

文章编号: 1000-0887(2003) 10-1069-06

位势问题边界元法中几乎奇异积分的正则化*

周焕林¹, 牛忠荣², 王秀喜¹

(1. 中国科学技术大学 力学系, 合肥 230026;
2. 合肥工业大学 工程力学系, 合肥 230009)

(皓江推荐)

摘要: 将一种通用算法应用于平面位势问题边界元法中近边界点几乎奇异积分的正则化。对线性单元, 位势问题近边界点的几乎强和超奇异积分可归纳为两种形式。通过分部积分, 将引起奇异的积分元素变换到积分号之外, 从而对这两种积分分别给出了无奇异的正则化计算公式。除了线性元, 二次元也应用于该算法。与近边界点临近的二次单元划分为两段线性单元, 该算法仍然适用。算例证明了方法的有效性和精确性。对曲线边界问题, 联合二次元和线性元可提高计算结果精确度。

关键词: 边界元法; 几乎奇异积分; 正则化; 位势问题
中图分类号: O343.1; O242.1 **文献标识码:** A

引 言

边界元法作为一种重要的数值方法在许多领域得到了广泛的应用^[1]。然而边界元法存在边界点和近边界点奇异积分的麻烦, 其准确性很大程度上依赖于奇异积分的计算精度。许多研究者做了大量工作处理奇异积分^[2, 3], 文[4]对此作了全面的综述。这些方法对几乎奇异积分的计算都有一定的效果, 但是其适应性和精确度还有待提高。

文[5]提出了一种计算近边界点参量的通用算法, 将导致奇异的积分元素用分部积分变换到积分号之外, 从而直接半解析地计算出了二维弹性力学问题近边界点参量的几乎强奇异和超奇异积分。本文将此算法拓展用于二维位势问题, 且进一步将该算法推广应用于二次插值, 计算了近边界点的位势及其梯度。

1 平面位势问题内点位势和梯度

考虑二维位势问题, 区域内点 y 的边界积分方程可写成如下形式

$$u(y) = \int_{\Gamma} u^*(x, y) q(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} q^*(x, y) u(x) d\Gamma, \quad (1)$$

* 收稿日期: 2001_11_27; 修订日期: 2003_04_15
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10272039)
作者简介: 周焕林(1973—), 男, 安徽宿松人, 博士生(E-mail: zhouhl@mail.ustc.edu.cn).

式中 $u^*(x, y) = - (1/2\pi) \ln r$ 为位势基本解, $q^*(x, y) = - r_{,ini}/(2\pi r)$ 为位势基本解对边界外法线的梯度. 其中 r 为源点 y 到边界上任意场点 x 的距离. 把边界离散为 N 个线性单元, 引入形函数 $N_1 = (1 - \xi)/2, N_2 = (1 + \xi)/2$, 则式(1) 离散积分影响系数分别为

$$\int_{\Gamma_j} u^*(x, y) N_k d\Gamma = - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \ln r N_k d\Gamma \quad (k = 1, 2), \quad (2)$$

$$\int_{\Gamma_j} q^*(x, y) N_k d\Gamma = - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \left[\frac{r_{,ini} N_k}{r} \right] d\Gamma \quad (k = 1, 2). \quad (3)$$

y 点在 x_1, x_2 两个方向位势梯度 q_{x_1}, q_{x_2} 可对式(1) 求导而得

$$q_{x_k}(y) = \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*(x, y)}{\partial y_k} q(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial q^*(x, y)}{\partial y_k} u(x) d\Gamma \quad (k = 1, 2). \quad (4)$$

类似式(2)和(3), 式(4) 离散积分影响系数为

$$\int_{\Gamma_j} \frac{\partial u^*(x, y)}{\partial y_k} N_l d\Gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r} r_{,kl} N_l d\Gamma \quad (k, l = 1, 2), \quad (5)$$

$$\int_{\Gamma_j} \frac{\partial q^*(x, y)}{\partial y_k} N_l d\Gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \left[\frac{1}{r} r_{,lm} \right]_{,k} N_l d\Gamma \quad (k, m, l = 1, 2), \quad (6)$$

这里 $r_{,k} = \partial r / \partial x_k = - \partial r / \partial y_k$. 对应式(2) 的积分为弱奇异, 普通高斯积分可以计算. 而式(3)、(5)和(6) 的积分为强奇异或超奇异. 当源点趋近边界相对较近时, 普通高斯积分将失效, 本文对其进行正则化处理.

2 几乎奇异积分计算和积分核处理

对单元的几何形状和物理量作线性插值. 设单元始、末两端节点 I、F 的坐标分别为 (x_{1I}, x_{2I}) 、 (x_{1F}, x_{2F}) , 将单元从总体坐标系变换到局部坐标系, 变换式为

$$x_i = \left[\frac{s_i}{2} \right] \xi + \frac{x_{iF} + x_{iI}}{2} \quad (\xi \in [-1, 1], i = 1, 2), \quad (7)$$

式中 $s_i = x_{iF} - x_{iI}$.

引入 $\xi = (x_{iF} + x_{iI})/2 - y_i$

和 $r_i = x_i - y_i$

有

$$r_{,i} = \frac{r_i}{r} = \frac{\frac{s_i}{2} \xi + \xi}{r}, \quad (8)$$

$$R = r^2 = r_i r_i = a \xi^2 + b \xi + c = a[(\xi - d)^2 + e^2], \quad (9)$$

其中

$$\begin{cases} a = \frac{s^2}{4}, & b = s_i \xi, & c = \xi \xi, \\ \delta = \sqrt{4ac - b^2}, & d = -\frac{b}{2a}, & e = \frac{2\delta}{s^2}, \end{cases} \quad (10)$$

参数 a, b, c, d 和 e 由单元节点和源点 y 的坐标确定. e 的几何意义为源点 y 到单元 Γ_e 的最小距离与单元长度 s 比值的两倍, 它反映了源点距离边界的相对接近程度. 故 e 定义为源点 y 到边界的接近度^[5]. 本文算例用此参数显示了本文方法相对于常规方法的优势.

考察式(3)、(5)和(6) 的积分核及其积分. 其积分核分别为

$$\frac{r_i n_k N_k}{r} = \frac{r_i n_k N_k}{r^2} = \frac{r_i n_k N_k}{R} \quad (i, k = 1, 2), \quad (11)$$

$$\frac{r_k N_l}{r} = \frac{r_k N_l}{r^2} = \frac{r_k N_l}{R} \quad (k, l = 1, 2), \quad (12)$$

$$\left(\frac{1}{r} r_{, mn} \right)_{, k} = \frac{n_k N_l}{r^2} - \frac{2r_m n_m r_k N_l}{r^4} = \frac{n_k N_l}{R} - \frac{2r_m n_m r_k N_l}{R^2} \quad (k, m, l = 1, 2) \bullet \quad (13)$$

注意线性插值时, $d\Gamma = (s/2) d\xi$, 因此式(3)、(5)和(6)的积分包含以下两种形式

$$I_1 = \int_{-1}^1 \frac{P_1}{R} d\xi \quad I_2 = \int_{-1}^1 \frac{P_2}{R^2} d\xi \quad (14)$$

式中 P_1, P_2 为局部坐标 ξ 的多项式. 存在积分递推公式^[5,6]

$$J_1 = \int \frac{d\xi}{R} = \int \frac{d\xi}{a\xi^2 + b\xi + c} = \frac{2}{\delta} \arctan \frac{2a\xi + b}{\delta}, \quad (15a)$$

$$J_n = \int \frac{d\xi}{R^n} = \int \frac{d\xi}{(a\xi^2 + b\xi + c)^n} = \frac{2a\xi + b}{(n-1)\delta^2 R^{n-1}} + \frac{2n-3}{n-1} \frac{2a}{\delta^2} J_{n-1}. \quad (15b)$$

考虑标记

$$g = \arctan z, \quad R' = 2a\xi + b, \quad z = R'/\delta$$

和

$$K_i = \int z^i \arctan z dz,$$

其中 $i = 0, 1, 2, 3$, 反复运用分部积分, 最终有

$$I_1 = \left\{ \frac{2}{\delta} P_1 g - \frac{1}{a} P_1' \left[\left(\frac{R'}{\delta} \right) g - \frac{1}{2} \ln(\delta^2 + R'^2) \right] + \frac{\delta}{4a^2} P_1'' \left[\left(\frac{R'}{\delta} \right)^2 g - \frac{R'}{\delta} + g \right] - \frac{\delta^2}{8a^3} P_1^{\circledast} \left(K_0 + K_2 - \frac{2aR}{\delta^2} \right) \right\} \Big|_{\xi=-1}^1 - \frac{1}{2a} \int_{-1}^1 P_1'' \ln(\delta^2 + R'^2) d\xi + \frac{\delta^2}{8a^3} \int_{-1}^1 P_1^{(4)} \left(K_0 + K_2 - \frac{2aR}{\delta^2} \right) d\xi \quad (16a)$$

$$I_2 = \left\{ \frac{1}{\delta^2} \frac{R'}{R} P_2 + \frac{2}{\delta^3} (2aP_2 - R'P_2') g + \frac{1}{2a\delta^2} P_2'' \left[\left(\frac{R'}{\delta} \right)^2 g + g - \frac{R'}{\delta} \right] - \frac{1}{4a^2} P_2^{\circledast} \left(K_0 + K_2 - \frac{2aR}{\delta^2} \right) + \frac{\delta}{8a^3} P_2^{(4)} \left(K_1 + \frac{1}{3} K_3 \right) \right\} \Big|_{\xi=-1}^1 - \frac{1}{4a^2} \int_{-1}^1 P_2^{(4)} \left[\frac{2aR}{\delta^2} + \frac{1}{6} \left(\frac{R'}{\delta} \right)^2 + \frac{1}{3} \ln(\delta^2 + R'^2) - \frac{2}{3} \ln \delta \right] d\xi - \frac{\delta}{8a^3} \int_{-1}^1 P_2^{(5)} \left(K_1 + \frac{1}{3} K_3 \right) d\xi \bullet \quad (16b)$$

而式(3)、(5)和(6)中对应式(14)的 P_1, P_2 多项式分别为:

$$P_{1a} = nr_i N_k, \quad P_{1b} = rk N_l, \quad P_{1c} = nk N_l, \quad (17)$$

$$P_2 = 2r_m n_m r_k N_l \bullet \quad (18)$$

将 P_1, P_2 分别对 ξ 求导, 代入式(16a)和(16b), 显然有

$$P_{1a}^{\circledast} = P_{1b}^{\circledast} = P_{1c}^{\circledast} = 0, \quad P_2^{(4)} = 0 \bullet \quad (19)$$

因此, 式(16a)最后一项为零, 余下的积分式中核函数是正则化的函数. 而式(16b)后两项积分为零, 余下式子为完全解析的形式. 至此, 对平面位势问题, 当源点趋近于边界时, 其产生的几乎奇异积分转化为无奇异积分或解析算式.

由式(7)~(10)定义可知, 式(16)的半解析积分只适用于线性元. 而对曲线边界问题, 高

次元一般可提高解的精确度。考虑将边界离散为二次单元,在求近边界点 y 物理参量时,把与该点邻近的三节点二次单元分成两段线性单元。在拆分后的这两个线性单元上,几何形状和边界变量采用线性插值,因此可分别在这两段线性单元上采用积分公式(16a)和(16b)。而与近边界点 y 距离较远的单元仍保持二次单元模式,用常规积分就可以精确计算。

3 数值算例及结论

例 1 方形闭域的热传导,见图 1。将边界分成 12 个均匀线性单元,每个单元长为 2。角点 $O(0, 0)$ 附近的近边界点位势和位势梯度计算结果列于表 1。

例 2 椭圆截面直杆的圣维南扭转,见图 2。计算 $A(7.700\ 8, 3.189\ 8)$ 点附近近边界点的扭转函数 u 及其梯度 q_{x_1} 和 q_{x_2} 。由对称性,在 $1/4$ 部分边界划分单元,采用了线性元和二次元两套计算方案:

方案 1 $x_1 = 0$ 边 4 个线性元, $x_2 = 0$ 边 8 个线性元, $1/4$ 椭圆边 8 个线性元;

方案 2 $x_1 = 0$ 边 2 个二次元, $x_2 = 0$ 边 4 个二次元, $1/4$ 椭圆边 4 个二次元。

两套方案节点数目和相应的节点坐标都相同,计算结果及与精确解比较见图 3 和图 4。

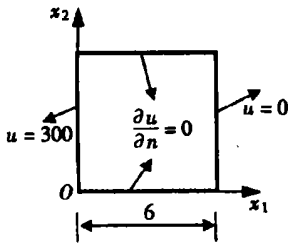


图 1 方形闭域热流

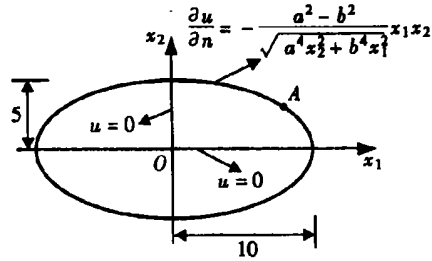


图 2 椭圆截面直杆圣维南扭转

表 1 线性元计算例 1 位势 u 和位势梯度 q_{x_1}

近边界点坐标		接近度 e	位势 u			位势梯度 q_{x_1}		
x_1	x_2		常规方法	本文方法	精确解	常规方法	本文方法	精确解
0.900 000 0	0.900 000 0	0.9	254.730 6	255.000 0	255.000 00	-49.844 35	-49.999 99	-50.000 00
0.800 000 0	0.800 000 0	0.8	259.934 8	260.000 0	260.000 00	—	-49.999 99	-50.000 00
0.400 000 0	0.400 000 0	0.4	275.579 5	279.999 7	280.000 00	—	-50.000 32	-50.000 00
0.300 000 0	0.300 000 0	0.3	—	285.000 1	285.000 00	—	-50.000 34	-50.000 00
0.100 000 0	0.100 000 0	0.1	—	294.999 8	295.000 00	—	-50.000 15	-50.000 00
0.010 000 0	0.010 000 0	0.01	—	299.489 5	299.500 00	—	-50.000 06	-50.000 00
0.000 100 0	0.000 100 0	0.000 1	—	299.905 9	299.995 00	—	-50.000 06	-50.000 00
0.000 014 0	0.000 014 0	0.000 014	—	299.908 4	299.999 30	—	-50.490 00	-50.000 00
0.000 010 0	0.000 010 0	0.000 010	—	299.908 5	299.999 50	—	—	-50.000 00
0.000 000 1	0.000 000 1	0.000 000 1	—	300.126 7	299.999 99	—	—	-50.000 00

表 1 结果表明,当源点离单元的距离的两倍与单元的长度之比——接近度 $e = 0.4$ 时,常规边界元法计算的位势结果开始失效,而本文方法在同样的单元尺寸时,直至 $e = 1 \times 10^{-7}$,计算结果仍趋近于精确解;当接近度 $e = 0.9$ 时,常规方法计算的位势梯度结果开始失效,而本文

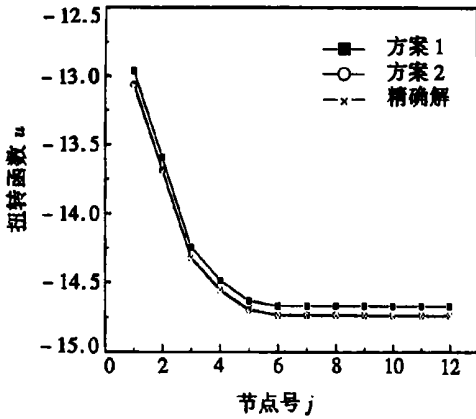


图3 扭转函数3种解比较

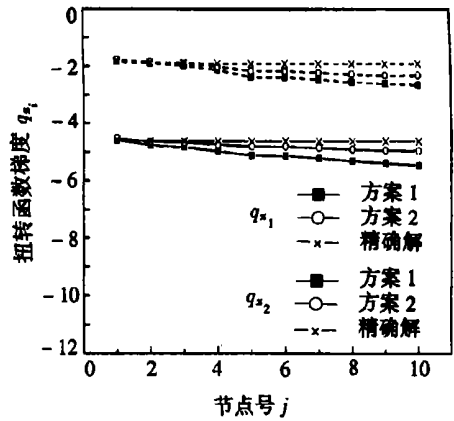


图4 扭转函数梯度3种解比较

方法直至接近度小到 $e = 1.4 \times 10^{-5}$, 计算结果仍很精确。随着接近度更加减小, 本文方法位势梯度计算结果也开始失效, 这时只需在该处细分单元。

图3给出了点 $A(7.7008, 3.1898)$ 附近12个近边界点扭转函数 u 的3种计算结果, 近边界点接近度 e 在区间 $(1.5 \times 10^{-6}, 0.4)$ 内。图4给出了点 A 附近10个近边界点扭转函数梯度 q_{x_1} 和 q_{x_2} 的3种解, 近边界点接近度 e 在区间 $(1.5 \times 10^{-5}, 0.4)$ 内。图3和图4表明, 二次元结果比线性元结果更趋近精确解, 具有更高的精确度。而对这些近边界点, 常规方法计算结果都已失效。

总之本文正则化方法成功求解了平面位势问题中的几乎奇异积分, 有效地缩小了近边界点接近度 e 的值, 且计算结果精确度较常规方法高。线性元和二次元均适用于该算法。

[参 考 文 献]

- [1] Brebbia C A, Telles J C, Wrobel L C. Boundary Element Techniques [M]. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1984.
- [2] Ghosh N, Rajiyah H, Ghosh S, et al. A new boundary element method formulation for linear elasticity[J]. J Appl Mech, 1986, 53(1): 69—76.
- [3] Huang Q, Cruse T A. Some notes on singular integral techniques in boundary element analysis[J]. Internat J Numer Methods Engrg, 1993, 36(3): 2643—2659.
- [4] Tanaka M, Sladek V, Sladek J. Regularization techniques applied to BEM[J]. Appl Mech Rev, 1994, 47(10): 457—499.
- [5] 牛忠荣, 王秀喜, 周焕林. 边界元法计算近边界点参量的一个通用算法[J]. 力学学报, 2001, 33(2): 276—283.
- [6] 牛忠荣. 边界元法中奇异积分问题的研究及其在固体力学中的应用[D]. 博士学位论文. 合肥: 中国科学技术大学, 2001.

Regularization of Nearly Singular Integrals in the Boundary Element Method of Potential Problems

ZHOU Huan_lin¹, NIU Zhong_rong², WANG Xiu_xi¹

- (1. Department of Mechanics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, P. R. China;
2. Department of Engineering Mechanics, Hefei University of Technology, Hefei 230009, P. R. China)

Abstract: A general algorithm is applied to the regularization of nearly singular integrals in the boundary element method of planar potential problems. For linear elements, the strongly singular and hypersingular integrals of the interior points very close to boundary were categorized into two forms. The factor leading to the singularity was transformed out of the integral representations with integration by parts, so non_singular regularized formulas were presented for the two forms of integrals. Furthermore, quadratic elements are used in addition to linear ones. The quadratic element very close to the internal point can be divided into two linear ones, so that the algorithm is still valid. Numerical examples demonstrate the effectiveness and accuracy of this algorithm. Especially for problems with curved boundaries, the combination of quadratic elements and linear elements can give more accurate results.

Key words: BEM; nearly singular integral; regularization; potential problem