应用数学和力学,第24卷 第10期(2003年10月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 10_1005_07

重建极性连续统理论的基本定律和原理(III)——Noether定理*

戴天民

(辽宁大学 数学系和数学应用中心,沈阳 110036)

(我刊原编委戴天民来稿)

摘要: 对现有的各种偶应力理论进行了认真的再研究,目的是要提出一个耦合型的Noether定理并由此重新建立偶应力弹性动力学的较为完整的守恒定律和相应的均衡方程• 这里给出了新的各种守恒定律和均衡方程的具体形式,并建立起从给定的不变性要求所得到的这类守恒定律的确切属性• 最后,由这里的结果自然地推导出各种特殊情形;并可自然地过渡到微极连续统的结果•

关 键 词: Noether定理; 偶应力弹性动力学; 偶应力弹性静力学; 守恒定律
中图分类号: O33 文献标识码: A

引 言

本文是文献[1,2]的直接延续•

早在1962年Mindlin和Tiersten[3]就给出了线性偶应力弹性理论的场方程• Toupin[4]建立起偶应力理论• 1966年Eringen[5,6]指出弹性介质和流体的偶应力理论可以通过把微极弹性理论和微极流体理论中的微转动矢量 ϕ_i 和 ψ_i 分别用经典弹性理论和流体力学中的转动矢量 ω_i 和涡旋矢量 r_i 来代替而直接导出• 我们已在[2]中指出这种论断对传统的连续统理论间的归结并不现实,只有在我们最近新建立起的耦合型微极连续统和不带微结构的连续统理论之间才能成立•

Atkinson和Leppington[7,8]和Eshelby[9]没有用Noether定理导出了偶应力弹性理论的 J 积分表达式•

Jaric[10]应用Noether定理提出线性微极弹性静力学的 J 积分型守恒定律• 这个工作推广了Knowles和Sternberg[11]的思想并首次把Noether定理应用于微极断裂力学问题• 1981年我们[12]把文献[10]和[11]的结果从经典弹性动力学和微极弹性静力学推广到微极弹性动力学,并推导出与Fletzer[13]结果相对应的6个守恒定律• 1983年金伏生[14]根据微分变分原理提出一个非保守场的定理并导出一类连续统力学的守恒定律• 1986年我们[15]建立起微极弹性动

* 收稿日期: 2002_05_19; 修订日期: 2003_05_09
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10072024);辽宁省教育委员会基础研究基金资助项目(990111001)
作者简介: 戴天民(1931—),男,满族,辽宁开原人,教授,博士,博士生导师,已发表专著译著12部和论文60余篇(E_mail: tianmin_dai@yahoo.com.cn)•

力学的若干路径无关积分定理• 1989 年 Vukobrat[16] 独立地推导出我们在[12, 15]中已经得到的部分结果• 由于这些理论都不够完整, 所以即使可以从它们直接归结出偶应力理论的结果, 但也将是不完整的•

最近 Lubarda 和 Markenscoff[17] 又由 Knowles 和 Sternberg[11] 理论出发, 从头开始建立起偶应力弹性静力学的守恒定律• 他们得到 J 积分和 L 积分是在 Budiansky 和 Rice[18] 意义下的推广, 并证明 M 积分并不存在• 实际上, 他们得出的 J 积分和 L 积分只是 Jaric[10] 的特殊情形•

鉴于现有的偶应力理论均不完整的现实, 我们拟在本文中利用 Noether 定理和[2]的理论重建偶应力弹性动力学的较为完整的守恒定律, 由此可以推导出各种特殊情形•

1 偶应力弹性动力学的 Noether 定理

现给出偶应力弹性动力学的 Noether 定理如下:

如果 u_i 和 ω_i 对 $\mathbf{R}$ 中所有 ξ_α 满足 Euler_Lagrange 方程

$$L_{,u_i} - \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} L_{,u_{i,\alpha}} - \rho f_i = 0, \tag{1}$$

$$L_{,\omega_i} - \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} L_{,\omega_{i,\alpha}} - \rho(l_i + \varepsilon_{ijk} x_j f_k) = 0, \tag{2}$$

则由下式定义的泛函

$$F = \int_R L \,\mathrm{d}\xi \tag{3}$$

是在 (u_i, ω_i) 处的无限小不变量, 当且仅当

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}(L a_\alpha + L_{,u_{i,\alpha}} p_i + L_{,\omega_{i,\alpha}} q_i) + \rho[f_i p_i + (l_i + \varepsilon_{ijk} x_j f_k) q_i] = 0 \cdot \tag{4}$$

与式(4)等价的积分形式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V (L_{,\dot{u}_i} p_i + L_{,\dot{\omega}_i} q_i + L a_4)\mathrm{d}V + \int_S (L_{,u_{i,j}} p_i + L_{,\omega_{i,j}} q_i + L a_j) n_j \mathrm{d}S +$$
$$\int_V \rho[f_i p_i + (l_i + \varepsilon_{ijk} x_j f_k) q_i]\mathrm{d}V = 0 \cdot \tag{5}$$

其中 u_i, ω_i, L, W, K, f_i 和 l_i 分别为位移矢量, 转动矢量, Lagrange 密度, 应变能密度, 动能密度, 体力密度和体力矩密度• 这里我们有

$$\xi_\alpha = \xi_i + \xi_4, \quad \xi_i = x_i, \quad \xi_4 = t; \tag{6}$$

$$\bar{\xi}_i = \xi_i + a_i \eta + O(\eta^2), \tag{7}$$

$$\bar{\xi}_4 = \xi_4 + a_4 \eta + O(\eta^2), \tag{8}$$

$$\bar{u}_i = u_i + b_i \eta + O(\eta^2), \tag{9}$$

$$\bar{\omega}_i = \omega_i + c_i \eta + O(\eta^2); \tag{10}$$

$$p_i = b_i - u_{i,\alpha} a_\alpha, \tag{11}$$

$$q_i = c_i - \omega_{i,\alpha} a_\alpha; \tag{12}$$

$$a_i = \left.\frac{\partial \bar{\xi}_i}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} = \varepsilon_{ijk} D_j x_k + C_i + E x_i, \tag{13}$$

$$a_4 = \left.\frac{\partial \bar{\xi}_4}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} = C_4 + E t, \tag{14}$$

$$b_i = \left.\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} = \varepsilon_{ijk} D_j u_k + A_i + E u_i, \tag{15}$$

$$c_i = \left.\frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} = B_i + \varepsilon_{ijk} D_j \omega_k + E\omega_i, \tag{16}$$

其中 A_i(刚性平移)、B_i(刚性转动)、C_i(坐标平移)、D_i(坐标转动) 和 C_4(时间迁移)、E(标量变化) 分别为任意常值矢量和常数•

由于推导这个偶应力弹性动力学的 Noether 定理与我们在[12] 和 Vukobrat 在[16] 中对微极弹性动力学的推导过程类似, 因此证明从略•

2 偶应力弹性动力学的守恒定律

对任意二次可微的矢量 u_i 和 ω_i, 偶应力弹性动力学的 Lagrange 密度应采取下列形式

$$L = W - K = [\boldsymbol{t} : \nabla \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{m} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{t}) : \nabla \boldsymbol{\omega}] - \frac{\rho}{2}[(\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{x}) \cdot (\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{s} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}], \tag{17}$$

这里 $\boldsymbol{s} = s_k \boldsymbol{g}_k = j_{kl}\omega_l \boldsymbol{g}_k$ 可称为宏自旋密度•

把式(11)、(12)、(17) 代入式(4) 和式(5), 并依次 ($A_i \neq 0$, $B_i \neq 0$, $C_4 \neq 0$, $C_i \neq 0$, $D_i \neq 0$, $E \neq 0$) 取一个不等于零其余任意常数或常值矢量为零, 我们即可分别得到下列偶应力弹性动力学的微分型和积分型守恒定律:

1. 动量守恒定律 ($A_i \neq 0$)

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\rho(\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{x})]\mathrm{d}V + \nabla \cdot \boldsymbol{t} + \rho \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} \tag{18a}$$

和

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho(\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{x})\mathrm{d}V + \int_S \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{t}\,\mathrm{d}S + \int_V \rho \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}V = \boldsymbol{0}• \tag{18b}$$

2. 角动量守恒定律 ($B_k \neq 0$)

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\rho[\boldsymbol{s} + \boldsymbol{x} \times (\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{x})]\right\} + \nabla \cdot (\boldsymbol{m} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{t}) + \rho(\boldsymbol{l} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{f}) = \boldsymbol{0} \tag{19a}$$

和

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho[\boldsymbol{s} + \boldsymbol{x} \times (\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{x})]\mathrm{d}V + \int_S \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{m} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{t})\mathrm{d}S + \int_V \rho(\boldsymbol{l} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{f})\mathrm{d}V = \boldsymbol{0}• \tag{19b}$$

3. 能量守恒定律 ($C_4 \neq 0$)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{W + \frac{\rho}{2}[(\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{x}) \cdot (\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{s} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}]\right\} - \nabla \cdot [\boldsymbol{t} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} + (\boldsymbol{m} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{t}) \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}] - \rho[\boldsymbol{f} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} + (\boldsymbol{l} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{f}) \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}] = 0 \tag{20a}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \left\{W + \frac{\rho}{2}[(\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{x}) \cdot (\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{s} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}]\right\}\mathrm{d}V - \int_S \boldsymbol{n} \cdot [\boldsymbol{t} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} + (\boldsymbol{m} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{t}) \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}]\mathrm{d}S - \int_V \rho[\boldsymbol{f} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} + (\boldsymbol{l} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{f}) \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}]\mathrm{d}V = 0• \tag{20b}$$

4. 坐标平移守恒定律 ($C_k \neq 0$)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\rho[(\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{u}\nabla) + (\boldsymbol{s} + \boldsymbol{x} \times (\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{x})) \cdot (\boldsymbol{\omega}\nabla)]\right\} +$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}[L\boldsymbol{I}-\boldsymbol{t}:(\boldsymbol{u}\nabla)-(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t}):(\omega\nabla)]-\rho[\boldsymbol{f}\cdot(\boldsymbol{u}\nabla)+(\boldsymbol{l}+\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{f})\cdot(\omega\nabla)]=0 \tag{21a}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\rho[(\dot{\boldsymbol{u}}+\dot{\omega}\times\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{u}\nabla)+(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{x}\times(\dot{\boldsymbol{u}}+\dot{\omega}\times\boldsymbol{x}))\cdot(\omega\nabla)]\mathrm{d}V+\int_S\boldsymbol{n}\cdot[L\boldsymbol{I}-\boldsymbol{t}:(\boldsymbol{u}\nabla)-(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t}):(\omega\nabla)]\mathrm{d}S-\int_V\rho[\boldsymbol{f}\cdot(\boldsymbol{u}\nabla)+(\boldsymbol{l}+\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{f})\cdot(\omega\nabla)]\mathrm{d}V=0, \tag{21b}$$

这里$(\ )\nabla=(\ ),\nabla_j\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j$和$\boldsymbol{I}=\delta_{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j$分别是$(\ )$的右梯度和二阶单位张量•

5. 坐标转动守恒定律$(D_j\neq 0)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\rho\{(\dot{\boldsymbol{u}}+\dot{\omega}\times\boldsymbol{x})\cdot[\varepsilon\cdot\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{u}\nabla)\cdot\varepsilon\cdot\boldsymbol{x}]+(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{x}\times(\dot{\boldsymbol{u}}+\dot{\omega}\times\boldsymbol{x}))\cdot[\varepsilon\cdot\omega-(\omega\nabla)\cdot\varepsilon\cdot\boldsymbol{x}]\}]-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}[\{\boldsymbol{t}\cdot[\varepsilon\cdot\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{u}\nabla)\cdot\varepsilon\cdot\boldsymbol{x}]+(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t})\cdot[\varepsilon\cdot\omega-(\omega\nabla)\cdot\varepsilon\cdot\boldsymbol{x}]\}+L\varepsilon\cdot\boldsymbol{x}]-\rho\{\boldsymbol{f}\cdot[\varepsilon\cdot\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{u}\nabla)\cdot\varepsilon\cdot\boldsymbol{x}]+(\boldsymbol{l}+\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{f})\cdot[\varepsilon\cdot\omega-(\omega\nabla)\cdot\varepsilon\cdot\boldsymbol{x}]\}=\boldsymbol{0} \tag{22a}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\rho\{(\dot{\boldsymbol{u}}+\dot{\omega}\times\boldsymbol{x})\cdot[\varepsilon\cdot\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{u}\nabla)\cdot\varepsilon\cdot\boldsymbol{x}]+(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{x}\times(\dot{\boldsymbol{u}}+\dot{\omega}\times\boldsymbol{x}))\cdot[\varepsilon\cdot\omega-(\omega\nabla)\cdot\varepsilon\cdot\boldsymbol{x}]\}\mathrm{d}V-\int_S\boldsymbol{n}\cdot\{\boldsymbol{t}\cdot[\varepsilon\cdot\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{u}\nabla)\cdot\varepsilon\cdot\boldsymbol{x}]+(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t})\cdot[\varepsilon\cdot\omega-(\omega\nabla)\cdot\varepsilon\cdot\boldsymbol{x}]+L\varepsilon\cdot\boldsymbol{x}\}\mathrm{d}S-\int_V\rho\{\boldsymbol{f}\cdot[\varepsilon\cdot\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{u}\nabla)\cdot\varepsilon\cdot\boldsymbol{x}]+(\boldsymbol{l}+\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{f})\cdot[\varepsilon\cdot\omega-(\omega\nabla)\cdot\varepsilon\cdot\boldsymbol{x}]\}\mathrm{d}V=\boldsymbol{0}\cdot \tag{22b}$$

这里$\varepsilon=\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}_k$为交替张量•

6. 标量变化守恒定律$(E\neq 0)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[Lt-\rho\{(\dot{\boldsymbol{u}}+\dot{\omega}\times\boldsymbol{x})\cdot[\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{u}\nabla)\cdot\boldsymbol{x}-\dot{\boldsymbol{u}}t]+(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{x}\times(\dot{\boldsymbol{u}}+\dot{\omega}\times\boldsymbol{x}))\cdot[\omega-(\omega\nabla)\cdot\boldsymbol{x}-\dot{\omega}t]\}]+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}\{\boldsymbol{t}\cdot[\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{u}\nabla)\cdot\boldsymbol{x}-\dot{\boldsymbol{u}}t]+(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t})\cdot[\omega-(\omega\nabla)\cdot\boldsymbol{x}-\dot{\omega}t]+L\boldsymbol{x}\}+\rho\{\boldsymbol{f}\cdot[\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{u}\nabla)\cdot\boldsymbol{x}-\dot{\boldsymbol{u}}t]+(\boldsymbol{l}+\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{f})\cdot[\omega-(\omega\nabla)\cdot\boldsymbol{x}-\dot{\omega}t]\}=0 \tag{23a}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V[Lt-\rho\{(\dot{\boldsymbol{u}}+\dot{\omega}\times\boldsymbol{x})\cdot[\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{u}\nabla)\cdot\boldsymbol{x}-\dot{\boldsymbol{u}}t]+(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{x}\times(\dot{\boldsymbol{u}}+\dot{\omega}\times\boldsymbol{x}))\cdot[\omega-(\omega\nabla)\cdot\boldsymbol{x}-\dot{\omega}t]\}]\mathrm{d}V+\int_S\boldsymbol{n}\cdot\{\boldsymbol{t}\cdot[\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{u}\nabla)\cdot\boldsymbol{x}-\dot{\boldsymbol{u}}t]+(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t})\cdot[\omega-(\omega\nabla)\cdot\boldsymbol{x}-\dot{\omega}t]+L\boldsymbol{x}\}\mathrm{d}S+\int_V\rho\{\boldsymbol{f}\cdot[\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{u}\nabla)\cdot\boldsymbol{x}-\dot{\boldsymbol{u}}t]+$$

$$(\boldsymbol{l}+\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{f})\cdot[\omega-(\omega\cdot\nabla)\cdot\boldsymbol{x}-\dot{\omega}t]\}\,\mathrm{d}V=0\cdot \tag{23b}$$

3 特殊情形

3.1 半耦合的偶应力弹性动力学

我们所推导出的偶应力弹性动力学守恒定律(18)~(23)是耦合型的，而且是相当完整的•

若在前面的(18)~(23)诸式中略去转动速度对速度的影响，即取 $\dot{\omega}\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，则可得半耦合型的偶应力弹性动力学的守恒定律•

3.2 传统的偶应力弹性动力学

若在前面的(18)~(23)诸式中，略去转动速度对速度的影响，并在(20)~(23)诸式中略去动量、面力和体力分别对动量矩、面力矩和体力矩的影响，即得传统的偶应力弹性动力学守恒定律•

3.3 偶应力弹性静力学

在这种情况下，位移场 $\boldsymbol{u}$ 和转动场 ω 均与时间无关，于是 $K=0$，和 $L=W$•

另外，如果再略去体力对体力矩以及面力对面力矩的影响，则由(21)、(22)和(23)可分别得到 3 维 J_k、L_k 和 M 积分如下：

$$\boldsymbol{J}=\int_S \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P}\,\mathrm{d}S=\boldsymbol{0}, \tag{24a}$$

$$\boldsymbol{L}=\int_S \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{P}\cdot\varepsilon\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{t}\cdot\varepsilon\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{m}\cdot\varepsilon\cdot\omega)\,\mathrm{d}S=\boldsymbol{0}, \tag{25a}$$

$$M=\int_S \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{u}-\boldsymbol{m}\cdot\omega)\,\mathrm{d}S=0, \tag{26a}$$

$$\boldsymbol{P}=W\boldsymbol{I}-\boldsymbol{t}\cdot(\boldsymbol{u}\nabla)-\boldsymbol{m}\cdot(\omega\nabla)\cdot \tag{27a}$$

或写成下列分量形式：

$$J_k=\int_S n_jP_{jk}\,\mathrm{d}S=0, \tag{24b}$$

$$L_k=\int_S \varepsilon_{kij}(P_{li}x_j+t_{li}u_j+m_{li}\omega_j)\,n_l\,\mathrm{d}S=0, \tag{25b}$$

$$M=\int_S (P_{lk}x_k-t_{lk}u_k-m_{lk}\omega_k)\,n_l\,\mathrm{d}S=0, \tag{26b}$$

$$P_{lk}=W\delta_{lk}-t_{lj}u_{j,k}-m_{lj}\omega_{j,k}\cdot \tag{27b}$$

这里 $\boldsymbol{P}=P_{lk}\boldsymbol{g}_l\boldsymbol{g}_k$ 是偶应力弹性理论的能量动量张量•

Lubarda 和 Markenscoff[17] 推广了 Knowles 和 Sternberg[11] 的思想推导出守恒积分(24)和(25)以及下列 M 守恒积分

$$M=\int_S\left(P_{lk}x_k-\frac{1}{2}t_{lk}u_k-\frac{3}{2}m_{lk}\omega_k\right)n_l\,\mathrm{d}S=0, \tag{28}$$

并证明了在偶应力弹性静力学中并不存在上列守恒积分•

4 结束语

由本文提出的守恒定律可以自然地推导出偶应力弹性理论的均衡方程•

根据 Eringen[5,6] 的观点，本文给出的守恒定律和相应的均衡方程就应是我们在[19]中新建立的连续统力学的结果•

本文给出的守恒定律可以自然地过渡到微极弹性动力学的结果•

[参 考 文 献]

[1] 戴天民• 重建极性连续统理论的基本定律和原理(Ⅰ)——微极连续统[J]• 应用数学和力学, 2003, **24**(10): 991—997.

[2] 戴天民• 重建极性连续统理论的基本定律和原理(Ⅱ)——微态连续统理论和偶应力理论[J]• 应用数学和力学, 2003, **24**(10): 998—1004.

[3] Mindlin R D, Tiersten H F• Effects of couple stress in linear elasticity [J]. Arch Rat Mech Anal, 1962, **11**: 415—448.

[4] Toupin R A. Theories of elasticity with couple-stress [J]. Arch Rat Mech Anal, 1964, **17**: 85—112.

[5] Eringen A C. Linear theory of micropolar elasticity[J]. J Math Mech, 1966, **15**: 909—923.

[6] Eringen A C. Theory of micropolar fluids[J]. J Math Mech, 1966, **16**: 1—18.

[7] Atkinson C, Leppington F G. Some calculations of the energy-release rate G for cracks in micropolar and couple-stress elastic media[J]. Int J Fracture, 1974, **10**: 599—602.

[8] Atkinson C, Leppington F G. The effect of couple-stresses on the tip of a crack[J]. Int J Solids Struct, 1977, **13**: 1103—1122.

[9] Eshelby J D. The energy-momentum tensor of complex continua[A]. In: Kroener E, Anthony K H Eds. Continuum Models of Discrete Systems [C]. Waterloo: University of Waterloo Press, 1980: 651—665.

[10] Jaric J. Conservation laws of the J-integral type in micropolar elastostatics[J]. Int J Engng Sci, 1978, **16**: 967—984.

[11] Knowles J K, Sternberg E. On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics[J]. Arch Rat Mech Anal, 1972, **44**: 187—211.

[12] 戴天民. 微极线性弹性动力学的守恒定律和跳变条件[J]. 力学学报, 1981, **13**(5): 271—279.

[13] Fletzer D C. Conservation laws in linear elastodynamics[J]. Arch Rat Mech Anal, 1976, **60**: 329—353.

[14] 金伏生. 非保守场守恒定律及某类连续介质力学的守恒定律[J]. 力学学报, 1983, **15**(3): 184—189.

[15] DAI Tian_min. Some path in dependent integrals for micropolar media [J]. Int J Solids Struct, 1986, **22**(7): 729—735.

[16] Vukobrat M. Conservation laws in micropolar elastodynamics and path-independent integrals[J]. Int J Engng Sci, 1989, **27**(9): 1093—1106.

[17] Lubarda V A, Markenscoff X. Conservation laws in couple stress elasticity[J]. J Mech Phys Solids, 2000, **48**: 553—564.

[18] Budiansky B, Rice J R. Conservation laws and energy-release rates [J]. J Appl Mech, 1973, **40**: 201—203.

[19] DAI Tian-min. On basic laws and principles for continuum field theories[A]. In: CHIEN Wei_zang Ed. Proceedings of the 4th International Conference on Nonlinear Mechanics [C]. Shanghai: Shanghai University Press, 2002, 29—41.

Renewal of Basic Laws and Principles for Polar Continuum Theories(Ⅲ)—Noether's Theorem

DAI Tian-min

(Department of Mathematics & Center for the Application of Mathematics, Liaoning University, Shenyang 110036, P.R. China)

Abstract: The existing various couple stress theories have been carefully restudied. The purpose is to propose a coupled Noether's theorem and to reestablish rather complete conservation laws and balance equations for couple stress elastodynamics. The new concrete forms of various conservation laws of couple stress elasticity are derived. The precise nature of these conservation laws which result from the given invariance requirements are established. Various special cases are reduced and the results of micropolar continua may be naturally transited from the results presented in this paper.

Key words: Noether's theorem; couple stress elastodynamics; couple stress elastostatics; conservation law