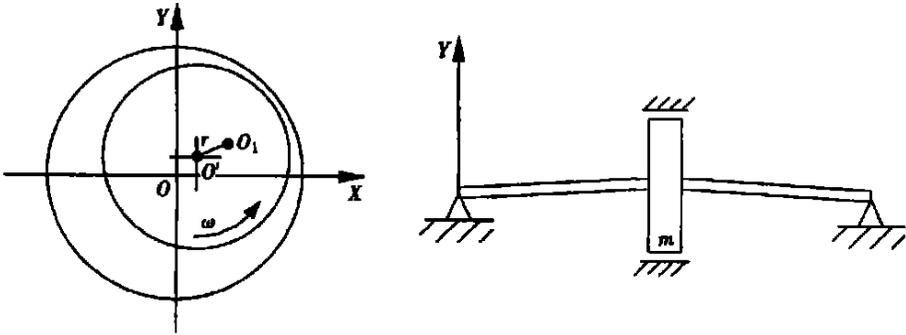


图1 Jeffcott 转子计算模型

## 2 迷宫密封\_转子系统动力学方程

设转子为两端简支的单圆盘系统, 密封力等效作用在圆盘处, 转子存在不平衡量, 在坐标系  $OXY$  中, 圆盘几何中心为  $O$ , 轴心为  $O'$ , 质量偏心为  $O_1$ , 偏心距为  $r$ , 如图1所示, 则系统动力学方程为

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_e & 0 \\ 0 & D_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_e & 0 \\ 0 & K_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ mg \end{bmatrix} + mr\omega^2 \begin{bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{bmatrix}, \quad (3)$$

式(3)中,  $m$  为圆盘质量,  $K_e$  为转轴刚度,  $D_e$  为转子阻尼,  $\omega$  为转子转速, 假设转轴质量不计.

令  $x = X/c, y = Y/c, \omega t = t, M = m + m_f, \rho^2 = mr/Mc$ , 将式(3)中的密封力  $F_X, F_Y$  移至左端, 与左端各项合并, 对其进行无量纲变换得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \\ -D_2 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ -K_2 & K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} + \rho^2 \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad (4)$$

式(4)中

$$\begin{cases} K_1 = \frac{K_e + K - T^2 \omega^2 m_f}{M \omega^2}, & K_2 = \frac{T D}{M \omega}, & D_1 = \frac{D_e + D}{M \omega}, \\ D_2 = \frac{2 T m_f}{M}, & G = -\frac{m g}{M c \omega^2}. \end{cases} \quad (5)$$

### 3 周期解

质量偏心对转子系统产生周期激励,在低转速下的系统不平衡响应为与转速同频率的周期解,转速达到一定值时,周期解将失稳。求非线性系统的周期解,常用的数值方法有:打靶法;Poincare 映射法;有限差分法;谐波平衡法等。本文采用打靶法求转子系统的周期解。

将式(4)写为状态方程形式

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho^2 \cos t \\ G + \rho^2 \sin t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & K_1 & K_2 \\ -D_2 & D_1 & -K_2 & K_1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y, x, y, \omega, t) \\ f_2(x, y, x, y, \omega, t) \\ f_3(x, y, x, y, \omega, t) \\ f_4(x, y, x, y, \omega, t) \end{pmatrix} \quad (6)$$

对一般的非自治系统<sup>[8,9]</sup>

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t, \rho) & (x \in R^n, t \in \mathbf{R}, \rho \in \mathbf{R}), \\ f(x, t, \rho) = f(x, t + T, \rho). \end{cases} \quad (7)$$

打靶法的实质在于把边值问题转化为初值问题求解,求非线性动力系统的周期解就是求如下形式的边值问题

$$\dot{x} = f(x, t, g(s)), \quad (8)$$

$$r(s) = x(0, s) - x(T, s) = 0. \quad (9)$$

其中  $s \in R^n$  为待求参数,一旦  $s$  确定,初值  $x(0, s)$  也就已知了,然后解初值问题,便可求得  $x(T, s)$ 。打靶法的目的就是寻找  $s$ ,使边界条件式(9)得以满足,为求  $s$  先要给定初值  $s^0$ ,应用

Newton\_Raphson 迭代法,设  $s^i$  已经求得

$$s^{i+1} = s^i - Dr(s^i)^{-1} \cdot r(s^i), \quad (10)$$

其中

$$Dr(s) = \frac{\partial r(s)}{\partial s} = \frac{\partial x(0, s)}{\partial s} - \frac{\partial x(T, s)}{\partial s} - \frac{\partial x(T, s)}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial s}. \quad (11)$$

$$\text{因为 } \frac{\partial x(T, s)}{\partial T} = \dot{x}(T) = f(T, x, s), \quad (12)$$

$$\text{所以 } Dr(s) = \frac{\partial x(0, s)}{\partial s} - \frac{\partial x(T, s)}{\partial s} - f(T, x, s) \frac{\partial T}{\partial s}. \quad (13)$$

在式(13)中  $\frac{\partial x(T, s)}{\partial s}$  可由如下初值问题求得

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)' = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial s}, \\ \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right) \Big|_{t=0} = \frac{\partial x(0, s)}{\partial s}, \end{cases} \quad (14)$$

在本文所研究的系统中,振动周期  $T$  已知,是固定边界条件,所以  $\partial T / \partial s = 0$ ,  $g(s)$  不存在。取  $s = [x_0, y_0, x_0, y_0]^T$ , 则  $\partial x^T / \partial s = \left( \partial x / \partial s \right)_{t=T}$  是下述微分方程初值问题的解在  $t = T$  时的值

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \right)' = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}, \\ \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \right)_{t=0} = \frac{\partial \mathbf{x}^0}{\partial s} = \mathbf{I} \quad (\mathbf{I} \text{ 为单位矩阵}). \end{cases} \quad (15)$$

#### 4 稳定性分析

应用打靶法求出周期解  $\mathbf{x}^*(t)$  后, 本文根据 Floquet 理论判定周期解的稳定性。

求解初值问题

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}(0)} \right)^s = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(t, \mathbf{x}^s) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}(0)}, \\ \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}(0)} \right)_{t=0} = \mathbf{I}. \end{cases} \quad (16)$$

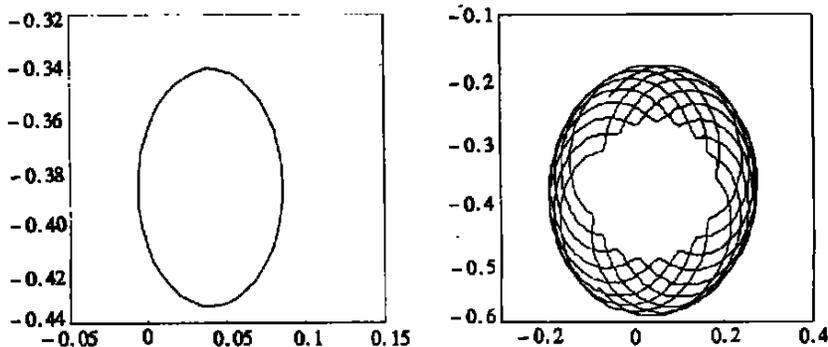
Floquet 乘子  $\lambda$  即为  $\left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}(0)} \right)_{t=T}$  的特征值。根据 Floquet 理论<sup>[8]</sup>, 若所有 Floquet 乘子的模均小于 1, 周期解是稳定的; 若 Floquet 乘子的模中至少有一个大于 1, 则周期解是不稳定的; 若所有 Floquet 乘子的模均小于 1, 且当对应的模为 1 的乘子对应的初等因子均为一次的, 则周期解是稳定的; 若至少有一个模为 1 的乘子有二次或三次以上的初等因子, 则周期解是不稳定的。

表 1 不同偏心距  $r$  时及  $\omega_c$  相应 Floquet 乘子  $\lambda$

$r/(\text{mm})$	$\omega_c/(\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})$	Floquet 乘子 $\lambda$		
		实部	虚部	模
0.1	280.2	- 0.624 0	+ 0.781 4	1.000 0
		- 0.624 0	- 0.781 4i	1.000 0
		- 0.470 3	+ 0.590 3i	0.754 7
		- 0.470 3	- 0.590 3i	0.754 7
0.2	295.2	- 0.531 0	+ 0.847 3i	1.000 0
		- 0.531 0	- 0.847 3i	1.000 0
		- 0.404 3	+ 0.646 6i	0.762 6
		- 0.404 3	- 0.646 6i	0.762 6
0.3	323.5	- 0.364 9	+ 0.931 1i	1.000 0
		- 0.364 9	- 0.931 2i	1.000 0
		- 0.282 5	+ 0.723 0i	0.776 3
		- 0.282 5	- 0.723 0i	0.776 3
0.4	372.0	- 0.119 8	+ 0.992 8i	1.000 0
		- 0.119 8	- 0.992 8i	1.000 0
		- 0.094 6	+ 0.791 0i	0.796 7
		- 0.094 6	- 0.791 0i	0.796 7

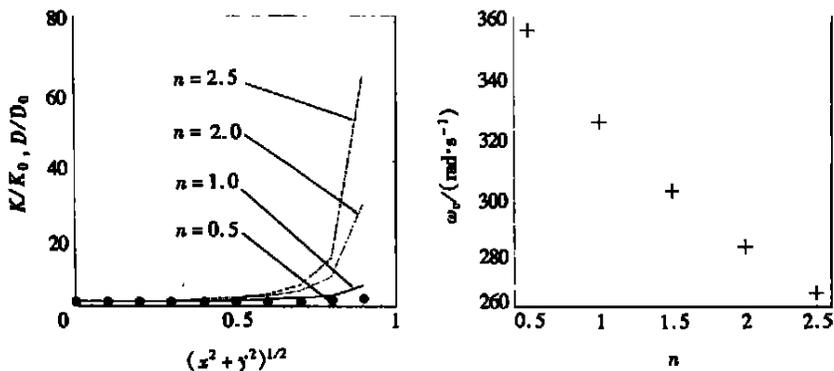
对本文所研究的转子-密封系统, 转速较低时, 系统存在稳定的周期解, Floquet 乘子的模均小于 1, 转速提高到失稳转速时, 周期解开始失稳, 出现模为 1 的 Floquet 乘子, 失稳后的转子产生了大幅度的涡动。如图 1 所示的 Jeffcott 转子, 转子质量  $m = 50 \text{ kg}$ , 转子刚度  $K_e = 0.5 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ , 密封间隙  $c = 2.5 \text{ mm}$ , 轴向流速  $v_a = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , 进口损失系数  $z = 0.1$ ,  $n = 2$ ,  $b =$

0.5,  $m_0 = -0.25$ ,  $n_0 = 0.079$ , 取不动偏心量计算得失稳转速及相应转速下的 Floquet 乘子如表 1, 在失稳转速处有模为 1 的 Floquet 乘子, 其余乘子的模均小于 1. 计算结果表明随不平衡量的增加, 失稳转速  $\omega_c$  提高, 这与工程实践相吻合. 适当提高不平衡量可以改善转子的稳定性, 但也会增大周期解的涡动幅度, 这是要考虑的. 图 2 为相应表 1 参数下  $r = 0.1 \text{ mm}$  时转子失稳前后的无量纲稳态轴心轨迹.



(a)  $\omega = 270 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  (b)  $\omega = 290 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

图 2  $r = 0.1$  时失稳前后轴心轨迹



(a) (b)

图 3 密封参数  $n$  与失稳转速的关系

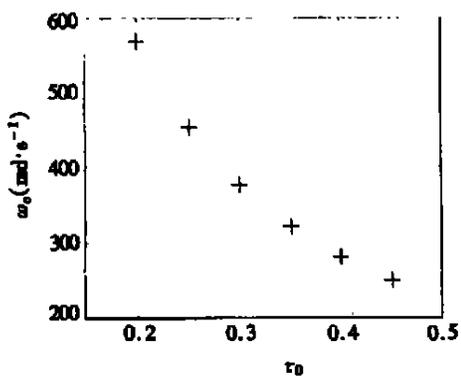


图 4  $\omega_c - \tau_0$  关系曲线

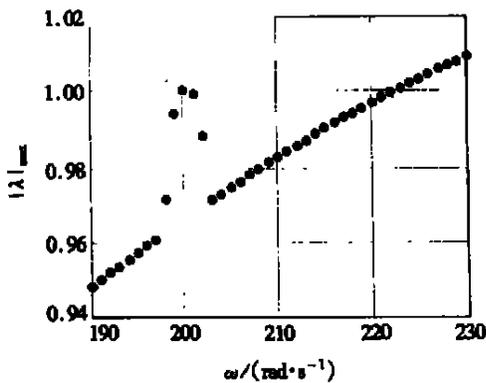
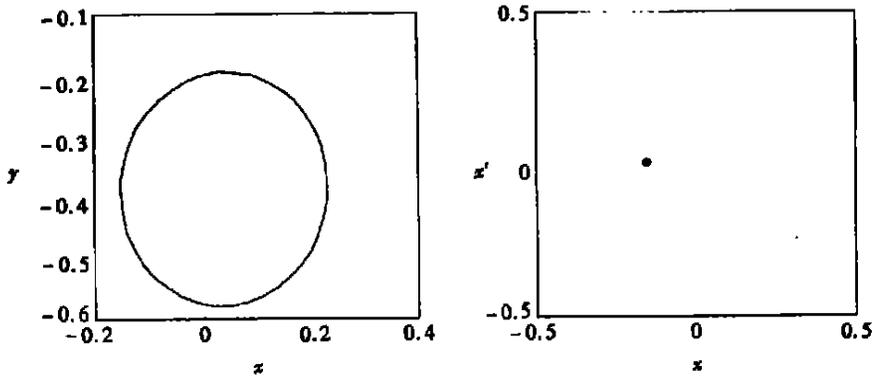
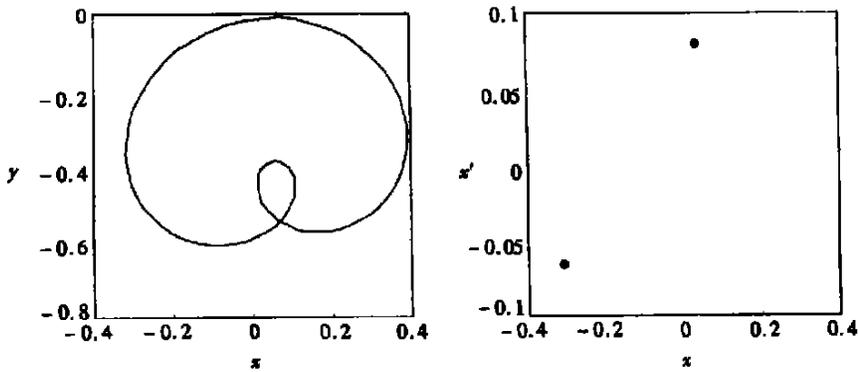


图 5  $|\lambda|_{\max} - \omega$  关系曲线



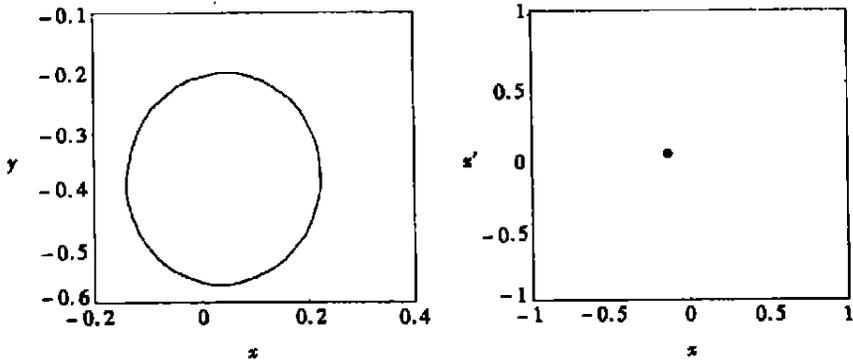
(a) 轴心轨迹

(b) Poincaré 图

图 6  $\omega = 190 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ 

(a) 轴心轨迹

(b) Poincaré 图

图 7  $\omega = 200 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ 

(a) 轴心轨迹

(b) Poincaré 图

图 8  $\omega = 205 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ 

为进一步研究转子的稳定性, 改变密封参数计算临界失稳转速, 发现失稳转速对密封的参数  $n$  很敏感。如图 3(a) 所示, 小偏心率时,  $n$  越小, 则密封力的当量刚度  $K$ 、当量阻尼  $D$  的非线性越弱, 失稳转速也就越高(见图 3(b)), 可见改变参数  $n$  是提高转子稳定性的有效途径之一。

在式(1)中, 交叉刚度  $\tau\omega D$  构成对转子的切向循环力是转子失稳的主要根源, 由此可见,

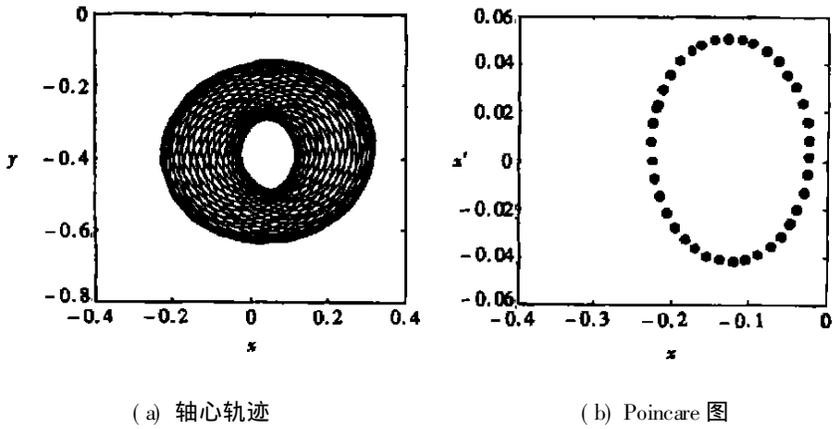


图 9  $\omega = 223 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

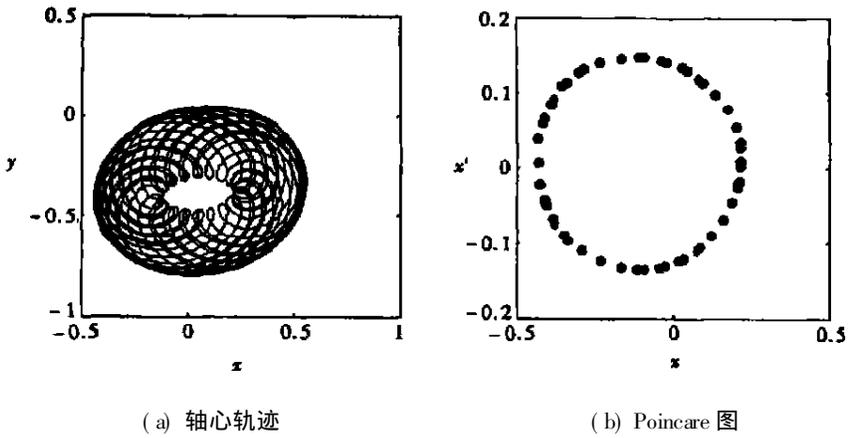


图 10  $\omega = 245 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

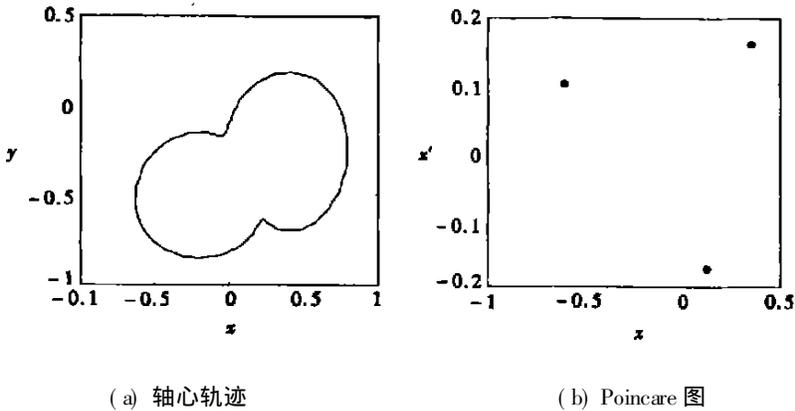


图 11  $\omega = 290 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

较大的流体阻尼不利于转子稳定, 而降低  $\tau$  则可提高其稳定性。由式(2)可以看出参数  $e$ ,  $n$  不变时,  $\tau$  与  $\tau_0$  成正比, 因此改变  $\tau_0$  将影响失稳转速。文献[1, 2]中所述的反预旋, 设置周向挡片都是改变  $\tau_0$  的有效方法。图4所示的计算结果验证了随  $\tau_0$  的降低, 失稳转速将提高。

现讨论周期解失稳的形式。根据 Floquet 乘子在复平面上通过单位圆的情况, 周期解失稳常见的有三种形式: 如果在  $-1$  处通过单位圆, 那么原来稳定的周期解将发生失稳并分岔出一

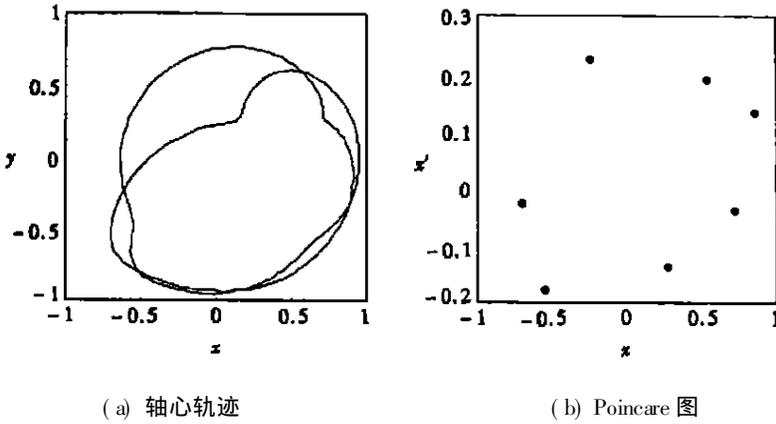


图 12  $\omega = 340 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

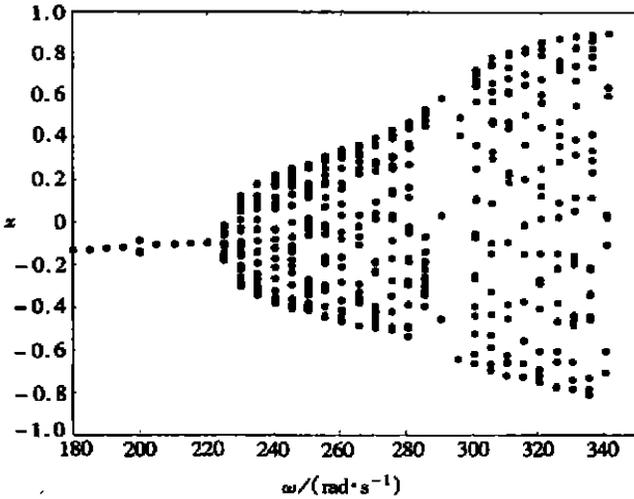


图 13 分岔图

个两倍的周期解分支,即倍周期分岔;当 Floquet 乘子通过+ 1 和单位圆相交时将发生鞍结分岔或称极限点分岔;在一对复共轭特征值 and 单位圆相交时,原来的周期解变成不稳定的,在分岔点出现稳定或不稳定的环面。根据文献[ 10, 11],如果临界 Floquet 指数  $\sigma(\lambda = e^{\sigma T}, \lambda$  为 Floquet 乘子)的虚部  $\Omega_0$  满足条件

$$\frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{n}{m} \tag{17}$$

其中  $m, n$  为不可公约的正整数,则对应的临界点  $\omega_c$  为有理临界点。此时  $T$  周期解分岔到  $nT$  周期解。  $m = 1, n = 2$  即倍周期分岔,相应的有  $\Omega_0 = T/\pi$ , 对应的 Floquet 乘子  $\lambda = -1$ 。如果条件(17)得不到满足,则称临界点  $\omega_c$  为无理临界点,这时两频率不可公约,周期解分岔到伪周期解,一般称为  $2_\pi$  环面上的平衡解。

图 5 为给定一组密封参数下  $|\lambda|_{\max}$  随  $\omega$  变化关系曲线,显示了随转速的变化, Floquet 乘子通过单位圆,周期解由稳定到失稳的过程,轴心轨迹的数值模拟与 Floquet 乘子的计算相吻合。

在一定的密封力参数作用下,迷宫密封转子系统会在  $2\omega_n(\omega_n = \sqrt{K_e/m})$  处发生倍周期分岔,此时 Floquet 乘子的虚部为零。在图 5 所示的算例中,偏心距  $r = 0.35 \text{ mm}$ ,密封参数  $n$

= 2.5,  $b = 0.2$ ,  $\tau_0 = 0.45$ ,  $\omega_h = 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , 失稳转速  $\omega_c = 222 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ 。由  $|\lambda|_{\max\_}\omega$  关系曲线图可见  $\omega = 2\omega_h$  处发生突变, 提前失稳, 出现了周期解稳定—失稳—稳定—失稳变化复杂的现象。系统在  $\omega = 200 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  处发生倍周期分岔(见图7), 计算得 Floquet 乘子  $\lambda_{1,2,3,4} = -1.0009, -0.9332, -0.6140, -0.5992$ 。在  $\omega_c = 222 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  处计算的 Floquet 乘子,  $\lambda_{1,2} = -0.9534 \pm 0.3020i$ ,  $\lambda_{3,4} = -0.6006 \pm 0.1920i$ ,  $|\lambda|_{1,2} = 1.0000$ 。

为说明转子的非线性动力学特性与转速  $\omega$  的关系, 取图5所给密封参数, 画出不同转速下数值模拟的稳态轴心轨迹及相应的 Poincare 映射图(图6~12), 反映出了系统由周期运动(见图6)进入到倍周期运动(见图7), 然后重新进入稳定的周期运动(见图8), 接着分岔成为准周期运动(见图9~12)变化复杂的现象。由上述计算结果可见, 转子失稳后产生强烈的涡动, 通常作准周期运动(图9~12), 并在某些转速下分岔出  $n$  倍的周期解。失稳后的涡动幅度随转速的提高而增大, 最终将导致转子与密封相碰。

### 5 结 论

- 1) 不平衡转子\_迷宫密封系统受周期激励的作用, 低转速下转子作与激励同频率的周期运动, 当转速提高到一定值时, 开始失稳, 产生大幅度的涡动, 作准周期或倍周期运动。
- 2) 不平衡量对失稳转速有很大的影响, 适当增大偏心量可以推迟失稳, 这与工程实践相一致。此外, 密封力的当量刚度  $K$ 、当量阻尼  $D$  的非线性越弱, 失稳转速越高, 所以可以减小  $n$  来提高失稳转速。较大的流体阻尼比不利于转子的稳定性, 降低  $\tau$  可提高转子的稳定性, 这已在工程实践中得到证实<sup>[1~2]</sup>。通过调整密封结构可以有效的改善系统的稳定性。

### 附 录

式(1)、(2)中的  $K_0, D_0, m_f$  为

$$K_0 = \mu_3 \mu_0, D_0 = \mu_1 \mu_3 T, m_f = \mu_2 \mu_3 T^2 \tag{A1}$$

式(A1)中

$$\begin{cases} \mu_0 = \frac{2\sigma^2}{1+z+2\sigma} E(1-m_0), \\ \mu_1 = \frac{2\sigma^2}{1+z+2\sigma} \left[ \frac{E}{\sigma} + \frac{B}{2} \left( \frac{1}{6} + E \right) \right], \\ \mu_2 = \frac{\sigma(1/6+E)}{1+z+2\sigma}, \mu_3 = \frac{\pi R \Delta P}{\lambda}, T = \frac{l}{v_a} \end{cases} \tag{A2}$$

式(A2)中

$$\begin{cases} \lambda = n_0 R_a^{m_0} \left[ 1 + \left( \frac{R_v}{R_a} \right)^2 \right]^{(1+m_0)/2}, \sigma = \frac{N}{c}, \\ E = \frac{1+z}{1+z+2\sigma}, B = 2 - \frac{\left( \frac{R_v}{R_a} \right)^2 - m_0}{\left( \frac{R_v}{R_a} \right)^2 + 1} \end{cases} \tag{A3}$$

而式(A3)中

$$R_v = \frac{Rc\omega}{\nu}, R_a = \frac{2v_a c}{\nu} \tag{A4}$$

$\Delta P$  是密封压降,  $z$  是进口损失系数,  $l$  是密封长度,  $c$  是径向密封间隙,  $v_a$  是轴向流速,  $\nu$  是流体动力粘性系数,  $R$  是密封半径,  $\omega$  是转子转速,  $m_0, n_0$  为经验系数, 由实验和具体密封结构决定<sup>[6]</sup>。

## [参 考 文 献]

- [1] 任兴民, 顾家柳, 秦卫阳. 具有封严齿转子系统的动力稳定性分析[J]. 应用力学学报, 1996, **13**(2): 77—83.
- [2] 郑水英, 潘晓弘, 沈庆根. 带周向挡片的迷宫密封动力特性的研究[J]. 机械工程学报, 1999, **35**(2): 49—52.
- [3] Muszynska A. A whirl and whip rotor/ bearing stability problems[J]. J Sound and Vibration, 1986, **110**(3): 443—462.
- [4] Muszynska A. A model testing of rotor/ bearing systems[J]. International Journal of Analytical and Experimental Model Analysis, 1986, **1**(3): 15—34.
- [5] Muszynska A, Bently D E. Frequency\_swept rotating input perturbation techniques and identification of the fluid force models in rotor/ bearing/ seal systems and fluid handling machines[J]. J Sound and Vibration, 1990, **143**(1): 103—124.
- [6] 陈予恕, 丁千. 非线性转子\_密封系统的稳定性和 Hopf 分岔研究[J]. 振动工程学报, 1997, **10**(3): 368—374.
- [7] 张文. 转子动力学理论基础[M]. 北京, 科学出版社, 1990.
- [8] 周纪卿, 朱因远. 非线性振动[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1998.
- [9] 陈予恕. 非线性振动系统的分岔和混沌理论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1993.
- [10] Loose G, Joseph D D. Elementary Stability and Bifurcation Theory [M]. New York: Springer\_Verlag, 1980.
- [11] Waggins. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos [M]. New York: Springer\_Verlag, 1990.

## Stability and Bifurcation of Unbalance Rotor/Labyrinth Seal System

LI Song\_tao<sup>1</sup>, XU Qing\_yu<sup>1</sup>, WAN Fang\_yi<sup>1</sup>, ZHANG Xiao\_long<sup>2</sup>

(1. Architectural Engineering and Mechanics, Xi'an Jiaotong University,  
Xi'an 710049, P. R. China;

2. Xi'an University of Architecture & Technology, Xi'an 710052, P. R. China)

**Abstract:** The influence of labyrinth seal on the stability of unbalanced rotor system was presented. Under the periodic excitation of rotor unbalance, the whirling vibration of rotor is synchronous if the rotation speed is below stability threshold, whereas the vibration becomes severe and asynchronous which is defined as unstable if the rotation speed exceeds threshold. The Muszynska model of seal force and shooting method were used to investigate synchronous solution of the dynamic equation of rotor system. Then, based on Floquet theory the stability of synchronous solution and unstable dynamic characteristic of system were analyzed.

**Key words:** nonlinear vibration; stability; seal; rotor; shooting method