应用数学和力学,第 24 卷 第 11 期(2003 年 11 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 11_1197_07

二维连续信号的近似采样定理*

杨守志[1], 程正兴[2], 唐远炎[3]

(1. 汕头大学 数学系,广东 汕头 515063;
2. 西安交通大学 理学院,西安 710049;
3. 香港浸会大学 计算机科学系,香港)

(李继彬推荐)

摘要: 利用加细方程的面具,给出该方程的一个近似解,并根据这个近似解构造出二维连续信号的近似采样定理• 其近似采样函数是所求加细方程的近似解,它是由加细方程的面具唯一确定的逐段线性函数,且有显示的计算公式• 因此可以根据需要选择加细方程的面具,从而达到控制近似采样函数的衰减速度•

关 键 词: 采样定理; 二维连续信号; 加细方程; 加细方程的面具
中图分类号: O174.42 文献标识码: A

引 言

在信号的处理过程中,采样定理是最重要的数学工具之一• 最著名的采样定理是 Shannon 采样定理[1]• Shannon 采样定理可简单叙述如下:

定理 A 如果信号或函数 $f(t)$ 在带限 $[-B, B]$ 内,即

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2B}}\int_{-B}^{B} F(w)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}wt}\,\mathrm{d}w \tag{1}$$

对某 $F \in L^2(-B, B)$ 成立,则 $f(t)$ 可以由它在 $t_n = n\pi/B\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 上的函数值通过下式重构

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} f(t_n)\,\frac{\sin B(t - t_n)}{B(t - t_n)}, \tag{2}$$

其中点列 $\{t_n\}$ 被称之为采样点,而函数 $S_n(t) = \sin B(t - t_n)/[B(t - t_n)]$ 称之为采样函数• 我们知道,上面的 $S_n(t)$ 的衰减是很慢的,在信号处理中自然希望构造衰减较快的采样函数•

由 G. Walter[2] 最早将 Shannon 采样定理推广到小波子空间 V_0 上,给出如下结论:

定理 B 设 $\phi \in L^2(\mathbf{R}) \cap C(\mathbf{R})$,满足 $\phi(t) = O(|t|^{-a}),\ t \to \pm\infty\ (a > 1)$; $\phi^*(w) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \phi(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nw} \neq 0,\ w \in \mathbf{R}$• 对小波子空间 $V_0 = \left\{\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n\phi(t - n) : \{c_n\} \in l^2\right\}$,则存在函数序列 $\{S_n(t)\} \subset V_0$,使得在一致收敛意义下有

* 收稿日期: 2001_07_03; 修订日期: 2003_06_17
基金项目: 河南省自然科学基金资助项目(984051900);河南省教委自然科学基金资助项目(98110015);河南省高校青年骨干教师基金资助项目
作者简介: 杨守志(1963—),男,河南罗山人,副教授,博士(E_mail: yangshouzhi@263.net)•

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(n) S_n(t) \qquad (\forall f \in V_0). \tag{3}$$

文献[3]利用加细方程给出了适合任何连续信号的近似采样定理文献; 文献[4]对有限区间小波子空间进行了研究,给出了小波子空间上的采样定理. 文献[3]、[4]中采样定理的突出优点是可以根据需要选择相应的两尺度序列,从而达到控制近似采样函数的衰减速度. 在这篇文章中,我们将这种近似采样定理[3]引入到二维连续信号之中,给出二维连续信号的近似采样定理. 当然,这种采样定理将在数字图像处理等领域中具有非常重要的作用.

1　二维连续信号的近似采样定理

假设 Λ 是 Z^2 中的一个有序的且有限的集合. 在本文中设

$$\Lambda = \left\{(0,0),(0,1),\cdots,(0,n_2),(1,0),(1,1),\cdots,(1,n_2),\cdots,(n_1,0),(n_1,1),\cdots,(n_1,n_2)\right\}.$$

设加细方程

$$\phi(\boldsymbol{X}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \Lambda} c_{\boldsymbol{k}} \phi(2\boldsymbol{X} - \boldsymbol{k}) \qquad (\boldsymbol{X} = (t, s)) \tag{4}$$

存在一个连续的 L^1 解, 即 $\phi(t, s) \in L^1 \cap \mathbf{C}$. 关于加细方程(4)解的存在性问题已被很多作者进行了详细研究并得到很好的结果(见[5]~[7]). 我们知道, 如果加细方程(4)存在一个连续的解, 则解在归一化的条件 $\int_{R^2} \phi(\boldsymbol{X})\, d\boldsymbol{X} = 1$ 下是唯一的, 其支撑区间也上有限的. 容易推出 $\mathrm{supp}\,\phi \subseteq [0, n_1] \times [0, n_2]$.

由文献[8]可知 $\sum_{\boldsymbol{k} \in \Lambda} c_{\boldsymbol{k}} = 4$, 又由文献[9]可知在多大数应用中, 加细方程中的序列$\{c_{\boldsymbol{k}}\}$还满足 $\sum_{\boldsymbol{k} \in \Lambda} c_{2\boldsymbol{k}+l} = 1,\ l \in \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$, 而文献[10]中构造出大量的紧支撑正交连续的不可分的二维小波且满足上述要求. 在本文中我们也假设加细方程中的系数满足上式.

对于一个给定的函数 g, 定义一个线性算子 S:

$$(\mathrm{S}g)(\boldsymbol{X}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \Lambda} c_{\boldsymbol{k}} g(2\boldsymbol{X} - \boldsymbol{k}) \qquad (\boldsymbol{X} = (t, s)), \tag{5}$$

则加细方程(4)的解是算子 S 的一个不动点.

下面我们定义 4 个矩阵如下, 分别记为 $\boldsymbol{T}_{0,0}$, $\boldsymbol{T}_{0,1}$, $\boldsymbol{T}_{1,0}$, $\boldsymbol{T}_{1,1}$

$$(\boldsymbol{T}_{0,0})_{\eta,\xi} = c_{2\eta-\xi+(0,0)} \qquad (\eta, \xi \in \Lambda), \tag{6}$$

$$(\boldsymbol{T}_{0,1})_{\eta,\xi} = c_{2\eta-\xi+(0,1)} \qquad (\eta, \xi \in \Lambda), \tag{7}$$

$$(\boldsymbol{T}_{1,0})_{\eta,\xi} = c_{2\eta-\xi+(1,0)} \qquad (\eta, \xi \in \Lambda), \tag{8}$$

$$(\boldsymbol{T}_{1,1})_{\eta,\xi} = c_{2\eta-\xi+(1,1)} \qquad (\eta, \xi \in \Lambda). \tag{9}$$

下面我们用函数 g 定义一个向量值函数, 记为 $\boldsymbol{F}(g) = \boldsymbol{g}: \mathbf{R} \to R^{n_1 n_2}$

$$\boldsymbol{g}(t, s) = \begin{cases} [g(t,s), \cdots, g(t, s+n_2-1), g(t+1, s), \cdots, \\ \qquad g(t+1, s+n_2-1), \cdots, g(t+n_1-1, s), \cdots, \\ \qquad g(t+n_1-1, s+n_2-1)]^{\mathrm{T}} \\ \qquad ((t,s) \in [0,1) \times [0,1)), \\ \mathbf{0} \qquad ((t,s) \notin [0,1) \times [0,1)). \end{cases} \tag{10}$$

下面在向量函数 $\boldsymbol{g}$ 上定义算子 T

$$(\mathrm{T}\boldsymbol{g})(t,s)=\begin{cases}\boldsymbol{T}_{0,0}g(2t,2s) & ((t,s)\in[0,1/2)\times[0,1/2)),\\ \boldsymbol{T}_{0,1}g(2t,2s-1) & ((t,s)\in[0,1/2)\times[1/2,1)),\\ \boldsymbol{T}_{1,0}g(2t-1,2s) & ((t,s)\in[1/2,1)\times[0,1/2)),\\ \boldsymbol{T}_{1,1}g(2t-1,2s-1) & ((t,s)\in[1/2,1)\times[1/2,1)),\\ 0 & ((t,s)\text{ 为其它})\cdot\end{cases}\tag{11}$$

引理 1 设 ϕ 的支撑区间是 $[0,n_1]\times[0,n_2]$, $\boldsymbol{F}(\phi)=\Phi$ 由上面定义, 则 $\boldsymbol{F}(\mathrm{S}(\phi))=\mathrm{T}(\phi)$, 且 ϕ 是加细方程(4) 的解的充要条件是 $\Phi=\mathrm{T}\,\Phi$•

文献[5]~[7] 均给出了一维情形的证明, 对于二维情形可类似证明•

引理 2 如果 $\sum_{k\in\Lambda}c_k=4$, 则 4 是矩阵 $[\boldsymbol{T}_{0,0}+\boldsymbol{T}_{0,1}+\boldsymbol{T}_{1,0}+\boldsymbol{T}_{1,1}]$ 的左特征值, 且 $[1,1,\cdots,1]$ 是对应的特征向量•

如果 $\sum_{k\in\Lambda}c_{2k+l}=1,\ l=(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$ 则 1 分别是矩阵 $\boldsymbol{T}_{0,0},\boldsymbol{T}_{0,1},\boldsymbol{T}_{1,0},\boldsymbol{T}_{1,1}$ 的左特征值, 且 $[1,1,\cdots,1]$ 对应的特征向量•

如 $\phi(t,s)$ 是线性箱样条, 它满足

$$\phi(t,s)=\frac{1}{2}\phi(2t+1,2s+1)+\frac{1}{2}\phi(2t+1,2s)+\frac{1}{2}\phi(2t,2s+1)+$$
$$\frac{1}{2}\phi(2t,2s)+\frac{1}{2}\phi(2t,2s-1)+\frac{1}{2}\phi(2t-1,2s)+\frac{1}{2}\phi(2t-1,2s-1),$$

相应的 $\boldsymbol{T}_{0,0},\boldsymbol{T}_{0,1},\boldsymbol{T}_{1,0},\boldsymbol{T}_{1,1}$ 如下

$$\boldsymbol{T}_{0,0}=\begin{bmatrix}\frac12&0&0&0\\0&\frac12&0&0\\0&0&\frac12&0\\\frac12&\frac12&\frac12&1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{T}_{0,1}=\begin{bmatrix}\frac12&\frac12&0&0\\0&0&0&0\\\frac12&0&1&\frac12\\0&\frac12&0&\frac12\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{T}_{1,0}=\begin{bmatrix}\frac12&0&\frac12&0\\\frac12&1&0&\frac12\\0&0&0&0\\0&0&\frac12&\frac12\end{bmatrix},\ \boldsymbol{T}_{1,1}=\begin{bmatrix}1&\frac12&\frac12&\frac12\\0&\frac12&0&0\\0&0&\frac12&0\\0&0&0&\frac12\end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{T}_{0,0},\boldsymbol{T}_{0,1},\boldsymbol{T}_{1,0},\boldsymbol{T}_{1,1}$ 满足引理 2•

对任意给定的函数 $g(t,s)$ 及区域 I, 令 $g_I=\frac{1}{|I|}\int_I g(t,s)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s$, 其中 $|I|$ 表示区域 I 的面积• 引入一个初始向量 $\boldsymbol{v}$ 为

$$\boldsymbol{v}=[v_{0,0},\cdots,v_{0,n_2-1},v_{1,0},\cdots,v_{1,n_2-1},\cdots,v_{n_1-1,0},\cdots,v_{n_1-1,n_2-1}]^{\mathrm{T}}=$$
$$[\phi_{[0,1]\times[0,1]},\cdots,\phi_{[0,1]\times[n_2-1,n_2]},\cdots,\phi_{[n_1-1,n_1]\times[0,1]},\cdots,\phi_{[n_1-1,n_1]\times[n_2-1,n_2]}]^{\mathrm{T}}\cdot$$

引理 3 设 ϕ 是加细方程(4) 的连续的 L^1 解, 则 $\boldsymbol{v}$ 是矩阵 $[\boldsymbol{T}_{0,0}+\boldsymbol{T}_{0,1}+\boldsymbol{T}_{1,0}+\boldsymbol{T}_{1,1}]$ 的特

征向量, 对应的特征值为 4. 其中

$$\boldsymbol{v} = [\phi_{[0,1]\times[0,1]}, \cdots, \phi_{[0,1]\times[n_2-1,n_2]}, \cdots, \phi_{[n_1-1,n_1]\times[0,1]}, \cdots, \phi_{[n_1-1,n_1]\times[n_2-1,n_2]}]^{\mathrm{T}}$$

证明　由(11)式并分别考虑以下 4 种情形: $(t, s) \in [0, 1/2] \times [0, 1/2]$; $[0, 1/2] \times [1/2, 1]$; $[1/2, 1] \times [0, 1/2]$; $[1/2, 1] \times [1/2, 1]$, 则有

$$\begin{bmatrix} \phi_{[0,1/2]\times[1,1/2]} \\ \cdots\cdots \\ \phi_{[n_1-1,n_1-1/2]\times[n_2-1,n_2-1/2]} \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}_{0,0}\boldsymbol{v}, \quad \begin{bmatrix} \phi_{[0,1/2]\times[1/2,1]} \\ \cdots\cdots \\ \phi_{[n_1-1,n_1-1/2]\times[n_2-1/2,n_2]} \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}_{0,1}\boldsymbol{v}, \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{[1/2,1]\times[0,1/2]} \\ \cdots\cdots \\ \phi_{[n_1-1/2,n_1]\times[n_2-1,n_2-1/2]} \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}_{1,0}\boldsymbol{v}, \quad \begin{bmatrix} \phi_{[1/2,1]\times[1/2,1]} \\ \cdots\cdots \\ \phi_{[n_1-1/2,n_1]\times[n_2-1/2,n_2]} \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}_{1,1}\boldsymbol{v}. \tag{13}$$

又因在任意的 $[i, i+1] \times [j, j+1]$ 上均有

$$\phi_{[i,i+1/2]\times[j,j+1/2]} + \phi_{[i,i+1/2]\times[j+1/2,j]} + \phi_{[i+1/2,i]\times[j,j+1/2]} + \phi_{[i+1/2,i]\times[j+1/2,j]} = 4\phi_{[i,i+1]\times[j,j+1]}.$$

上式意味着引理 3 成立. □

取 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_k \in \{0, 1\}$, $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_k \in \{0, 1\}$, 分别利用它们构造两个 k 维向量 $\boldsymbol{e} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_k)$, $\boldsymbol{u} = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_k)$. 再由这两个向量定义一个区域 $I_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{u}}$ 为

$$I_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{u}} = [.\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_k, .\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_k + 2^{-k}] \times [.\eta_1\eta_2\cdots\eta_k, .\eta_1\eta_2\cdots\eta_k + 2^{-k}], \tag{14}$$

其中

$$.\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_k = \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2^2} + \cdots + \frac{\varepsilon_k}{2^k}, \qquad .\eta_1\eta_2\cdots\eta_k = \frac{\eta_1}{2} + \frac{\eta_2}{2^2} + \cdots + \frac{\eta_k}{2^k}.$$

令

$$\begin{cases} \Phi^0(t, s) = \boldsymbol{v} & ((t, s) \in [0, 1) \times [0, 1)), \\ \Phi^{k+1}(t, s) = \mathrm{T}\,\Phi^k(t, s) & ((t, s) \in [0, 1) \times [0, 1)). \end{cases} \tag{15}$$

另外, 定义 $\phi^0(t, s)$ 为

$$\phi^0(t, s) = \begin{cases} v_{0,0} & ((t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]), \\ v_{0,1} & ((t, s) \in [0, 1] \times [1, 2]), \\ \cdots & \cdots \\ v_{0,n_2-1} & ((t, s) \in [0, 1] \times [n_2-1, n_2]), \\ \cdots & \cdots \\ v_{n_1-1,0} & ((t, s) \in [n_1-1, n_1] \times [0, 1]), \\ \cdots & \cdots \\ v_{n_1-1,n_2-1} & ((t, s) \in [n_1-1, n_1] \times [n_2-1, n_2]). \end{cases} \tag{16}$$

再应用 S 算子构造如下的递推公式:

$$\phi^{k+1}(t, s) = \mathrm{S}\phi^k(t, s) \qquad ((t, s) \in [0, n_1] \times [0, n_2], k = 0, 1, \cdots). \tag{17}$$

定理 1　由(15)式和(17)式分别定义了 $\{\Phi^k(t, s)\}$ 及 $\{\phi^k(t, s)\}$, 并假设 ϕ 是加细方程(4)的一个紧支撑的连续解, $I_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{u}}$ 为上面所定义, 则

1) 对每对 $(t, s) \in I_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{u}}$, 均有 $\Phi^k(t, s) = \boldsymbol{T}_{\varepsilon_1,\eta_1}\boldsymbol{T}_{\varepsilon_2,\eta_2}\cdots\boldsymbol{T}_{\varepsilon_k,\eta_k}\boldsymbol{v}$,

2) 对任意的 $k \geqslant 1$, $\phi^k(t, s)$ 是一个分段函数, 且有

$$\phi^k(t,s)=b^k_{(i,j),(h,w)}$$

(当$(t,s)\in\Delta^k_{(i,j),(h,w)}=\left[i+\frac{j}{2^k},i+\frac{j+1}{2^k}\right)\times\left[h+\frac{w}{2^k},h+\frac{w+1}{2^k}\right)$, $i=0,1,\cdots,n_1-1$,

$j=1,2,\cdots,2^{k-1}$; $h=0,1,\cdots,n_2-1$, $w=1,2,\cdots,2^{k-1}$),

其中

$$b^k_{(i,j),(h,w)}=\phi\Delta^k_{(i,j),(h,w)}=\frac{1}{\Delta^k_{(i,j),(h,w)}}\int_{i+\frac{j}{2^k}}^{i+\frac{j+1}{2^k}}\int_{h+\frac{w}{2^k}}^{h+\frac{w+1}{2^k}}\phi(t,s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s.$$

证明 用数学归纳法证明1). 若$(t,s)\in I_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{u}}$有$\Phi^k(t,s)=\boldsymbol{T}_{\varepsilon_1,\eta_1}\boldsymbol{T}_{\varepsilon_2,\eta_2}\cdots\boldsymbol{T}_{\varepsilon_k,\eta_k}\boldsymbol{v}$成立.

若$(t,s)\in I_{(0,\boldsymbol{e}),(0,\boldsymbol{u})}$, 则 $\Phi^{k+1}(t,s)=\mathrm{T}(\phi^k(t,s))=\boldsymbol{T}_{0,0}\boldsymbol{T}_{\varepsilon_1,\eta_1}\boldsymbol{T}_{\varepsilon_2,\eta_2}\cdots\boldsymbol{T}_{\varepsilon_k,\eta_k}=\boldsymbol{T}_{(0,\boldsymbol{e}),(0,\boldsymbol{u})}\boldsymbol{v}$

同理若$(t,s)\in I_{(0,\boldsymbol{e}),(1,\boldsymbol{u})}$, 则 $\Phi^{k+1}(t,s)=\boldsymbol{T}_{(0,\boldsymbol{e}),(1,\boldsymbol{u})}\boldsymbol{v}$; 若$(t,s)\in I_{(1,\boldsymbol{e}),(0,\boldsymbol{u})}$, 则 $\Phi^{k+1}(t,s)=\boldsymbol{T}_{(1,\boldsymbol{e}),(0,\boldsymbol{u})}\boldsymbol{v}$; 若$(t,s)\in I_{(1,\boldsymbol{e}),(1,\boldsymbol{u})}$, 则 $\Phi^{k+1}(t,s)=\boldsymbol{T}_{(1,\boldsymbol{e}),(1,\boldsymbol{u})}\boldsymbol{v}$. 从而证明了1).

2) 的证明是显然的. □

定理2 设$\phi(t,s)$是加细方程(4)的一个紧支撑连续的L^1解, $\{\phi^k(t,s)\}$由上面给出, 则$\{\phi^k(t,s)\}$一致收敛于$\{\phi(t,s)\}$.

证明 由于$\phi(t,s)$在闭区间$[0,n_1]\times[0,n_2]$上连续, 从而是一致连续, 所以对任给$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 当$(t_1,s_1),(t_2,s_2)\in[0,n_1]\times[0,n_2]$且$\sqrt{(t_1-t_2)^2+(s_1-s_2)^2}<\delta$时有$|\phi(t_1,s_1)-\phi(t_2,s_2)|<\varepsilon$. 由积分中值定理可知至少存在一个点$(t^k_{i,j},s^k_{h,w})\in\Delta^k_{(i,j),(h,w)}$使得$\phi(t^k_{i,j},s^k_{h,w})=b^k_{(i,j),(h,w)}$. 取$K$, 使得$\sqrt{2}/2^k<\delta$, 则任给$(t,s)\in[0,n_1]\times[0,n_2]$及当$k>K$时存在一个$i,j,h,w$: $0\leqslant i\leqslant n_1-1$, $0\leqslant j\leqslant 2^k$, $0\leqslant h\leqslant n_2-1$, $0\leqslant w\leqslant 2^k$使得$(t,s)\in\Delta^k_{(i,j),(h,w)}$. 则$\phi^k(t,s)=b^k_{(i,j),(h,w)}=\phi(t^k_{i,j},s^k_{h,w})$. 由于$(t,s)$, $(t^k_{i,j},s^k_{h,w})\in\Delta^k_{(i,j),(h,w)}$及$|\Delta^k_{(i,j),(h,w)}|<\delta$可得$|\phi(t,s)-\phi^k(t,s)|=|\phi(t,s)-\phi^k(t^k_{i,j},s^k_{h,w})|<\varepsilon$. 从而完成了定理2的证明. □

给定一个区域$X=[\alpha_1,\alpha_2]\times[\beta_1,\beta_2]$, $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\in\mathbf{R}$, 定义$K_{m,n}(X)=\{(k,h)\in\mathbf{Z}^2\mid 2^m\alpha_1-n_1\leqslant k\leqslant 2^m\alpha_2,\ 2^n\beta_1-n_2\leqslant h\leqslant 2^n\beta_2\}$, 则对任意$m,n$, 及任意的$X=[\alpha_1,\alpha_2]\times[\beta_1,\beta_2]$, 当$(k,h)\notin K_{m,n}$时必有$\phi(2^m-k,2^n-h)=0$. 记

$$g_{m,n}(t,s)=\sum_{(k,h)\in K_{m,n}(X)}f(2^{-m}t-k,2^{-n}s-h)\phi(2^mt-k,2^ns-h),$$

$$g^j_{m,n}(t,s)=\sum_{(k,h)\in K_{m,n}(X)}f(2^{-m}t-k,2^{-n}s-h)\phi^j(2^mt-k,2^ns-h).$$

定理3 设$f(t,s)$是连续的, $\phi(t,s)$是满足加细方程(4)的连续解, $\{\phi^j(t,s)\}$由(17)式定义. 则对任意给定的闭区域$X=[\alpha_1,\alpha_2]\times[\beta_1,\beta_2]$上的点$(t,s)$及$\varepsilon>0$, 存在$M,N>0$的$J>0$, 使得当$m>M$, $n>N$, $j>J$时有

$$f(t,s)=\sum_{(k,h)\in K_{m,n}(X)}f(2^{-m}t-k,2^{-n}s-h)\phi^j(2^mt-k,2^ns-h)+C_{m,n}\varepsilon,$$

其中$C_{m,n}$是一个仅依赖于m,n的常数.

证明 显然$\mathrm{supp}(\phi)=\mathrm{supp}(\phi^j)=[0,n_1]\times[0,n_2]$. 对固定的$m,n>0$, 对任意$(k,h)\in K_{m,n}(X)$均有下式成立:

$$\begin{cases} |2^{-m}k| \leqslant \max\{\alpha_2, n_1 - \alpha_1\} := L, \\ |2^{-n}h| \leqslant \max\{\beta_2, n_2 - \beta_1\} := H, \end{cases}$$

显然, L, H 是两个与 m, n 无关的常量, 因此可选择一个有限闭区域 Y, 使得 $(2^{-m}, 2^{-n})^{\mathrm{T}} K_{m,n}(X) \cup X \subset Y$• 当然 $f(t, s)$ 在有限区域 Y 上一致连续, 所以对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $(t_1, s_1), (t_2, s_2) \in Y$ 且 $\sqrt{(t_1 - t_2)^2 + (s_2 - s_2)^2} < \delta$ 时有 $|f(t_1, s_1) - f(t_2, s_2)| < \varepsilon$; 另一方面, 由定理 2 知, $\exists J > 0$, 当 $j > J$ 时恒有 $|\phi^j(t, s) - \phi(t, s)| < \varepsilon$; 根据上面的说明, 存在 $M, N, J > 0$, 当 $m > M, n > N, j > J$ 时有如下两个不等式:

$$|g^j_{m,n}(t, s) - g_{m,n}(t, s)| \leqslant C_{m,n}\varepsilon, \tag{18}$$

$$|g_{m,n}(t, s) - f_{m,n}(t, s)| \leqslant C^*_{m,n}\varepsilon• \tag{19}$$

结合 (18)、(19) 两式, 对同一个 ε, 有

$$\begin{aligned} |g^j_{m,n} - f(t, s)| &= |g^j_{m,n}(t, s) - g_{m,n}(t, s) + g_{m,n}(t, s) - f_{m,n}(t, s)| \leqslant \\ &\quad |g^j_{m,n}(t, s) - g_{m,n}(t, s)| + |g_{m,n}(t, s) - f_{m,n}(t, s)| \leqslant \\ &\quad [C_{m,n} + C^*_{m,n}]\varepsilon \end{aligned}$$

这就完成了定理 3 的证明• □

[参 考 文 献]

[1] Shannon C E. A mathematical theory of communication[J]. Bell System Tech J, 1948, **27**(3): 379—423.

[2] Walter G G. A sampling theory for wavelet subspace[J]. IEEE Trans Inform Theory, 1992, **38**(2): 881—884.

[3] 郭田德, 高自友, 吴士泉. 基于双尺度方程近似解的适合任何连续信号的近似采样定理[J]. 系统科学与数学, 2001, **21**(1): 64—71.

[4] 杨守志, 程正兴. 有限区间小波子空间上的采样定理及 $H^2(I)$ 空间中函数的逼近表示[J]. 数学物理学报, 2001, **21**(3): 410—415.

[5] Daubechies I, Lagarias J. Two_scale defference equation_Ⅰ: Global regularity of soutions[J]. SIAM J Math Anal, 1991, **22**(5): 1388—1410.

[6] Daubechies I, Lagarias J. Two_scale difference equation_Ⅱ: Local regularity, infinite products and fractals[J]. SIAM J Math Anal, 1991, **22**(4): 1031—1079.

[7] Lau K S, Wang J R. Characterization of solutions for two_scale dilation equations[J]. SIAM J Math Anal, 1995, **25**(4): 1018—1046.

[8] 程正兴. 小波分析算法与应用[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1998.

[9] Berger M A, Wang Y. Multidimensional two_scale dilation equations[A]. In: Chui C K, Ed. Wavelet: Atutorial in Theory and Applications[C]. New York: Academic Press, 1992, 295—323.

[10] HE Wen_jie, LAI Ming_jun. Examples of bivariae nonseparable compactly supported orthonormal continuous wavelets[J]. IEEE Trans Inform Theory, 2000, **9**(5): 949—953.

Approximate Sampling Theorem for Bivariate Continuous Function

YANG Shou_zhi[1], CHENG Zheng_xing[2], TANG Yuan_yan[3]
(1. Department of Mathematics, Shantou University,
Shantou, Guangdong 515063, P. R. China;
2. Faculty of Science, Xi' an Jiaotong University,
Xi' an 710049, P. R. China;
3. Department of Computer Science, Hongkong Baptist University,
Kowlon Tong, Hong Kong, P. R. China)

Abstract: An approximate solution of the refinement equation was given by its mask, and the approximate sampling theorem for bivariate continuous function was proved by applying the approximate solution. The approximate sampling function defined uniquely by the mask of the refinement equation is the approximate solution of the equation, a piece_wise linear function, and posseses an explicit computation formula. Therefore the mask of the refinement equation is selected according to one' s requirement, so that one may controll the decay speed of the approximate sampling function.

Key words: approximate sampling theorem; bivariate continuous signal; refinement equation; mask of refinement equation