

文章编号: 1000-0887(2003) 11-1186-05

各向异性介质中周期性界面 裂纹的弹塑性问题*

肖万伸^{1,2}, 周建平², 唐国金²

(1. 湖南大学 工程力学系, 长沙 410082;

2. 国防科技大学 航天与材料工程学院 宇航技术系, 长沙 410073)

(王银邦推荐)

摘要: 应用富里叶积分变换方法将裂纹边值问题化为对偶积分方程组, 再用定积分变换法将问题进一步化为奇异积分方程组, 求得双材料各向异性弹塑性介质中周期性界面裂纹反平面问题的封闭形式解, 并作为特例讨论了各向同性双材料问题、各向异性单一材料问题及各向同性-各向异性双材料问题。结果表明: 裂纹尖端前沿的塑性区尺寸、裂纹的张开位移(COD)均决定于两种材料流动极限中的较小者及裂纹的长度和相邻两裂纹的间距, 此外, COD 还与材料模量有关。

关键词: 周期性裂纹; 界面裂纹; 双材料; 各向异性弹塑性断裂; 反平面问题; D_B 模型; 张开位移

中图分类号: O346.1; O344.3 文献标识码: A

引 言

各向同性^[1]、各向异性^[2]介质的共线裂纹问题已有充分讨论, 但多限于线弹性。对于双材料中共线界面裂纹的弹塑性问题的分析还未见过报道。弹塑性界面断裂分析中存在的困难之一是单一材料断裂的分析方法很难平行地推广用于解决界面裂纹弹塑性问题。最近的文献[3]用余弦变换方法分析了单个界面裂纹的弹塑性问题。

本文研究周期性共线界面裂纹的弹塑性问题。用富里叶积分变换将周期性裂纹边值问题化为积分方程组, 然后运用定积分变换法并根据积分方程理论求得封闭形式解。最后, 从一般到特殊, 通过调整材质参数得到各向同性介质-各向异性介质、各向同性介质-各向同性介质及单一材料问题的解。这里的方法也适用于面内断裂问题。

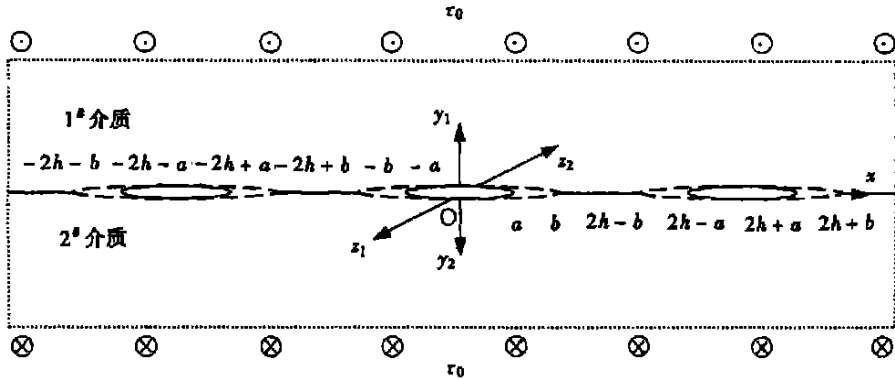
1 问题的描述

如图 1 所示, 上、下半平面依次为两材质不同的 $1^{\#}$ 、 $2^{\#}$ 各向异性介质所占据, 右手直角坐标系 $Ox_{1j}z_j$ 中的 x 轴在两介质的交界面上, 原点 O 和 x 轴为两介质通用, y_j 轴指向第 $j^{\#}$ ($j = 1, 2$) 介质内部。交界面上有长为 $2a$, 间距为 $2h$ 的周期性裂纹。在 $y_j \rightarrow \infty$ 处受反平面均布剪

* 收稿日期: 2001_10_26; 修订日期: 2003_07_20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(18972076); 中国博士后科学基金资助项目(00_2001); 国家杰出青年基金资助项目(19925209)

作者简介: 肖万伸(1959—), 男, 湖南道县人, 副教授, 博士(E-mail: xwshnd@hotmail.com)。

应力 τ_0 载荷的作用图 1 含间距为 $2h$ 的周期性界面裂纹的无穷大双材料的几何形状及其坐标系

应用 D_B 模型, 设裂尖前缘塑性尺寸为 $b - a$, 那么, 问题可简化为长为 $2b$ 的加长裂纹上有分布反平面剪应力作用、无穷远处 ($y_j \rightarrow \infty$) 无应力作用的边值问题。

以 z_j 轴方向位移 w_j 表示的平衡微分方程为:

$$C_{55j} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + 2C_{45j} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial y_j} + C_{44j} \frac{\partial^2 w_j}{\partial y_j^2} = 0, \quad (1)$$

其中 C_{44j} , C_{45j} , C_{55j} 为两种材料的材质常数, 属已知; 下标 j 代表材料类型。

定解条件是:

$$C_{44j} \frac{\partial w_j(x, 0)}{\partial y_j} + C_{45j} \frac{\partial w_j(x, 0)}{\partial x} = -\tau_0 \quad (x \in (2mh - a, 2mh + a)), \quad (2)$$

$$C_{44j} \frac{\partial w_j(x, 0)}{\partial y_j} + C_{45j} \frac{\partial w_j(x, 0)}{\partial x} = \tau_s - \tau_0 \quad (x \in (2mh - b, 2mh - a) \cup (2mh + a, 2mh + b)), \quad (3)$$

$$w_1(x, 0) + w_2(x, 0) = 0 \quad (x \in (2mh + b, 2(m+1)h - b)), \quad (4)$$

$$w_j(x, y_j) \rightarrow 0, \quad y_j \rightarrow \infty \quad (x \in (-\infty, \infty)), \quad (5)$$

式中 τ_s 是较弱材料的屈服极限, 为已知量; $0 < a < b < h$, a 及 h 已知, b 待定; $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

2 积分方程

据微分方程(1)及边界条件(5), 可将质点位移表示成

$$w_j(x, y_j) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} A_j^-(\xi) \exp[(\alpha + i\beta)\xi_j - i\xi x] d\xi + \int_0^{\infty} A_j^+(\xi) \exp[(-\alpha + i\beta)\xi_j - i\xi x] d\xi \right\}, \quad (6)$$

这里, i 为虚数单位, $A_j^{\pm}(\xi)$ 为待法函数,

$$\alpha = (C_{55j}C_{44j} - C_{45j}^2)^{1/2} / C_{44j}, \quad \beta = C_{45j} / C_{44j}. \quad (7)$$

将(6)式代入应力表达式

$$\tau_{yz}(x, y_j) = C_{44j} \frac{\partial w_j(x, y_j)}{\partial y_j} + C_{45j} \frac{\partial w_j(x, y_j)}{\partial x},$$

得

$$\begin{aligned} \tau_{y_j}(x, y_j) = \frac{\omega_j}{2\pi} & \left\{ \int_{-\infty}^0 (\alpha_j + i\beta_j) \xi A_j^-(\xi) \exp[(\alpha_j + i\beta_j)\xi y_j - i\xi x] d\xi + \right. \\ & \left. \int_0^{\infty} (-\alpha_j + i\beta_j) \xi A_j^+(\xi) \exp[-(\alpha_j + i\beta_j)\xi y_j - i\xi x] d\xi \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

由于问题关于直线束 $x = x_m = 2mh$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 对称, 所以关于其中任一直线为对称的两点其位移必然相等且应力分量 τ_{y_j} 也相等, 再注意到 $w_j(x, 0)$ 取实数值, 于是

$$A_j^-(\xi) = A_j^+(\xi) = A_j(\xi). \quad (9)$$

以未知函数 $f_j(x)$ 和 $g_j(x)$ 表示 $A_j(\xi)$, 得

$$\begin{aligned} A_j(\xi) = \frac{1}{\xi} & \left\{ \int_{2mh-a}^{2mh+a} f_j(r) [\sin(r\xi) - i\cos(r\xi)] dr + \right. \\ & \left. \left(\int_{2mh-b}^{2mh-a} + \int_{2mh+a}^{2mh+b} \right) g_j(s) [\sin(s\xi) - i\cos(s\xi)] ds \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

记 $w(x, 0) = w_1(x, 0) + w_2(x, 0)$, $f(r) = f_1(r) + f_2(r)$, $g(s) = g_1(s) + g_2(s)$, 将(9), (10)代入(6), 并令 $y_j \rightarrow 0$, 有

$$\begin{aligned} w(x, 0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(x, 0) = \frac{1}{\pi} & \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{2mh-a}^{2mh+a} f(r) dr \int_0^{\infty} \frac{\sin(r\xi) \cos(x\xi)}{\xi} d\xi + \right. \\ & \left. \left(\int_{2mh-b}^{2mh-a} + \int_{2mh+a}^{2mh+b} \right) g(s) ds \int_0^{\infty} \frac{\sin(s\xi) \cos(x\xi)}{\xi} d\xi \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

由公式^[4]

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\cos(x\xi) \sin(y\xi)}{\xi} d\xi &= \frac{\pi}{2} \quad (x < y), \\ \int_0^{\infty} \frac{\cos(x\xi) \sin(y\xi)}{\xi} d\xi &= 0 \quad (x > y), \end{aligned}$$

可知(11)式满足(4)式。

将(9)、(10)代入(8)之后令 $y_j \rightarrow 0$, 有

$$\begin{aligned} \pi \left[\frac{\tau_{z1}(x, 0)}{\omega_1} + \frac{\tau_{z2}(x, 0)}{\omega_2} \right] = \\ - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{2mh-a}^{2mh+a} \frac{f(r)}{r-x} dr + \left(\int_{2mh-b}^{2mh-a} + \int_{2mh+a}^{2mh+b} \right) \frac{g(s)}{s-x} ds \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{其中 } \omega_j = \sqrt{C_{44j}C_{55j} - C_{45j}^2}. \quad (13)$$

将(12)代入(2), (3), 注意到

$$\begin{aligned} f(x + 2mh) &= f(x), \quad g(x + 2mh) = g(x), \\ f(-x) &= -f(x), \quad g(-x) = -g(x), \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{y-x+2mh} - \frac{1}{y-x-2mh} \right) = \\ \frac{\pi}{2h} \left[\frac{1}{\sin(\pi y/2h) - \sin(\pi x/2h)} + \frac{1}{\sin(\pi y/2h) + \sin(\pi x/2h)} \right] \cos \left(\frac{\pi y}{2h} \right), \end{aligned}$$

可得奇异积分方程

$$\int_0^A \frac{F(R)}{R-X} dR + \int_A^B \frac{G(S)}{S-X} dS = \frac{\pi \tau_0}{\omega} \quad (X \in (0, A)), \quad (14a)$$

$$\int_0^A \frac{F(R)}{R-X} dR + \int_A^B \frac{G(S)}{S-X} dS = -\frac{\pi(\tau_0 - \tau_0)}{\omega} \quad (X \in (A, B)), \quad (14b)$$

其中

$$\begin{cases} A = \sin^2 \left[\frac{\pi a}{2h} \right], & B = \sin^2 \left[\frac{\pi b}{2h} \right], & X = \sin^2 \left[\frac{\pi x}{2h} \right], & R = \sin^2 \left[\frac{\pi r}{2h} \right], \\ S = \sin^2 \left[\frac{\pi s}{2h} \right], & F(R) = f \left[\frac{2h}{\pi} \arcsin \sqrt{R} \right], & G(S) = g \left[\frac{2h}{\pi} \arcsin \sqrt{S} \right], \end{cases} \quad (15)$$

$$\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}. \quad (16)$$

于是, 边值问题方程 (1) ~ (5) 就转化为与之等价的积分方程 (14)。

3 问题的解

根据积分方程理论, 可从积分方程组 (14) 解出

$$F(R) = -\frac{1}{\pi \omega} \left\{ \sqrt{\frac{R}{B-R}} \left[-\tau_0 \pi + 2\tau_s \arctan \left[\sqrt{\frac{B-A}{A}} \right] \right] + \tau_s \ln \left[\frac{\sqrt{\frac{B-R}{R}} - \sqrt{\frac{B-A}{A}}}{\sqrt{\frac{B-R}{R}} + \sqrt{\frac{B-A}{A}}} \right] \right\} \quad (R \in (0, A)) \cdot \quad (17a)$$

$$G(S) = -\frac{1}{\pi \omega} \left\{ \sqrt{\frac{S}{B-S}} \left[-\tau_0 \pi + 2\tau_s \arctan \left[\sqrt{\frac{B-A}{A}} \right] \right] + \tau_s \ln \left[\frac{\sqrt{\frac{B-A}{A}} + \sqrt{\frac{B-S}{S}}}{\sqrt{\frac{B-A}{A}} - \sqrt{\frac{B-S}{S}}} \right] \right\} \quad (S \in (A, B)), \quad (17b)$$

由弹塑性体中应力的有界性可得

$$-\tau_0 \pi + 2\tau_s \arctan \left[\sqrt{\frac{B-A}{A}} \right] = 0,$$

从而, $B = A \sec^2 \left[\frac{\pi \tau_0}{2\tau_s} \right]$, 而塑性区尺寸为

$$b - a = \frac{2h}{\pi} \arcsin \left[\frac{1}{2} \sin \left[\frac{\pi a}{h} \right] \sec \left[\frac{\pi \tau_0}{2\tau_s} \right] - \sin \left[\frac{\pi a}{2h} \right] \sqrt{1 - \sin^2 \left[\frac{\pi a}{2h} \right] \sec^2 \left[\frac{\pi \tau_0}{2\tau_s} \right]} \right]. \quad (18)$$

裂纹扩展的判据参数——裂纹张开位移依定义为

$$\delta = w_1(2mh \pm a, 0) + w_2(2mh \pm a, 0),$$

将 (17)、(11) 及 (15) 代入上式, 整理得

$$\delta = \frac{h\tau_s}{\pi^2 \omega} \int_A^B \ln \left[\frac{\sqrt{\frac{B-A}{A}} + \sqrt{\frac{B-S}{S}}}{\sqrt{\frac{B-A}{A}} - \sqrt{\frac{B-S}{S}}} \right] \frac{dS}{\sqrt{(1-S)S}}. \quad (19)$$

4 讨 论

式 (18) 表明, 无论是各向同性还是各向异性, D_B 模型的塑性区尺寸 $b - a$ 表达式在形式上都是相同的, 都与裂纹长度 $2a$ 及相邻两裂纹之间的距离 $2h$ 有关。但各向同性与各向异性两种情形的塑性区尺寸在本质上是有所差别的。事实上, 在各向异性情形, 式 (19) 中的屈服应

力 τ_s 的大小取决于两种材料取向的组合情况。这反映了各向异性对于塑性区尺寸的影响。式(19)揭示了裂纹的张开位移 δ 依材质参数 τ_s 、 C_{44j} 、 C_{55j} 、 C_{45j} 以及相邻两裂纹的间距 $2h$ 变化的规律。

下面讨论一些特殊情形。

1) 单一材料

即上、下半平面都是同一材料。其解只需通过在(16)式中令 $\omega_1 = \omega_2$ 即可得到。

2) 各向同性材料

两种材料都是各向同性材料。这时在(7)、(13)式中令 $C_{45j} = 0$, $C_{55j} = C_{44j} = \mu_j$ (剪切模量)即可。

3) 各向同性—各向异性

不妨假定上、下半平面依次为各向同性介质、各向异性介质。令 $C_{451} = 0$, $C_{551} = C_{441} = \mu_1$, 即可得其解。

最后,我们指出,这里考虑的是反平面断裂问题(III型),对于面内断裂问题(I型、II型)及各种复杂共线裂纹问题,本文方法也具有良好的适应性。

[参 考 文 献]

- [1] 路见可,蔡海涛. 平面弹性理论的周期问题[M]. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1986.
- [2] Hwu C B. Collinear cracks in anisotropic bodies[J]. Int J Fracture, 1991, 52(4): 239—256.
- [3] XIAO Wan_shen, Zeng Q Y. Dynamical dugdale barenblatt model for interfacial crack[J]. Int J Fracture, 1997, 86(2): 13—15.
- [4] 《数学手册》编写组. 数学手册[M]. 北京: 高等教育出版社, 1979.

Periodical Interfacial Cracks in Anisotropic Elastoplastic Media

XIAO Wan_shen^{1,2}, ZHOU Jian_ping², TANG Guo_jin²

(1. Department of Engineering Mechanics, Hunan University,

Changsha 410082, P. R. China;

2. College of Astronautics and Material Engineering, National University of Defense Technology,

Changsha 410073, P. R. China)

Abstract: By using Fourier transformation the boundary problem of periodical interfacial cracks in anisotropic elastoplastic bimaterial was transformed into a set of dual integral equations and then it was further reduced by means of definite integral transformation into a group of singular equations. Closed form of its solution was obtained and three corresponding problems of isotropic bimaterial, of a single anisotropic material and of a bimaterial of isotropy/anisotropy were treated as the specific cases. The plastic zone length of the crack tip and crack opening displacement (COD) decline as the smaller yield limit of the two bonded materials rises, and they were also determined by crack length and the space between two neighboring cracks. In addition, COD also relates it with moduli of the materials.

Key words: periodical crack; interfacial crack; anisotropic elastoplastic fracture of bimaterial; antiplane problem; dugdale barenblatt model; crack opening displacement