

文章编号: 1000-0887(2003) 09-0963-10

# 谐和与有界噪声联合参激作用下的 Visco\_Elastic 系统\*

徐 伟<sup>1</sup>, 戎海武<sup>2</sup>, 方 同<sup>3</sup>

- (1. 西北工业大学 应用数学系, 西安 710072;
2. 佛山科技学院 数学系, 广东佛山 528000;
3. 西北工业大学 振动工程研究所, 西安 710072)

(陈予恕推荐)

**摘要:** 研究了带 visco\_elastic 项的非线性系统, 在谐和与有界噪声联合参激作用下的响应和稳定性问题. 用多尺度法分离了系统的快变项, 并求出了系统的最大 Liapunov 指数和稳态概率密度函数, 根据最大 Liapunov 指数可得系统解稳定的充分必要条件. 讨论了系统的 visco\_elastic 项对系统阻尼项和刚度项的贡献, 给出了随机项和确定性参激强度等参数对系统响应影响的讨论. 数值模拟表明该方法是有有效的.

**关键词:** 参数主共振; visco\_elastic 项; 多尺度法; 最大 Liapunov 指数; 分岔  
**中图分类号:** O324      **文献标识码:** A

## 引 言

研究含有参数激励的非线性随机动力系统, 对于解决工程实际问题具有重要意义. 当系统受到谐和及随机噪声联合作用时, Stratonovitch 和 Romanovskii<sup>[1]</sup>, Dimentberg 等<sup>[2]</sup> 和 Namachchivaya<sup>[3]</sup> 用随机平均法研究了系统的几乎必然稳定性, Ariaratnam 和 Tam<sup>[4]</sup> 研究了系统响应的矩稳定性, Dimentberg<sup>[5]</sup> 则给出了系统的响应分析. 当系统受到谐和及窄带噪声联合作用时, 本文作者<sup>[6]</sup> 对 Duffing 系统进行了研究.

当系统受到 additive 和 multiplicative 噪声联合作用时, Ariaratnam<sup>[7]</sup> 用传统的随机平均法研究了带 visco\_elastic 项的线性系统的随机稳定性, Cai, Lin 和 Xu<sup>[8]</sup> 用改进的随机平均法, 进一步研究了这一系统的随机稳定性. 本文对带 visco\_elastic 项的非线性模型, 研究在谐和与有界噪声联合作用下的参数主共振响应和稳定性问题.

## 1 基本公式的推导

考虑同时受谐和与有界噪声参激的带 visco\_elastic 项的非线性系统

$$+ \varepsilon \int_0^t f(t-\tau) u(\tau) d\tau + \omega^2(u + \varepsilon \eta_1 u^3) + \varepsilon \eta_2 u^2 u +$$

\* 收稿日期: 2001\_12\_12; 修订日期: 2003\_04\_23

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10072049)

作者简介: 徐伟(1957-), 男, 浙江上虞人, 教授, 博士, 博导(E-mail: weixu@nwpu.edu.cn).

$$\varepsilon(h \cos \Omega_0 t + \xi(t)) u = 0, \quad (1)$$

式中  $u$  上方的圆点表示对时间  $t$  的导数,  $\varepsilon \ll 1$  为小参数,  $\eta_1, \eta_2 > 0$ ,  $\int_0^t f(t-\tau) u(\tau) d\tau$ ,  $\omega$  分别为系统的 visco\_elastic 项和自然频率, 一般 visco\_elastic 项的被积函数  $f(t)$  常可模型化为:

$$f(t) = \sum_i \beta_i \exp(-\alpha_i t) \cdot$$

$\alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0$  代表 visco\_elastic 系数,  $h, \Omega_0 > 0$  是常数, 分别表示确定性谐和激励的振幅和频率,  $\xi(t)$  是有界噪声项, 本文采用 Wedig<sup>[9]</sup> 提出的统一的模型

$$\xi(t) = k \cos(\Omega_1 t + \gamma W(t)), \quad (2)$$

式中  $k > 0$  为随机激励的强度,  $\Omega_1$  为随机激励的中心频率,  $W(t)$  为标准 Wiener 过程,  $\gamma \geq 0$  为  $W$  的强度系数。

带 visco\_elastic 项的非线性系统是一个很重要的物理模型, 很多实际问题都可以用这个模型进行描述, Ariaratnam<sup>[7]</sup>, Cai, Lin 和本文作者<sup>[8]</sup> 对带 visco\_elastic 项线性系统, 在白噪声参激和外激联合作用下, 用随机平均法做过讨论。一般说来, 与系统的松弛时间相比, 用随机平均法需假设  $\xi(t)$  具有快速衰减的自相关函数, 而本文的模型中, 当  $\gamma$  较小时并不具有这个性质, 故不能应用随机平均法进行研究, 本文用多尺度法进行研究。多尺度法已广泛应用于确定系统的研究中, 近些年来在随机系统中也有一些应用。在随机外激的情形, Rajan 和 Davies<sup>[10]</sup>, Nayfeh 和 Serha<sup>[11]</sup> 用多尺度法研究了非线性系统的响应; 本文作者<sup>[6]</sup> 则将多尺度法推广到非线性系统的随机参激情形。设系统(1)具有如下形式的解

$$u(t, \varepsilon) = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) + \dots, \quad (3)$$

式中  $T_0 = t, T_1 = \varepsilon$  分别是快、慢时间尺度。

本文仅对(1)的首次近似解  $u_0(T_0, T_1)$  进行讨论。记  $D_0 = \partial/\partial T_0, D_1 = \partial/\partial T_1$ , 按照  $T_0, T_1$  对时间的微分转化为

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots, \quad \frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots \quad (4)$$

由(1)、(3)、(4)可得下列微分方程组:

$$D_0^2 u_0 + \omega^2 u_0 = 0, \quad (5)$$

$$D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 = -\eta_1 \omega^2 u_0^3 - \eta_2 (D_0 u_0)^2 u_0 - 2D_0 D_1 u_0 -$$

$$\sum_i \beta_i \frac{\alpha_i}{\alpha_i^2 + \omega^2} u_0 - \sum_i \beta_i \frac{1}{\alpha_i^2 + \omega^2} D_0 u_0 - (h \cos \Omega_0 t + \xi(t)) u_0 \quad (6)$$

(6)的解为

$$u_0(T_0, T_1) = A(T_1) \exp(i\omega T_0) + c. c., \quad (7)$$

式中  $c. c.$  表示前述各项的共轭,  $A(T_1)$  是随时间缓变的系统响应的振幅。进而可得

$$D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 = -2i \omega A' \exp(i\omega T_0) - \sum_i \beta_i \frac{\alpha_i}{\alpha_i^2 + \omega^2} A \exp(i\omega T_0) -$$

$$i\omega^2 \sum_i \beta_i \frac{1}{\alpha_i^2 + \omega^2} A \exp(i\omega T_0) - (\eta_1 - \eta_2) \omega^2 A^3 \exp(3i\omega T_0) -$$

$$(3\eta_1 + \eta_2) \omega^2 A^2 A \exp(i\omega T_0) -$$

$$\frac{A}{2} h \exp[i(\Omega_0 + \omega)T_0] - \frac{A}{2} h \exp[i(\Omega_0 - \omega)T_0] -$$

$$\frac{A}{2} k \exp[i(\Omega_1 + \omega)T_0 + \gamma W(T_1)] -$$

$$\frac{A}{2}k \exp[i(\Omega_1 - \omega)T_0 + \gamma W(T_1)] + c. c., \tag{8}$$

式中  $A'$ ,  $A$  分别表示  $A$  关于  $T_1$  的导数及共轭。(8) 式右端的第 1、2、3、4 和 5 项可使方程(6) 的特解产生长期项, 而依赖共振条件  $\Omega_0 \approx 2\omega$  或  $\Omega_1 \approx 2\omega$ , (8) 式右端的第 7、9 项可使特解产生小除数项。由(8) 式可知 visco\_elastic 项对系统的贡献可分为两部分: 一部分为阻尼项:

$$\sum_i \frac{\beta_i \alpha_i \omega}{\alpha_i^2 + \omega^2},$$

一部分为刚度项:

$$\sum_i \frac{\beta_i \omega^2}{\alpha_i^2 + \omega^2}.$$

## 2 参数主共振情形 I

考虑  $\Omega_1 \approx 2\omega$ , 但  $\Omega_0$  远离  $\Omega_1$  的情形。引入参数  $\varepsilon$ ,  $\Omega_1 = 2\omega + \varepsilon\sigma$ , 则有

$$(\Omega_1 - \omega)T_0 = \varepsilon T_0 + \varepsilon T_1.$$

令(8) 式右端中的奇异项为零可得

$$2i\omega A' + i \sum_i \frac{\beta_i \alpha_i}{\alpha_i^2 + \omega^2} \omega A + 3\alpha\omega^2 A^2 A + \frac{k}{2}A \exp(i\varepsilon T_1 + i\gamma W(T_1)) = 0, \tag{9}$$

其中  $\alpha = \eta_1 + \eta_2/3$ 。将  $A$  表示为极坐标

$$A(T_1) = a(T_1) \exp[i\varphi(T_1)]. \tag{10}$$

可将(9) 式化为

$$\begin{cases} a' = -\frac{a}{2} \sum_i \frac{\beta_i \alpha_i}{\alpha_i^2 + \omega^2} - \frac{a}{4\omega} k \sin \eta, \\ a\eta' = \alpha a - \frac{1}{2} \sum_i \frac{\beta_i \omega}{\alpha_i^2 + \omega^2} a - 3\alpha\omega a^3 - \frac{a}{2\omega} k \cos \eta - \alpha\gamma W', \end{cases} \tag{11}$$

式中  $\eta = \varepsilon T_1 - 2\varphi + \gamma W(T_1)$ 。

由上式解出  $a$  和  $\eta$  后, 可得方程(1) 的首次近似解为

$$u = 2a(\varepsilon) \cos\left[\frac{\Omega_1}{2}t - \frac{\eta(\varepsilon)}{2}\right] + O(\varepsilon). \tag{12}$$

### 2.1 零解及其稳定性

显然零解  $a = 0$  是方程(11) 的稳态解, 下面讨论它的稳定性。方程(11) 的线性化方程为

$$\begin{cases} a' = -\frac{1}{2} \sum_i \frac{\beta_i \alpha_i}{\alpha_i^2 + \omega^2} a - \frac{a}{4\omega} k \sin \eta, \\ \eta' a = \alpha a - \frac{1}{2} \sum_i \frac{\beta_i \omega}{\alpha_i^2 + \omega^2} a - \frac{ka}{2\omega} \cos \eta - \gamma\alpha W'. \end{cases} \tag{13}$$

令  $v = \ln a$ , 方程(13) 可改写为如下 Itô 方程的形式

$$\begin{cases} dv = \left[ -\frac{1}{2} \sum_i \frac{\beta_i \alpha_i}{\alpha_i^2 + \omega^2} - \frac{k}{4\omega} \sin \eta \right] dT_1, \\ d\eta = \left[ \sigma - \frac{1}{2} \sum_i \frac{\beta_i \omega}{\alpha_i^2 + \omega^2} - \frac{k}{2\omega} \cos \eta \right] dT_1 - \gamma dW. \end{cases} \tag{14}$$

$\eta(T_1)$  的稳态概率密度函数  $p(\eta)$  对应的 FPK 方程为

$$\frac{d^2 p}{d\eta^2} - \frac{d}{d\eta} [(\sigma - k \cos \eta)p] = 0, \tag{15}$$

式中  $\sigma = \left( 2\sigma - \sum_i \frac{\beta_i \omega}{\alpha_i^2 + \omega^2} \right) / \gamma^2, k = k / \omega \gamma^2$ .

由方程(15)可得

$$p(\eta) = \frac{\exp\left\{ \left( \sigma(\eta + 3/2\pi) - k \sin \eta \right) / 4\pi^2 I_0(k) L_0(k) \right\}}{4\pi^2 I_0(k) L_0(k)} \int_{\eta}^{\eta+2\pi} \exp\left\{ -\sigma(x + \pi/2) + k \sin x \right\} dx, \quad (16)$$

式中  $I_n(x)$  是第一类贝塞尔函数,  $n$  是实数或复数. 由(16)进而可得最大 Liapunov 指数:

$$\lambda = -\frac{1}{2} \sum_i \frac{\beta_i \alpha_i}{\alpha_i^2 + \omega^2} - \frac{k}{4\omega} \int_0^{2\pi} \sin \eta p(\eta) d\eta.$$

计算表明当  $\gamma \rightarrow 0$  时,  $\lambda$  达到其最大值:

$$\lambda = -\frac{1}{2} \sum_i \frac{\beta_i \alpha_i}{\alpha_i^2 + \omega^2} + \frac{k}{4\omega \sqrt{\left( \sum_i \frac{\beta_i \alpha_i}{\alpha_i^2 + \omega^2} \right)^2 + \left( \sigma - \frac{1}{2} \sum_i \frac{\beta_i \omega}{\alpha_i^2 + \omega^2} \right)^2}} \sum_i \frac{\beta_i \alpha_i}{\alpha_i^2 + \omega^2}. \quad (17)$$

故零解稳定的充分必要条件为  $\lambda < 0$ , 即

$$k < 2\omega \sqrt{\left( \sum_i \frac{\beta_i \alpha_i}{\alpha_i^2 + \omega^2} \right)^2 + \left( \sigma - \frac{1}{2} \sum_i \frac{\beta_i \omega}{\alpha_i^2 + \omega^2} \right)^2}. \quad (18)$$

此条件与当  $\gamma = 0$  即系统受到确定性谐和激励时零解的稳定性条件是一致的.

## 2.2 非零稳态响应

对于非零的稳态解  $a \neq 0$ , 由(11)可得相应的 Ito 方程为

$$\begin{cases} da = - \left[ \frac{1}{2} \left( \sum_i \frac{\beta_i \alpha_i}{\alpha_i^2 + \omega^2} \right) a + \frac{a}{4\omega} k \sin \eta \right] dT_1, \\ d\eta = \left[ \sigma - \frac{1}{2} \sum_i \frac{\beta_i \omega}{\alpha_i^2 + \omega^2} - 3\alpha\omega a^2 - \frac{k}{2\omega} \cos \eta \right] dT_1 - \gamma dW. \end{cases} \quad (19)$$

对  $\gamma$  较小时, 用摄动法进行求解. 当  $\gamma = 0$  时, 可得系统(19)的稳态解为

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \left[ \frac{1}{3\alpha} \left( \sigma - \frac{1}{2} \sum_i \frac{\beta_i \omega}{\alpha_i^2 + \omega^2} \right) \pm \frac{1}{3\alpha} \sqrt{k^2 - 4\omega^2 \left( \sigma - \frac{1}{2} \sum_i \frac{\beta_i \omega}{\alpha_i^2 + \omega^2} \right)^2} \right]^{1/2}, \\ \sin \eta_0 = -\frac{2\omega}{k} \left( \sum_i \frac{\beta_i \omega}{\alpha_i^2 + \omega^2} \right). \end{cases} \quad (20)$$

当  $\gamma$  为小参数时, 令

$$a = a_0 + a_1, \quad \eta = \eta_0 + \eta_1, \quad (21)$$

式中  $a_0, \eta_0$  由(20)式定义,  $a_1, \eta_1$  为小扰动项, 将上式代入(19)式并忽略非线性项可得线性化方程

$$\begin{cases} a_1' = -\frac{a_0}{4\omega} k \cos \eta_0 \eta_1, \\ \eta_1' = -6\alpha\omega a_0 a_1 - \sum_i \frac{\beta_i \alpha_i}{\alpha_i^2 + \omega^2} \eta_1 - \gamma W'. \end{cases} \quad (22)$$

由上式可得如下关于  $a_1$  的方程

$$a_1 + \sum_i \frac{\beta_i \alpha_i}{\alpha_i^2 + \omega^2} a_1' - \frac{3}{2} k \alpha a_0^2 \cos \eta_0 a_1 = \frac{a_0}{4 \omega} k \gamma \cos \eta_0 \zeta(T_1), \quad (23)$$

式中  $\zeta(T_1) = W'(T_1)$  是一标准高斯白噪声过程。

由(23)式可知  $(a_1, a_1')$  是高斯过程, 利用广义平稳势法可得  $(a_1, a_1')$  的稳态概率密度函数为

$$p(a_1, a_1') = C \exp \left\{ - \frac{16 \omega^2}{(k \gamma a_0^2 \cos \eta_0)^2} \sum_i \frac{\beta_i \alpha_i}{\alpha_i^2 + \omega^2} \left[ (a_1')^2 - \frac{3}{2} k \alpha a_0^2 \cos \eta_0 a_1^2 \right] \right\}, \quad (24)$$

式中  $C$  为归一化常数。由(24)式可知  $C$  能被归一化即(11)式的非零解稳定的充分必要条件是  $\cos \eta_0 < 0$ , 此条件与当  $\gamma = 0$  即系统受确定性谐和激励时的非零解稳定条件是一致的。

当系统有两个非零解时, 大解是稳定的而小解不稳定。由(24)式可知  $a_1$  和  $a_1'$  是相互独立的, 且  $a_1$  的稳态概率密度为

$$p(a_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{a_1}} \exp \left\{ - \frac{a_1^2}{2 \sigma_{a_1}^2} \right\}, \quad (25)$$

式中  $\sigma_{a_1}^2$  为  $a_1$  的二阶矩

$$\sigma_{a_1}^2 = E[a_1^2] = \frac{\gamma^2 \sqrt{k^2 - 4 \omega^2} \left( \sum_i \frac{\beta_i \alpha_i}{\alpha_i^2 + \omega^2} \right)^2}{48 \alpha \omega^2} \frac{1}{\sum_i \frac{\beta_i \alpha_i}{\alpha_i^2 + \omega^2}}. \quad (26)$$

由(25)可得  $E[a_1] = 0$ , 故有

$$\begin{cases} E[a] = E[a_0 + a_1] = a_0, \\ E[a^2] = a_0^2 + \frac{\gamma^2 \sqrt{k^2 - 4 \omega^2} \left( \sum_i \frac{\beta_i \alpha_i}{\alpha_i^2 + \omega^2} \right)^2}{48 \alpha \omega^2} \frac{1}{\sum_i \frac{\beta_i \alpha_i}{\alpha_i^2 + \omega^2}}. \end{cases} \quad (27)$$

### 2.3 数值模拟

有关随机过程数值模拟的方法可见参考文献[12, 13]

$$N = 1000, \quad \varepsilon = 0.1, \quad \omega = 1.0, \quad \eta_1 = 0.07,$$

$$\eta_2 = 0.09, \quad h = 1.0, \quad \gamma = 0.1, \quad \Omega_0 = 10$$

$$\alpha_1 = 1.0, \quad \beta_1 = 0.5, \quad \alpha_2 = 2.0, \quad \beta_2 = 2.5/2$$

对方程(1)用四阶龙格库塔方法进行数值计算。当  $k = 10.0$  时,  $E[a]$ ,  $E[a^2]$  关于

$$\sigma_1 = \sigma - \frac{1}{2} \sum_i \frac{\beta_i \omega}{\alpha_i^2 + \omega^2}$$

的变化曲线见图 1。

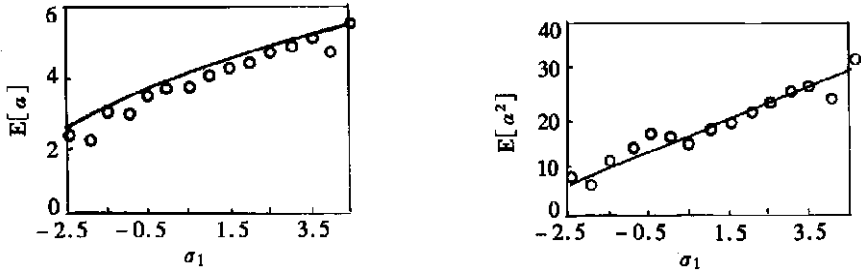
当  $\sigma_1 = 1.0$  时,  $E[a]$ ,  $E[a^2]$  关于  $k$  的变化曲线见图 2。

### 3 参数主共振情形 II

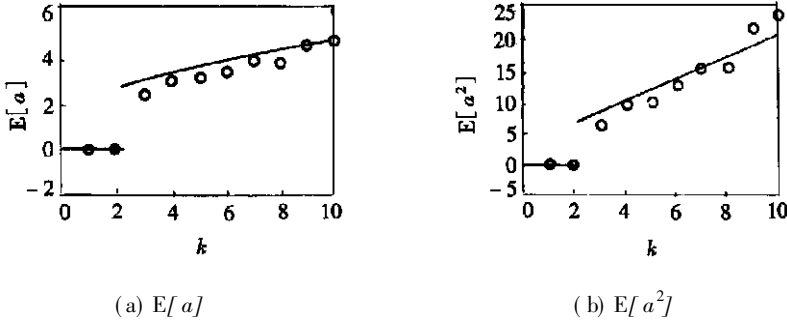
再考虑  $\Omega_0 = \Omega_1 \approx 2\omega$  的情形, 引入调谐参数  $\sigma$ ,  $\Omega_0 = \Omega_1 = 2\omega + \varepsilon\sigma$ , 则有:

$$(\Omega_1 - \omega)T_0 = (\Omega_1 - \omega)T_1 = \omega T_0 + \sigma T_1.$$

令(8)式右端中的奇异项为零可得



(a)  $E[a]$  (b)  $E[a^2]$   
图 1 系统的频率响应曲线(一理论解,ooo 数值解)



(a)  $E[a]$  (b)  $E[a^2]$   
图 2 系统的稳态响应(一理论解,ooo 数值解)

$$2i\omega A' + i \sum_i \frac{\beta_i \alpha_i}{\alpha_i^2 + \omega^2} \omega A + \sum_i \frac{\beta_i \omega}{\alpha_i^2 + \omega^2} A + 3\alpha\omega^2 A^2 A + \frac{h}{2} A \exp(i\sigma T) + \frac{k}{2} A \exp(i\sigma T_1 + i\gamma W(T_1)) = 0 \quad (28)$$

作变换(10) 可将(28) 式化为

$$\begin{cases} a' = -\frac{a}{2} \sum_i \frac{\beta_i \alpha_i}{\alpha_i^2 + \omega^2} - \frac{a}{4\omega} h \sin \eta - \frac{a}{4\omega} k \sin(\eta + \gamma W), \\ a\eta' = \alpha a - \frac{1}{2} \sum_i \frac{\beta_i \omega}{\alpha_i^2 + \omega^2} a - 3\alpha\omega a^3 - \frac{a}{2\omega} h \cos \eta - \frac{a}{2\omega} k \cos(\eta + \gamma W). \end{cases} \quad (29)$$

式中  $\eta = \sigma T_1 - 2\varphi$

由(29) 式解出  $a$  和  $\eta$  后, 可得方程(1) 的首次近似解为

$$u = 2a(\vartheta) \cos\left[\frac{\Omega_0}{2}t - \frac{\eta(\vartheta)}{2}\right] + O(\varepsilon)$$

### 3.1 零解及其稳定性

显然零解  $a = 0$  是方程(29) 的稳态解, 下面讨论它的稳定性. 方程(29) 的线性化方程为

$$\begin{cases} a' = -\frac{a}{2} \sum_i \frac{\beta_i \alpha_i}{\alpha_i^2 + \omega^2} - \frac{a}{4\omega} h \sin \eta - \frac{a}{4\omega} k \sin(\eta + \gamma W), \\ \eta' = \sigma - \frac{1}{2} \sum_i \frac{\beta_i \omega}{\alpha_i^2 + \omega^2} - \frac{h}{2\omega} \cos \eta - \frac{k}{2\omega} \cos(\eta + \gamma W). \end{cases} \quad (30)$$

令  $v = \ln a$ , 方程(30) 可写为如下 Ito 方程的形式

$$\begin{cases} dv = \left[ -\frac{1}{2} \sum_i \frac{\beta_i \alpha_i}{\alpha_i^2 + \omega^2} - \frac{h}{4\omega} \sin \eta - \frac{k}{4\omega} \sin(\eta + \theta) \right] dT_1, \\ d\eta = \left[ \sigma - \frac{1}{2} \sum_i \frac{\beta_i \omega}{\alpha_i^2 + \omega^2} - \frac{h}{2\omega} \cos \eta - \frac{k}{2\omega} \cos(\eta + \theta) \right] dT_1, \\ d\theta = \gamma dw. \end{cases} \quad (31)$$

式中  $\theta = \gamma W(T_1)$ 、 $(\eta(T_1), \theta(T_1))$  的稳态概率密度函数  $p(\eta, \theta)$  对应的 FPK 方程为

$$\frac{1}{2} \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} p(\eta, \theta) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \left( -\sigma + \frac{1}{2} \sum_i \frac{\beta_i \omega}{\alpha_i^2 + \omega^2} + \frac{h}{2\omega} \cos \eta + \frac{k}{2\omega} \cos(\eta + \theta) \right) p(\eta, \theta) \right] = 0. \quad (32)$$

如果能从(32)式求出  $p(\eta, \theta)$ ，则对应于零解的最大 Liapunov 指数为

$$\lambda = -\frac{1}{2} \sum_i \frac{\beta_i \alpha_i}{\alpha_i^2 + \omega^2} - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} [h \sin \eta + k \sin(\eta + \theta)] p(\eta, \theta) d\eta d\theta.$$

### 3.2 非零稳态响应

对于非零的稳态解  $a \neq 0$ ，相应的 Ito 方程为

$$\begin{cases} a' = -\frac{a}{2} \sum_i \frac{\beta_i \alpha_i}{\alpha_i^2 + \omega^2} - \frac{a}{4\omega} h \sin \eta - \frac{a}{4\omega} k \sin(\eta + \gamma W), \\ \eta' = \sigma - \frac{1}{2} \sum_i \frac{\beta_i \omega}{\alpha_i^2 + \omega^2} - 3\alpha \omega^2 - \frac{h}{2\omega} \cos \eta - \frac{k}{2\omega} \cos(\eta + \gamma W). \end{cases} \quad (34)$$

当  $\gamma = 0$  时  $\xi(t)$  退化为确定性谐和激励。下面讨论当  $\gamma \neq 0$  但较小时的情形，可用摄动法进行求解。记

$$\zeta = \sqrt{h^2 + k^2 + 2hk \cos \gamma W}, \quad \eta = \arctan \frac{k \sin \gamma W}{h + k \cos \gamma W}, \quad \phi = \eta + \eta$$

可得

$$\begin{cases} a' = -\frac{a}{2} \sum_i \frac{\beta_i \alpha_i}{\alpha_i^2 + \omega^2} - \frac{a}{4\omega} \zeta \sin \phi, \\ \phi' = \sigma - \frac{1}{2} \sum_i \frac{\beta_i \omega}{\alpha_i^2 + \omega^2} - 3\alpha \omega^2 - \frac{\zeta}{2\omega} \cos \phi. \end{cases} \quad (35)$$

若随机过程  $\zeta(T_1)$  可分解为

$$\zeta(T_1) = E[\zeta(T_1)] + \Delta \zeta, \quad (36)$$

式中  $\Delta \zeta$  可看作为小的随机扰动，其均值  $E[\Delta \zeta] = 0$ 。

先假设  $\Delta \zeta = 0$ ，即当时  $\zeta = 2/\pi(h+k)E(4hk/(h+k)^2)$ ，可得系统(35)的稳态解为

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \left[ \frac{1}{3\alpha} \left( \sigma - \frac{1}{2} \sum_i \frac{\beta_i \omega}{\alpha_i^2 + \omega^2} \right) \pm \frac{1}{3\alpha} \sqrt{\left( E[\zeta] \right)^2 - 4\omega^2 \left( \sum_i \frac{\beta_i \alpha_i}{\alpha_i^2 + \omega^2} \right)^2} \right]^{1/2}, \\ \sin \phi_0 = -\frac{2\omega}{E[\zeta]} \left( \sigma - \frac{1}{2} \sum_i \frac{\beta_i \alpha_i}{\alpha_i^2 + \omega^2} \right). \end{cases} \quad (37)$$

由(37)式，只有当  $E[\zeta] > 2\omega \sum_i \frac{\beta_i \alpha_i}{\alpha_i^2 + \omega^2}$  时非零稳态解才可能存在，如果有两个非零的稳态

解, 则大解是稳定的而小解是不稳定。

当  $\Delta \zeta \neq 0$  时, 令

$$a = a_0 + a_1, \quad \phi = \phi_0 + \phi_1,$$

式中  $a_0, \phi_0$  由(37) 式定义,  $a_1, \phi_1$  为小扰动项, 将上式代入(37) 式并忽略非线性项可得线性化方程

$$\begin{cases} \dot{a}_1 = -\frac{a_0}{4\omega} E[\zeta] \cos \phi_0 \phi_1 - \frac{a_0}{4\omega} \sin \phi_0 \Delta \zeta, \\ \dot{\phi}_1 = -6\alpha\omega a_0 a_1 + \frac{E[\zeta]}{2\omega} \sin \phi_0 \phi_1 - \frac{1}{2\omega} \cos \phi_0 \Delta \zeta. \end{cases} \quad (38)$$

可以用矩方法<sup>[1]</sup> 从方程(38) 求出一、二阶矩  $E[a_1], E[a_1^2]$ 。

$$\begin{aligned} E[a_1] &= 0, \quad E[a_1^2] = \frac{1}{(12\alpha\omega^2 a_0 \cos \phi_0)^2} E[(\Delta \zeta)^2] \\ E[(\Delta \zeta)^2] &= h^2 + k^2 - \frac{4}{\pi^2} (h+k)^2 E^2 \left[ \frac{4hk}{(h+k)^2} \right]. \end{aligned}$$

从而可得系统响应的一、二阶矩分别为

$$\begin{aligned} E[a] &= a_0 + E[a_1] = a_0, \\ E[a^2] &= E[(a_0 + a_1)^2] = a_0^2 + E[a_1^2]. \end{aligned} \quad (39)$$

### 3.3 数值模拟

令

$$N = 1000, \quad \varepsilon = 0.1, \quad \omega = 1.0, \quad \eta_1 = 0.07, \quad \eta_2 = 0.09, \quad \gamma = 0.1$$

$$\alpha_1 = 1.0, \quad \beta_1 = 0.5, \quad \alpha_2 = 2.0, \quad \beta_1 = 2.5/2, \quad k = 3.0$$

对方程(1) 用四阶龙格库塔方法进行数值计算。当  $h = 3.0$  时,  $E[a], E[a^2]$  关于参数  $\sigma_1$  的变化曲线见图 3,

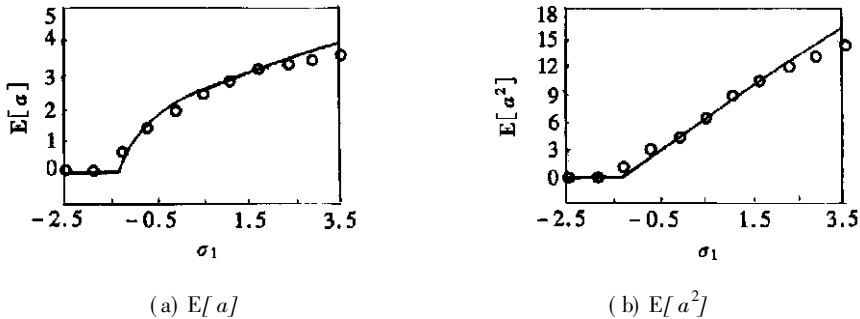


图 3 系统的频率响应曲线(—理论解,  $\circ$  数值解)

当  $\sigma_1 = 1.0$  时,  $E[a], E[a^2]$  关于  $h$  的变化曲线见图 4。

## 4 结 论

用多尺度法研究了具有 visco\_elastic 项的非线性随机系统, 在谐和与有界噪声联合激励下的参数主共振响应和稳定性问题。由于采用了统一随机有界噪声模型, 本文的随机噪声可以是窄带的, 也可以是宽带的。对于 visco\_elastic 项的讨论表明, 它具有在阻尼和刚度方面的不同贡献。关于零解及其稳定性, 对情形 I, 给出了零解的最大 Liapunov 指数的表达式, 由此可讨论系统的稳定性与分岔, 当  $\gamma$  较小时, 可得零解稳定的充分必要条件。此条件与当  $\gamma = 0$  即系统受到确定性谐和激励时零解的稳定性条件是一致的。对情形 II, 给出了零解的最大 Liapunov



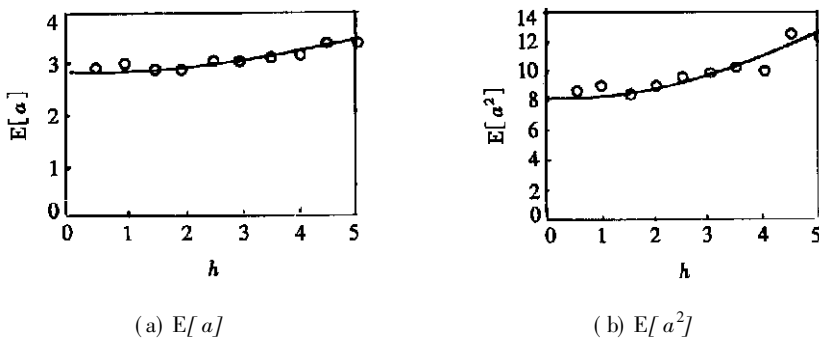


图 4 系统的稳态响应(一理论解, °°° 数值解)

Lyapunov 指数表达式, 表达式三项分别表示了 visco\_elastic 项、谐和激励项和随机激励项对系统的稳定性和分岔点的影响。关于非零稳态响应, 本文主要讨论当  $\gamma$  较小, 由讨论得知, 即使带宽  $\gamma$  很小, 系统的响应与主要受到确定谐和激励时的情形不同。给出系统响应的一、二阶矩, 数值模拟结果表明, 本文提出的方法是有效的。

[参 考 文 献]

- [1] Stratonovitch R L, Romanovskii Y M. Parametric effect of a random force on linear and nonlinear oscillatory systems [A]. In: Kuznetsov P T, Stratonovitch R L, Tikhonov V I Eds. Nonlinear Translations of Stochastic Process [C]. Oxford: Pergamon, 1965, 16—26.
- [2] Dimentberg M F, Isikov N E. Model R. Vibration of a system with cubic\_non\_linear damping and simultaneous periodic and random parametric excitation [J]. Mechanics of Solids, 1981, 16(1): 19—21.
- [3] Namachchivaya N S. Almost sure stability of dynamical systems under combined harmonic and stochastic excitations [J]. Journal of Sound and Vibration, 1991, 151(1): 77—91.
- [4] Ariaratnam S T, Tam D S F. Parametric random excitation of a damped Mathieu oscillator [J]. Z Aangew Math Mech, 1976, 56(3): 449—452.
- [5] Dimentberg M F. Statistical Dynamics of Nonlinear and Time\_Varying Systems [M]. New York: Wiley, 1988.
- [6] RONG Hai\_wu, XU Wei, FANG Tong. Principal response of Duffing oscillator to combined deterministic and narrow\_band random parametric excitation [J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 210(4): 483—515.
- [7] Ariaratnam S T. Stochastic stability of linear viscoelastic systems [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 1993, 8(1): 153—155.
- [8] Cai G Q, Lin Y K, XU Wei. Strongly nonlinear system under non\_white random excitations [A]. In: Spencer B F, Johnson E A Eds. Stochastic Structural Dynamic [C]. Rotterdam: A A Balkema, 1999, 11—16.
- [9] Wedig W V. Invariant measures and Lyapunov exponents for generalized parameter fluctuations [J]. Structural Safety, 1990, 8(1): 13—25.
- [10] Rajan S, Davies H G. Multiple time scaling of the response of a Duffing oscillator to narrow\_band excitations [J]. Journal of Sound and Vibration, 1988, 123(3): 497—506.
- [11] Nayfeh A H, Serhan S J. Response statistics of nonlinear systems to combined deterministic and random excitations [J]. International Journal of Nonlinear Mechanics, 1990, 25(5): 493—509.
- [12] Shinozuka M. Simulation of multivariate and multidimensional random processes [J]. Journal of

Sound and Vibration, 1971, **49**(4): 357—367.

- [13] Shinozuka M. Digital simulation of random processes and its applications[J]. Journal of Sound and Vibration, 1972, **25**(1): 111—128.

## Visco\_Elastic Systems Under Both Deterministic and Bound Random Parametric Excitation

XU Wei<sup>1</sup>, RONG Hai\_wu<sup>2</sup>, FANG Tong<sup>3</sup>

(1. Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical  
University, Xi'an 710072, P. R. China;

2. Department of Mathematics, Foshan University, Foshan, Guangdong 528000, P. R. China;

3. Institute of Vibration Engineering, Northwestern Polytechnical  
University, Xi'an 710072, P. R. China)

**Abstract:** The principal resonance of a visco\_elastic systems under both deterministic and random parametric excitation was investigated. The method of multiple scales was used to determine the equations of modulation of amplitude and phase. The behavior, stability and bifurcation of steady state response were studied by means of qualitative analyses. The contributions from the visco\_elastic force to both damping and stiffness can be taken into account. The effects of damping, detuning, bandwidth, and magnitudes of deterministic and random excitations were analyzed. The theoretical analyses are verified by numerical results.

**Key words:** principal resonance; visco\_elastic system; multiple scale method; largest Liapunov exponent; bifurcation