

文章编号: 1000-0887(2003) 09\_0881\_11

# 具有随厚度变化膨胀特征应变的 弹性层的分析\*

何陵辉<sup>1</sup>, 林志华<sup>2</sup>, 刘人怀<sup>3</sup>

(中国科学技术大学 力学与机械工程系, 合肥 230026;

2. 香港城市大学 建筑系, 香港;

3. 暨南大学 应用力学研究所, 广州 510632)

(本刊编委刘人怀来稿)

**摘要:** 提出了含随厚度变化膨胀特征应变的弹性层在任意载荷作用下的一般分析步骤。该研究基于状态空间方法和一种渐近展开技巧。如果外载均匀, 则展开式系数自前几项后为零, 从而可得弹性层力学场量封闭形式的表达式。这一表达式仅依赖于中面的位移分量, 后者由一组类似于经典板理论的二维微分方程控制。因此, 获得二维方程的解便可立即给出弹性层的三维响应。作为例子, 还详细分析了均匀分布载荷作用下的夹支椭圆层。

**关键词:** 特征应变; 弹性层; 三维分析

**中图分类号:** O781      **文献标识码:** A

## 引 言

脆性材料诸如陶瓷和无机玻璃, 其拉伸强度通常远低于压缩强度。此外, 在外载作用下此类材料一般以不稳定的或灾难性的方式破坏。为了克服这一缺点, 人们已经付出了巨大的努力。一种策略是在材料中引入适当的残余的压缩抵消拉伸应力, 从而提高断裂抗力。例如, Green 等<sup>[1]</sup>最近提出了一种通过设计应力分布韧化玻璃板的方法。他们通过离子交换对硅玻璃进行化学回火引入残余应力。最大压应力设计在表面以下大于任何表面缺陷的深度, 以使得表面缺陷在这一深度因断裂阻力的升高而被俘获。这样处理过的玻璃其平均强度提高三倍以上。类似方法也在氧化锆增韧陶瓷层中被采用<sup>[2,3]</sup>, 关键是控制沿厚度方向相变氧化锆颗粒的体积分数。

现代制备技术的发展使得制造任何组分分布的材料成为可能, 因而允许引入任何所希望的特征应变(或无应力相变应变)分布。这些方法包括热回火, 离子喷溅, 化学反应, 电泳和三维印刷等。然而, 设计材料中的残余应力要求了解特征应变、相关材料以及外载条件之间的相互作用。出于这一原因, 本文致力于具有任意沿厚度方向变化的特征应变的各向同性弹性层

\* 收稿日期: 2002\_02\_04; 修订日期: 2003\_04\_22

作者简介: 何陵辉(1964—), 安徽南陵人, 男, 博士, 教授, 博士生导师(E-mail: lhhe@ustc.edu.cn);

刘人怀(1940—), 男, 成都人, 教授, 博导, 中国工程院院士, 校长兼所长(E-mail: lrh@jnu.edu.cn)。

的研究,特别关注任何外载条件下弹性层的三维力学响应。目的是为此类材料的设计提供必要的信息。

关于弹性层或板的研究很久以来都是一个重要的论题。二维板理论虽然数学上简单,但不能以足够的精度预测局部响应<sup>[4]</sup>。本文的问题显然需要三维模型。在这一方面,一些关于具备或不具备压电效应的层合复合材料的研究为本文提高了很好的背景<sup>[5~14]</sup>。研究表明 Rogers 等<sup>[6]</sup>提出的用于非均匀层合板的方法可以推广于计及特征应变。本文首先采用展开分析并结合状态空间方法对任意载荷下的弹性层进行了一般分析。其次得到了当外载均匀时弹性层力学场的显式表达式。包含在这一表达式中的待定函数是中面的位移分量,其控制方程形式上与经典板理论的方程<sup>[15]</sup>相同。因此,只要得到中面位移,弹性层 Saint\_Venant 意义下精确的三维解便产生。作为例子,我们分析了均布横向载荷下的夹支椭圆层,并给出了相应的数值结果。

## 1 基本方程

本文所考虑的物理系统是中面位于直角坐标系  $(x_1, x_2, x_3)$  中  $x_1Ox_2$  面的各向同性弹性层,其中给定了仅依赖于  $x_3$  的一般膨胀特征应变  $e^*(x_3)$ 。弹性层可以承受任何侧边条件,而在上下表面分别受到外力  $P_i^+$  和  $P_i^-$  作用。层厚  $2h$  远小于面内特征尺寸  $l$ 。

在小变形范围内,弹性层的位移  $u_i$  与应力分量  $\sigma_{ij}$  满足以下本构关系

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^*(x_3) \\ e^*(x_3) \\ e^*(x_3) \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} u_{1,2} + u_{2,1} \\ u_{2,3} + u_{3,2} \\ u_{3,1} + u_{1,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $E$  和  $\nu$  分别为弹性模量和泊松比。本文中,逗号表示对其后的坐标求和,重复指标表示从 1 至 3 求和。相应于这一约定,弹性层的平衡方程可写为

$$\sigma_{j,j} = 0 \quad (2)$$

以上方程 (1) 和 (2) 可写成以下状态空间的形式<sup>[6]</sup>:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_3} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} + \frac{1+\nu}{1-\nu} e^*(z) \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{m} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{t} = \mathbf{R}p - \frac{E}{1-\nu} e^*(x_3) \mathbf{n}. \end{cases} \quad (3)$$

这里  $p, q, t, m$  和  $n$  为  $3 \times 1$  列阵

$$p = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix}, \quad t = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}, \quad m = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad n = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

而  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  和  $\mathbf{R}$  为  $3 \times 3$  方阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

其元素在附录 A 中列出。

薄层的边界条件指定如下: 在上下表面  $x_3 = \pm h$  要求

$$\sigma_{31} = P_1^\pm, \quad \sigma_{32} = P_2^\pm, \quad \sigma_{33} = P_3^\pm. \quad (6)$$

然而, 在侧边界上边界条件一般不能逐点满足, 而只能象经典板理论一样以平均的方式满足<sup>[15]</sup>, 即要么指定中面位移分量及其导数, 要么指定合力和力偶。

## 2 一般展开分析

薄层半厚与其面内特征尺寸之比定义了一个小量  $\varepsilon = h/l \ll 1$ 。引入放大的厚度坐标  $X_3$ , 它与  $x_3$  的关系为

$$X_3 = \frac{x_3}{\varepsilon}, \quad (7)$$

则  $X_3$  的变化范围是  $[-l, l]$ 。参考这一新坐标, 方程 (3) 的第一式变为

$$\frac{\partial}{\partial X_3} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \varepsilon e^* (\varepsilon X_3) \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ m \end{bmatrix}. \quad (8)$$

方程 (8) 在相关文献中已得到深入研究<sup>[16]</sup>, 其通解可写为

$$\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \exp \left( \varepsilon X_3 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} p^0 \\ q^0 \end{bmatrix} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \varepsilon \int_0^{X_3} e^* (\varepsilon \xi) \exp \left( \varepsilon (X_3 - \xi) \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) d\xi \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ m \end{bmatrix}, \quad (9)$$

其中  $p^0$  和  $q^0$  为  $p$  和  $q$  在一些特殊的  $X_3$  点处的值; 本问题中为方便计将特殊点取在中面, 即  $p^0(x_1, x_2) = p(x_1, x_2, 0)$  和  $q^0(x_1, x_2) = q(x_1, x_2, 0)$ 。为进行渐进分析, 将方程 (9) 中的指数项展开为  $\varepsilon$  的幂级数, 并将  $p^0$  和  $q^0$  形式地表示为

$$p^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n+1} p^{(n)}, \quad q^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} q^{(n)}. \quad (10)$$

从而有

$$\begin{cases} p = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n+1} \sum_{r=0}^n \left[ \frac{X_3^{2r}}{(2r)!} (\mathbf{AB})^r p^{(n-r)} + \frac{X_3^{2r+1}}{(2r+1)!} (\mathbf{AB})^r \mathbf{A} q^{(n-r)} \right], \\ q = q^{(0)} + \varepsilon \frac{1+\nu}{1-\nu} \int_0^{X_3} e^* (\varepsilon \xi) d\xi m + \\ \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n+2} \left[ \sum_{r=0}^n \frac{X_3^{2r+1}}{(2r+1)!} (\mathbf{BA})^r \mathbf{B} p^{(n-r)} + \sum_{r=0}^n \frac{X_3^{2r}}{(2r)!} (\mathbf{BA})^r q^{(n-r+1)} \right]. \end{cases} \quad (11)$$

与式 (11) 一致, 现将外载  $P_i^\pm$  用放大的量  $\hat{p}_i^\pm$  表示为

$$P_1^\pm = \varepsilon^2 \hat{p}_1^\pm, \quad P_2^\pm = \varepsilon^2 \hat{p}_2^\pm, \quad P_3^\pm = \varepsilon^3 \hat{p}_3^\pm. \quad (12)$$

由此式及方程 (4) 和 (6), 可见薄层上、下表面的边界条件等价于

$$p_3 = \varepsilon^3 \hat{p}_3^\pm, \quad q_2 = \varepsilon^2 \hat{p}_1^\pm, \quad q_3 = \varepsilon^2 \hat{p}_2^\pm \quad (\text{当 } X_3 = \pm l). \quad (13)$$

将式 (11) 代入 (13) 并使等式两边  $\varepsilon^n$  的系数相等。独立于  $\varepsilon$  的项给出  $q_2^{(0)} = 0$  和  $q_3^{(0)} = 0$ 。因为  $A_{31} = 0$ ,  $\varepsilon$  的系数等式给出  $p_3^{(0)} = 0$ , 而与  $\varepsilon^2$  的系数相关的等式等价于

$$\begin{cases} q_2^{(1)} + \frac{l^2}{2} B_{2i} A_{ij} q_j^{(0)} = \frac{\hat{p}_1^+ + \hat{p}_1^-}{2}, & q_3^{(1)} + \frac{l^2}{2} B_{3i} A_{ij} q_j^{(0)} = \frac{\hat{p}_2^+ + \hat{p}_2^-}{2}, \\ B_{2i} p_i^{(0)} = \frac{\hat{p}_1^+ - \hat{p}_1^-}{2l}, & B_{3i} p_i^{(0)} = \frac{\hat{p}_2^+ - \hat{p}_2^-}{2l}. \end{cases} \quad (14)$$

为书写方便, 将  $p_1^{(0)}$ ,  $p_2^{(0)}$  和  $q_1^{(0)}$  依次记为  $u_1$ ,  $u_2$  和  $u_3$ . 应用附录 A 中式(A. 2), 从方程(14)可导出

$$\begin{cases} q_2^{(1)} = \frac{\hat{p}_1^+ + \hat{p}_1^-}{2} - \frac{El^2}{2(1-\nu^2)} (\cdot^{\cdot 2} u_3)_{,1}, \\ q_3^{(1)} = \frac{\hat{p}_2^+ + \hat{p}_2^-}{2} - \frac{El^2}{2(1-\nu^2)} (\cdot^{\cdot 2} u_3)_{,2}, \\ 2\Delta_1 + (1-\nu) \Omega_{,2} = -\frac{1-\nu^2}{El} (\hat{p}_1^+ - \hat{p}_1^-), \\ 2\Delta_2 - (1-\nu) \Omega_{,1} = -\frac{1-\nu^2}{El} (\hat{p}_2^+ - \hat{p}_2^-), \end{cases} \quad (15)$$

其中  $\cdot^{\cdot 2}(\cdot) = (\cdot)_{,11} + (\cdot)_{,22}$  是二维 Laplacian 算子,  $\Delta$  和  $\Omega$  定义为

$$\Delta = u_{1,1} + u_{2,2}, \quad \Omega = u_{1,2} - u_{2,1}. \quad (16)$$

要指出的是由式(16)可以得到

$$\begin{cases} \cdot^{\cdot 2} \Delta = -\frac{1-\nu^2}{2El} [(\hat{p}_1^+ - \hat{p}_1^-)_{,1} + (\hat{p}_2^+ - \hat{p}_2^-)_{,2}], \\ \cdot^{\cdot 2} \Omega = -\frac{1+\nu}{2El} [(\hat{p}_1^+ - \hat{p}_1^-)_{,2} - (\hat{p}_2^+ - \hat{p}_2^-)_{,1}]. \end{cases} \quad (17)$$

类似地,  $\varepsilon^3$  的系数满足关系式

$$\begin{cases} p_3^{(1)} + \frac{l^2}{2} A_{3i} B_{ij} p_j^{(0)} = \frac{\hat{p}_3^+ + \hat{p}_3^-}{2}, \\ A_{3i} q_i^{(1)} + \frac{l^2}{6} A_{3i} B_{ij} A_{jk} q_k^{(0)} = \frac{\hat{p}_3^+ - \hat{p}_3^-}{2l}. \end{cases} \quad (18)$$

由此可得

$$\begin{cases} p_3^{(1)} = \frac{\hat{p}_3^+ + \hat{p}_3^-}{2} + \frac{l}{4} [(\hat{p}_1^+ - \hat{p}_1^-)_{,1} + (\hat{p}_2^+ - \hat{p}_2^-)_{,2}], \\ \cdot^{\cdot 2} \cdot^{\cdot 2} u_3 = \frac{3(1-\nu^2)}{2El^3} (\hat{p}_3^+ + \hat{p}_3^-) + \\ \frac{3(1-\nu^2)}{2El^2} [(\hat{p}_1^+ - \hat{p}_1^-)_{,1} + (\hat{p}_2^+ - \hat{p}_2^-)_{,2}]. \end{cases} \quad (19)$$

重复这一步骤, 可将  $\varepsilon^n$  ( $n > 3$ ) 的系数用  $u_i$  以及其它由类似于方程(15)和(19)控制的量表示. 因此, 一旦这些方程在一定的侧边界条件下的解求出, 薄层的三维解便可直接得到.

### 3 均匀载荷的情况

如果作用于薄层上、下表面的载荷是均匀的, 求解过程可大为简化. 此时由式(15)和(19)可得

$$\begin{cases} 2\Delta_{,1+} (1-\nu)\Omega_{,2} = -\frac{1-\nu^2}{El}(\hat{p}_1^+ - \hat{p}_1^-), \\ 2\Delta_{,2+} (1-\nu)\Omega_{,1} = -\frac{1-\nu^2}{El}(\hat{p}_2^+ - \hat{p}_2^-), \\ \dots^2 \dots^2 u_3 = \frac{3(1-\nu^2)}{2El^3}(\hat{p}_3^+ - \hat{p}_3^-), \end{cases} \quad (20)$$

而方程(17)退化为  $\dots^2 \Delta = \dots^2 \Omega = 0$

令  $q_1^{(1)} = p_1^{(1)} = p_2^{(1)} = 0$ ,  $q$  的展开式中  $\varepsilon^4$  的系数为零的条件要求  $q_2^{(2)} = q_3^{(2)} = 0$ . 进一步假设  $p^{(n)} = q^{(n)} = 0 (n \geq 2)$ . 根据  $BABp^{(0)} = A(BA)^2 q^{(0)} = 0$  和  $ABp^{(1)} = ABAq^{(1)} = 0$ , 可检验式(11)完全满足式(13)中给出的条件. 因此,  $p$  和  $q$  的展开式分别在第二和第三项后终止. 从而可得薄层中位移和应力场相对于原始坐标  $x_3$  的明晰表达式

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \frac{h}{l} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - x_3 \begin{bmatrix} u_{3,1} \\ u_{3,2} \end{bmatrix} + \frac{\nu h}{2(1-\nu)l^2} x_3^2 \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} + \\ \frac{1+\nu}{E} x_3 \begin{bmatrix} P_1^+ + P_1^- \\ P_2^+ + P_2^- \end{bmatrix} + \frac{x_3}{2h} \begin{bmatrix} P_1^+ - P_1^- \\ P_2^+ - P_2^- \end{bmatrix} - \\ \frac{h^2}{1-\nu^2} x_3 \left[ 1 - \frac{2-\nu}{6} \left( \frac{x_3}{h} \right)^2 \right] \begin{bmatrix} (\dots^2 u_3)_{,1} \\ (\dots^2 u_3)_{,2} \end{bmatrix}, \\ u_3 = u_3 - \frac{\nu h}{(1-\nu)l^2} x_3 \Delta + \frac{\nu}{2(1-\nu)} x_3^2 \dots^2 u_3 + \\ \frac{1+\nu}{1-\nu} \int_0^{x_3} e^*(\eta) d\eta - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2E(1-\nu)} x_3 \left\{ P_3^+ + P_3^- + \right. \\ \left. \frac{x_3}{4h} \left[ \frac{3(1-4\nu)}{(1-2\nu)} - \frac{1-4\nu+\nu^2}{2(1-2\nu)} \left( \frac{x_3}{h} \right)^2 \right] (P_3^+ - P_3^-) \right\}, \\ \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{h}{l} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \end{bmatrix} - x_3 \begin{bmatrix} u_{3,11} \\ u_{3,22} \end{bmatrix} - \\ \begin{bmatrix} 2u_{3,12} \\ 2u_{3,12} \end{bmatrix} \end{bmatrix} - \\ \frac{h^2 x_3}{1-\nu^2} \left[ 1 - \frac{2-\nu}{6} \left( \frac{x_3}{h} \right)^2 \right] + \begin{bmatrix} (\dots^2 u_3)_{,11} \\ (\dots^2 u_3)_{,22} \\ 2(\dots^2 u_3)_{,12} \end{bmatrix} + \frac{\nu x_3^2}{2(1-\nu)l} \begin{bmatrix} \Delta_{11} \\ \Delta_{22} \\ 2\Delta_{12} \end{bmatrix} + \\ \frac{1}{2(1-\nu)} \left\{ \nu(P_3^+ + P_3^-) + \frac{\nu x_3}{2h} \left[ 3 - \left( \frac{x_3}{h} \right)^2 \right] (P_3^+ - P_3^-) - \right. \\ \left. 2Ee^*(x_3) \right\} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} P_1^+ + P_1^- \\ P_2^+ + P_2^- \end{bmatrix} + \frac{x_3}{h} \begin{bmatrix} P_1^+ - P_1^- \\ P_2^+ - P_2^- \end{bmatrix} - \\ \frac{Eh^2}{2(1-\nu^2)} \left[ 1 - \left( \frac{x_3}{h} \right)^2 \right] \begin{bmatrix} (\dots^2 u_3)_{,1} \\ (\dots^2 u_3)_{,2} \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (21)$$

由上面的表达式显然可见,  $hu_1/l$ ,  $hu_2/l$  和  $u_3$  正是中面位移的三个分量。控制这些位移分量的微分方程, 如(20)中所给出, 形式上与经典板理论的方程一样<sup>[15]</sup>。如果它们结合相应的边界条件可解, 弹性薄层的三维解便可得到。所得解满足所有场方程和上下表面的边界条件; 唯一的限制是侧边界条件是以平均方式满足的。因此, 该解是 Saint\_Venant 意义下精确的。

## 4 示 例

作为前节结果的应用, 这里分析上表面  $x_3 = h$  受均布横向载  $P$  的刚性夹支椭圆薄层。薄层的边界由方程  $x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 = 1$  刻划, 其中  $a$  和  $b$  为半轴长度。于是侧边处的边界条件为

$$u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0, \frac{\partial u_3}{\partial n} = 0 \quad \left[ \text{当 } \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \right], \quad (22)$$

这里  $\partial u_3 / \partial n$  表示中面边界上的法向导数。

在条件(22)下, 微分方程(20)的解可写成

$$u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = m \left[ \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1 \right]^2, \quad (23)$$

其中  $m$  为常数, 定义为

$$m = \frac{3(1-\nu^2)a^4b^4P}{16Eh^3(3a^4 + 2a^2b^2 + 3b^4)}. \quad (24)$$

将式(23)代入(21)即的位移和应力场, 结果列于附录 B 中。为了显示薄层中的场分布, 考虑以下特殊形式的特征应变

$$e^*(x_3) = e^0 \left\{ 1 - \left[ 1 - \left( \frac{13x_3}{9h} \right)^2 \right]^2 \right\}, \quad (25)$$

其中常数  $e^0$  为应变的最大值。这种特征应变的剖面线, 如图 1 所示, 类似于 Green 等<sup>[1]</sup> 用离子交换处理的玻璃板中的情形。几何参数和材料常数假设为  $a = 2b$ ,  $b = 20h$ ,  $\nu = 0.25$  以及  $e^0 = 10^{-3}$ , 无量纲载荷  $p^* = a^2P/h^2E$  取为 1, 即  $P = h^2E/a^2$ 。

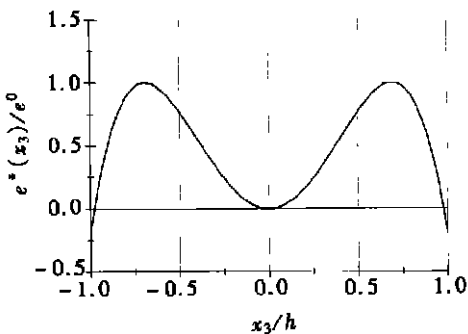


图 1 椭圆弹性薄层中的特征应变的分量

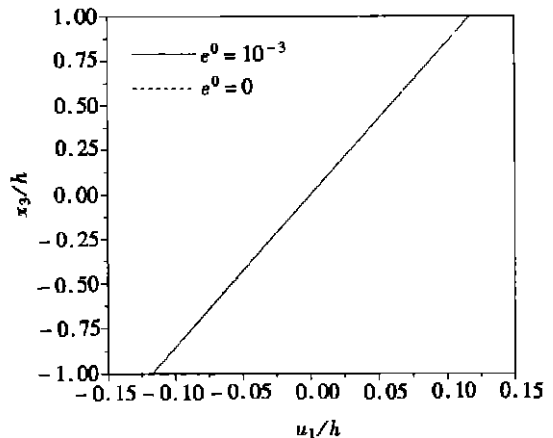


图 2  $x_1 = a/2$  和  $x_2 = b/2$  处位移分量  $u_1$  沿薄层厚度的变化

图 2~ 图 10 给出了  $x_1 = a/2$  和  $x_2 = b/2$  处椭圆薄层中位移和应力分量沿厚度的变化。为了比较, 也画出了相同薄层不含特征应变(即  $e^0 = 0$ ) 时的结果。从图 2~ 图 3 和图 7~ 图

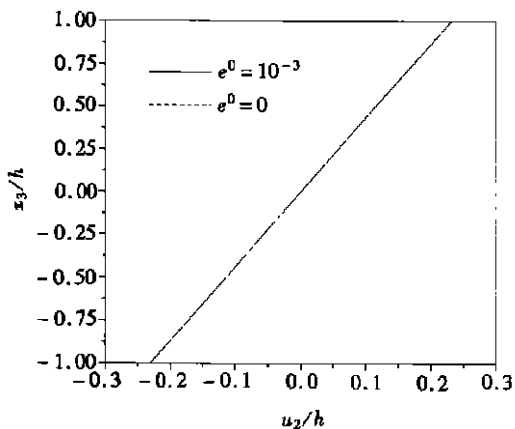


图3  $x_1 = a/2$  和  $x_2 = b/2$  处位移分量  $u_2$  沿薄层厚度的变化

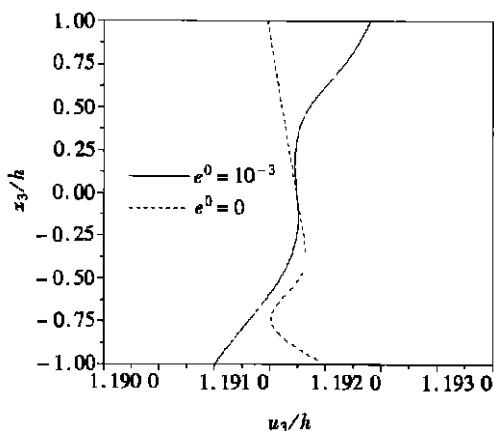


图4  $x_1 = a/2$  和  $x_2 = b/2$  处位移分量  $u_3$  沿薄层厚度的变化

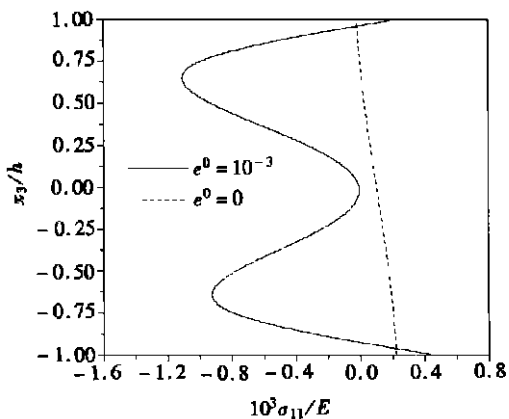


图5  $x_1 = a/2$  和  $x_2 = b/2$  处应力分量  $\sigma_{11}$  沿薄层厚度的变化

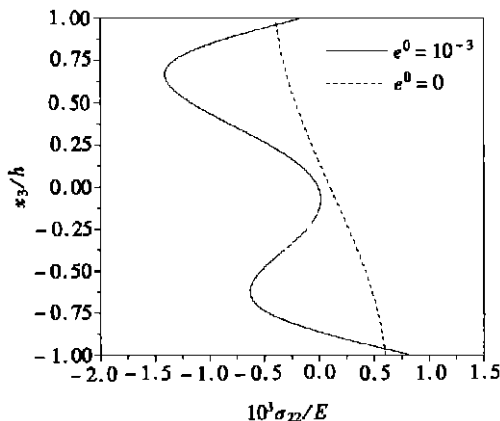


图6  $x_1 = a/2$  和  $x_2 = b/2$  处应力分量  $\sigma_{22}$  沿薄层厚度的变化

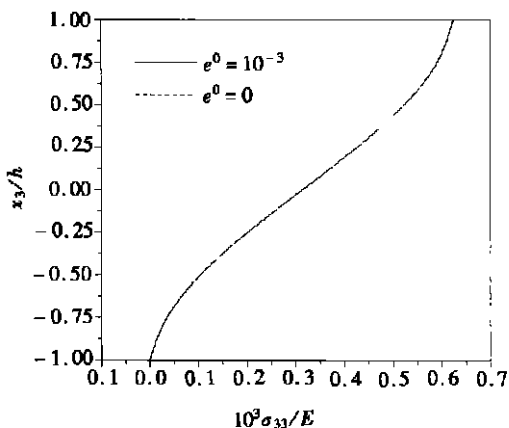


图7  $x_1 = a/2$  和  $x_2 = b/2$  处应力分量  $\sigma_{33}$  沿薄层厚度的变化

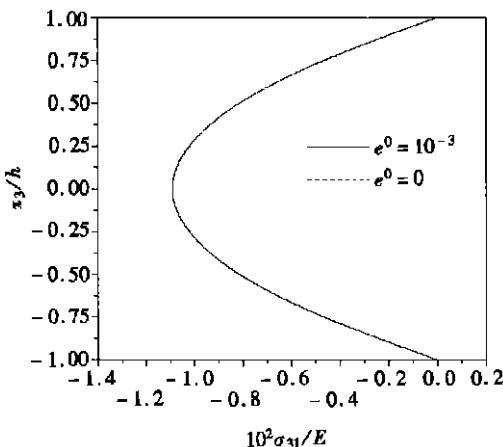


图8  $x_1 = a/2$  和  $x_2 = b/2$  处应力分量  $\sigma_{31}$  沿薄层厚度的变化

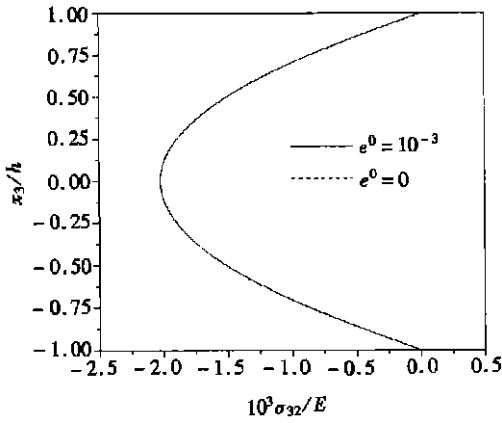


图 9  $x_1 = a/2$  和  $x_2 = b/2$  处应力分量  $\sigma_{32}$  沿薄层厚度的变化

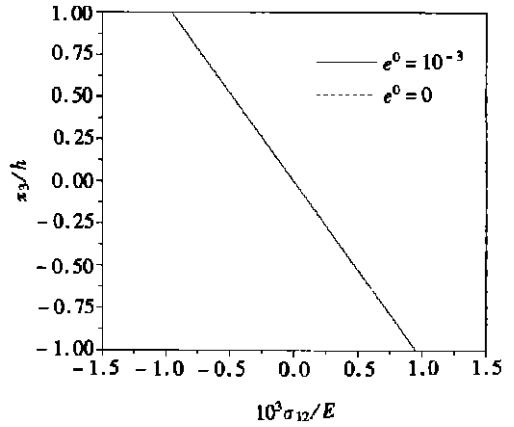


图 10  $x_1 = a/2$  和  $x_2 = b/2$  处应力分量  $\sigma_{12}$  沿薄层厚度的变化

10 可见, 在这一特例中面内位移分量  $u_1$  和  $u_2$ , 法向应力分量  $\sigma_{33}$ , 以及横向和面内剪应力分量  $\sigma_{31}$ ,  $\sigma_{32}$  和  $\sigma_{12}$  的分布不受特征应变的影响。的确, 附录 B 中给出的这些量的表达式不包含特征应变的任何影响。横向位移  $u_3$  随厚度的变化对于  $e^0 = 0$  和  $e^0 = 10^{-13}$  的情况是不同的, 如图 4 所示。但这种差异在数量上是微弱的。相比之下, 图 5~ 图 6 显示了特征应变沿厚度的分布对面内正应力分量  $\sigma_{11}$  和  $\sigma_{22}$  的强烈影响。这两个应力分量对于脆性材料的破坏是非常关键的。因此, 合理设计特征应变的分布对于材料强韧化具有很重要的意义<sup>[1,3]</sup>。

## 五 结 语

提出了含任意膨胀特征应变弹性薄层三维分析的一般方法。当薄层在上下表面承受均匀载荷时, 给出了其内部位移和应力场的明晰表达式。这些表达式中所包含的仅有的未知函数是中面的三个位移分量, 它们由与经典板理论形式相同的三个二维微分方程控制。求解二维方程, 便可得到薄层 Saint\_Venant 意义下的三维精确解。作为示例, 给出了刚性夹支椭圆薄层的数值结果, 并强调了特征应变对面内正应力分量分布的强烈影响。本文结果可用于韧化脆性材料的微结构设计。

### 附录 A

矩阵  $A$  的元素为

$$\begin{cases} A_{11} = -(\quad)_{,1}, & A_{12} = \frac{2(1+\nu)}{E}, & A_{13} = 0, \\ A_{21} = -(\quad)_{,2}, & A_{22} = 0, & A_{23} = \frac{2(1+\nu)}{E}, \\ A_{31} = 0, & A_{32} = -(\quad)_{,1}, & A_{33} = -(\quad)_{,2}; \end{cases} \quad (A.1)$$

矩阵  $B$  的元素为

$$\begin{cases} B_{11} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\quad)_{,1}, & B_{12} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\quad)_{,2}, & B_{13} = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}, \\ B_{21} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)}[2(\quad)_{,11} + (1-\nu)(\quad)_{,22}], & B_{22} = -\frac{E}{2(1-\nu)}(\quad)_{,12}, \end{cases} \quad (A.2)_1$$



$$\begin{cases} B_{23} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\quad),_1, \\ B_{31} = -\frac{E}{2(1-\nu)}(\quad),_{12}, \\ B_{32} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)}[(1-\nu)(\quad),_{11} + 2(\quad),_{22}], \quad B_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\quad),_2, \end{cases} \quad (\text{A. 2})_2$$

而矩阵  $R$  的元素为

$$\begin{cases} R_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(\quad),_1, \quad R_{12} = -\frac{E\nu}{1-\nu^2}(\quad),_2, \quad R_{13} = \frac{\nu}{1-\nu} \\ R_{21} = \frac{E\nu}{1-\nu^2}(\quad),_1, \quad R_{22} = -\frac{E}{1-\nu^2}(\quad),_2, \quad R_{23} = \frac{\nu}{1-\nu} \\ R_{31} = \frac{E}{2(1-\nu)}(\quad),_2, \quad R_{32} = -\frac{E}{2(1+\nu)}(\quad),_1, \quad R_{33} = 0 \end{cases} \quad (\text{A. 3})$$

附录 B

椭圆薄层的位移分量为

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{4mx_1x_3}{a^2} \left\{ \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1 + \frac{2h^2}{1-\nu} \left[ \frac{3}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right] \left[ 1 - \frac{2-\nu}{6} \left( \frac{x_3}{h} \right)^2 \right] \right\}, \\ u_2 = -\frac{4mx_2x_3}{a^2} \left\{ \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1 + \frac{2h^2}{1-\nu} \left[ \frac{1}{a^2} + \frac{3}{b^2} \right] \left[ 1 - \frac{2-\nu}{6} \left( \frac{x_3}{h} \right)^2 \right] \right\}, \\ u_3 = \frac{1+\nu}{1-\nu} \int_0^{x_3} e^*(\eta) d\eta - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)Px_3}{2E(1-\nu)} \left[ 1 + \frac{3(1-4\nu)}{4(1-2\nu)} \left( \frac{x_3}{h} \right) - \right. \\ \left. \frac{1-4\nu+\nu^2}{8(1-2\nu)} \left( \frac{x_3}{h} \right)^3 \right] + m \left\{ \left[ \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1 \right]^2 + \frac{2\nu^2}{1-\nu} \left[ \left( \frac{3}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \frac{x_1^2}{a^2} + \right. \right. \\ \left. \left. \left( \frac{1}{a^2} + \frac{3}{b^2} \right) \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right] \right\}, \end{cases} \quad (\text{B. 1})$$

而应力分量为

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{1}{4(1-\nu)} \left\{ \nu P \left[ 2 + 3 \left( \frac{x_3}{h} \right) - \left( \frac{x_3}{h} \right)^3 \right] - 4Ee^*(x_3) \right\} - \\ \frac{4Emx_3}{1-\nu^2} \left\{ \left[ \frac{3}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right] \frac{x_1^2}{a^2} + \left[ \frac{1}{a^2} + \frac{3\nu}{b^2} \right] \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{1}{a^2} - \frac{\nu}{b^2} + \right. \\ \left. \frac{2h^2}{1-\nu^2} \left[ \frac{3}{a^4} + \frac{3\nu}{b^4} + \frac{1+\nu}{a^2b^2} \right] \left[ 1 - \frac{2-\nu}{6} \left( \frac{x_3}{h} \right)^2 \right] \right\}, \\ \sigma_{22} = \frac{1}{4(1-\nu)} \left\{ \nu P \left[ 2 + 3 \left( \frac{x_3}{h} \right) - \left( \frac{x_3}{h} \right)^3 \right] - 4Ee^*(x_3) \right\} - \\ \frac{4Emx_3}{1-\nu^2} \left\{ \left[ \frac{3\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right] \frac{x_1^2}{a^2} + \left[ \frac{\nu}{a^2} + \frac{3}{b^2} \right] \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{\nu}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \right. \\ \left. \frac{2h^2}{1-\nu^2} \left[ \frac{3\nu}{a^4} + \frac{3}{b^4} + \frac{1+\nu}{a^2b^2} \right] \left[ 1 - \frac{2-\nu}{6} \left( \frac{x_3}{h} \right)^2 \right] \right\}, \\ \sigma_{33} = \frac{P}{4} \left[ 2 + 3 \left( \frac{x_3}{h} \right) - \left( \frac{x_3}{h} \right)^3 \right], \quad \sigma_{12} = -\frac{8Emx_1x_2x_3}{(1+\nu)a^2b^2}, \\ \sigma_{31} = -\frac{4Emh^2x_1}{(1-\nu^2)a^2} \left[ \frac{3}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right] \left[ 1 - \left( \frac{x_3}{h} \right)^2 \right], \\ \sigma_{32} = -\frac{4Emh^2x_2}{(1-\nu^2)a^2} \left[ \frac{1}{a^2} + \frac{3}{b^2} \right] \left[ 1 - \left( \frac{x_3}{h} \right)^2 \right]. \end{cases} \quad (\text{B. 2})$$

## [参 考 文 献]

- [1] Green D J, Tandon R, Sglavo V M. Crack arrest and multiple cracking in glass through the use of designed residual stress profiles[J]. *Science*, 1999, **283**(5406): 1295—1297.
- [2] Chan H M. Layered ceramics: processing and mechanical behavior[J]. *Ann Rev Mat Sci*, 1997, **27**: 249—282.
- [3] Yoo J, Cho K, Bae W S, et al. Transformation toughened ceramic multilayers with compositional gradients[J]. *J Am Ceram Soc*, 1998, **81**(1): 21—32.
- [4] Noor A K, Burton W S. Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates [J]. *Appl Mech Rev*, 1989, **42**(1): 1—13.
- [5] Kaprielian P V, Rogers T G, Spencer A J M. Exact theory for the stretching and the bending of laminated plates by edge loading. I : Isotropic plates[J]. *Phil Trans Roy Soc London*, 1988, **A234**(2): 565—594.
- [6] Rogers T G, Waston P, Spencer A J M. An exact three dimensional solution for normal loading of inhomogeneous and laminated anisotropic elastic plates of moderate thickness [J]. *Proc Roy Soc London*, 1992, **A437**(1): 199—213.
- [7] Freund L B. The stress distribution and curvature of a general compositionally graded semiconductor layer[J]. *J Cryst Growth*, 1993, **132**(1/2): 341—344.
- [8] Freund L B. Some elementary connections between curvature and mismatch strain in compositionally graded thin films[J]. *J Mech Phys Solids*, 1996, **44**(5): 723—736.
- [9] Lee J S, Jiang L Z. Exact electroelastic analysis of piezoelectric laminae via state space approach [J]. *Int J Solids Struct*, 1996, **33**(7): 977—990.
- [10] Cheng Z Q, Lim C W, Kitipornchai S. Three dimensional exact solution for inhomogeneous and laminated piezoelectric plates[J]. *Int J Engng Sci*, 1999, **37**(11), 1425—1439.
- [11] HE Ling\_hui. Axisymmetric response of circular plates with piezoelectric layers: an exact solution [J]. *Int J Mech Eng*, 1998, **40**(12): 1265—1279.
- [12] HE Ling\_hui. Three dimensional analysis of some symmetric hybrid piezoelectric laminates [J]. *Z Angew Math Mech*, 2000, **80**(5): 307—318.
- [13] HE Ling\_hui, Lim C W, Soh A K. Three dimensional analysis of an antiparallel piezoelectric bimorph [J]. *Acta Mech*, 2000, **145**(1\_4): 189—204.
- [14] Lim C W, HE Ling\_hui, Soh A K. Three dimensional electromechanical responses of a parallel piezoelectric bimorph[J]. *Int J Solids Struct*, 2001, **38**(16): 2833—2849.
- [15] Timoshenko S P, Woinowsky\_Krieger S. *Theory of Plates and Shells* [M]. New York: McGraw\_Hill, 1959.
- [16] Gantmacher F R. *The Theory of Matrix* [M]. New York: Chelsea, 1960.

## Analysis of Elastic Layers with Dilative Eigenstrains Varying Through the Thickness

HE Ling\_hui<sup>1</sup>, LIM Chee\_wah<sup>2</sup>, LIU Ren\_huai<sup>3</sup>

(1. Department of Modern Mechanics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, P. R. China;

2. Department of Building and Construction, City University of Hong Kong; Hong Kong, P. R. China;

3. Institute of Applied Mechanics, Jinan University, Guangzhou 510632, P. R. China)

**Abstract:** Elastic layers with varying dilative eigenstrains through the thickness were concerned. A general procedure was proposed for the analysis of such layers under arbitrary loads. The study is based on the state\_space method and an asymptotic expansion technique. When the external loads are uniform, the expansion terminates after some leading terms, and an explicit representation for the mechanical field in a layer is obtained. This representation relies only on the displacement components of the mid\_plane, which are governed by a set of two\_dimensional differential equations similar to those in the classical plate theory. Consequently, obtaining the solution to the two\_dimensional equations immediately gives the three\_dimensional responses of the layer. As an illustrative example, a clamped elliptical layer under a uniformly distributed transverse load is analyzed in detail.

**Key words:** eigenstrain; elastic layer; three\_dimensional analysis