

文章编号: 1000_0887(2003)07_0675_09

横观各向同性多孔超弹性矩形板的单向拉伸*

程昌钧, 任九生

(上海市应用数学和力学研究所, 上海大学 力学系, 上海 200072)

(本刊编委程昌钧来稿)

摘要: 利用横观各向同性超弹性材料的广义 neo-Hookean 应变能函数研究了含有多个微孔的超弹性矩形板在单向拉伸作用下的有限变形和受力分析。给出了含有某种对称性分布的多个微孔的矩形板的变形模式, 通过求解该变形模式满足的微分方程, 将它用两个参数表示出来。可应用最小势能原理导出变分近似解, 从而得到矩形板的变形和应力分布的解析解。分析了板中微孔的增长及微孔边缘应力的分布情况, 讨论了板的各向异性程度及微孔的大小和孔间距离的影响, 得到了单个、三个及五个微孔板中微孔的增长变形和孔边应力分布的一些基本规律, 并进行了相互比较。

关键词: 横观各向同性; 超弹性材料; 多孔矩形板; 有限变形; 最小势能原理; 微孔的增长

中图分类号: O343 文献标识码: A

引 言

以橡胶材料、合成聚胺酯材料为代表的超弹性材料在日常生活和工业生产活动的各个领域占据着重要的地位, 它们具有很多优良特性, 而由材料的不稳定性引起的空穴生成和增长问题在超弹性材料的损伤和破坏机理方面起着重要的作用。因此, 近二十年该问题的研究得到一定的进展, 可见 Horgan^[1] 的综述。其中, Chou Wang 和 Horgan^[2]、任和程^[3, 4] 分析了各向同性及横观各向同性不可压超弹性柱体或球体受拉时单个微孔的增长问题; Horgan 和 Abeyaratne^[5]、Horgan^[6] 分析了可压超弹性柱体或球体受拉时单个微孔的增长问题; 程和尚^[7]、Ren 和 Cheng^[8] 分析了含有单个中心微孔的超弹性矩形板在单向拉伸作用下微孔随载荷的增长情况; 任和程^[9] 并分析了含有多个微孔的各向同性超弹性矩形板中微孔随载荷的增长情况。近年来, 纤维加强的超弹性复合材料得到了广泛的应用, 但其中空穴生成和增长问题尚少见报道。本文的目的是进一步分析含有多个微孔的横观各向同性的广义 neo-Hookean 材料超弹性矩形板受单向拉伸作用时多个微孔的增长情况及其相互影响。文中首先给出了含有某种对称性分布的多个微孔的横观各向同性的超弹性矩形板的变形模式, 通过求解利用不可压条件得到的该变形模式函数满足的微分方程, 将它用两个待定参数表示出来。一个参数可用无穷远处的变形状态确定, 另一个可应用最小势能原理导出变分近似解, 从而我们求得了矩形板

* 收稿日期: 2001_10_19; 修订日期: 2002_02_21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10272069); 上海市重点学科建设资助项目

作者简介: 程昌钧(1937—), 女, 重庆人, 教授, 博导(E-mail: chjcheng@mail.shu.edu.cn)。

和应力分布的解析解, 该解依赖于板的各向异性程度及微孔的个数和排列方式、微孔的大小和孔间距离等因素。文中详细分析了板中微孔在不同荷载作用下的增长情况及微孔边缘应力的分布情况, 可以看到, 在单向拉伸作用下圆形的中心微孔变形后成为椭圆, 而圆形的非中心微孔变形后成为近似于椭圆的形状。详细讨论了板的各向异性程度及微孔的个数和排列方式、微孔的大小和孔间距离对微孔变形和孔边应力分布的影响, 得到了单个、三个及五个微孔板中微孔的增长变形和孔边应力分布的一些基本规律。对同一情况下微孔变形和孔边应力分布的规律进行了比较, 发现二者是一致的。也对不同情况下微孔的变形和孔边应力分布的规律进行了比较。

1 无孔板的变形和受力分布

取重合的直角坐标系 (X, Y, Z) 及 (x, y, z) 分别为矩形板(矩形板的长、宽、高分别为 L_1, L_2, H) 的物质坐标系和空间坐标系, 并设在矩形板的两对边 $X = \pm L_1/2$ 上作用有均匀拉伸荷载 q , 另两对边 $Y = \pm L_2/2$ 和上下表面 $Z = \pm H/2$ 上不受力。假设矩形板无孔拉伸时处于一种均匀变形状态之中, 即

$$x = \lambda_1 X, \quad y = \lambda_2 Y, \quad z = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} Z, \quad (1)$$

其中, λ_1, λ_2 分别为与拉伸荷载 q 有关的 X, Y 方向的主伸长比。这里已设其变形满足材料的不可压条件。

与变形模式(1)相应的变形梯度张量及右、左 Green-Cauchy 变形张量分别为

$$\mathbf{F} = \text{diag} \left[\lambda_1, \lambda_2, 1/(\lambda_1 \lambda_2) \right], \quad (2)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{B} = \text{diag} \left[\lambda_1^2, \lambda_2^2, 1/(\lambda_1 \lambda_2)^2 \right], \quad (3)$$

假设矩形板由纤维加强的关于 X 方向为横观各向同性的材料主轴的广义 neo-Hookean 材料构成, 其应变能函数为^[10]

$$W = \frac{1}{2} \mu \left[(I_1 - 3) + a(I_5 - 2I_5 + 1) \right], \quad (4)$$

式中, μ 为材料的初始剪切模量, a 为表示材料的各向异性程度的参数, 若 $a = 0$ 则材料为各向同性的。 I_1, I_5 分别为右 Green-Cauchy 变形张量的第一和第五不变量

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 1/(\lambda_1 \lambda_2)^2, \quad I_5 = C_{11} = \lambda_1^2. \quad (5)$$

相应的 Cauchy 应力张量为

$$\boldsymbol{\tau} = -p\mathbf{I} + 2(W_1\mathbf{B} + W_5\mathbf{N}). \quad (6)$$

(6) 式中, \mathbf{I} 为单位张量, $N_{\bar{j}} = F_{i1}F_{j1}$, $W_1 = \partial W/\partial I_1 = \mu/2$, $W_5 = \partial W/\partial I_5 = \mu a(I_5 - 1)$ 。于是非零的 Cauchy 应力张量为

$$\begin{cases} \tau_{xx} = -p + \mu \left[\lambda_1^2 + 2a(\lambda_1^2 - 1)\lambda_1^2 \right], \\ \tau_{yy} = -p + \mu \lambda_2^2, \\ \tau_{zz} = -p + \mu \left[\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \right]^2, \end{cases} \quad (7)$$

其中, p 为待定的静水压力。由边界条件 $\tau_{xx} = q$, $\tau_{yy} = \tau_{zz} = 0$ 可得

$$\lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = \lambda^{-1/2}, \quad p = \mu \lambda^{-1}, \quad (8)$$

其中 λ 满足方程

$$\lambda^5 - \frac{2a-1}{2a}\lambda^3 - \frac{Q}{2a}\lambda - \frac{1}{2a} = 0, \tag{9}$$

式中, 荷载参数 $Q = q/\mu^*$ 对上式进行数值求解, 可求得不同各向异性参数 a 和荷载参数 Q 对应的 λ 的值. 计算中发现主伸长比 λ 随荷载参数 Q 的增加而增加, 随材料各向异性程度参数 a 的增加而减少. 将 λ_1, λ_2 代入(1)式或(7)式可求得板的变形和板的应力分布.

2 有孔板的变形和受力分析

2.1 变形模式和应力分布

根据圣维南原理, 可以认为微孔的存在只对微孔附近的应力和变形有明显的影响, 而对远离微孔的区域影响很小, 可忽略不计. 对含有多个微孔的矩形板, 当这些微孔的排列方式关于 X 轴和 Y 轴具有某种对称性时, 可假设其变形模式为^[7]

$$x = f_1(R)X, \quad y = f_2(R)Y, \quad z = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}Z, \tag{10}$$

其中, $f_1(R), f_2(R)$ 是与 $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 有关的待定函数, λ 为由(8)式决定的主伸长. 这里仍假设变形后矩形板是等厚度的. 由(10)相应的变形梯度张量和不可压条件可得 f_1, f_2 满足的微分方程为

$$\begin{cases} f_1' f_2 = f_1 f_2' \\ f_1' f_2 R + f_1 f_2' = \sqrt{\lambda} \end{cases}$$

其解可写为^{[2],[5]}

$$\begin{cases} f_1(R) = \alpha \sqrt[4]{\lambda} \sqrt{g(R, \beta)}, \\ f_2(R) = \frac{1}{\alpha} \sqrt[4]{\lambda} \sqrt{g(R, \beta)}, \end{cases} \tag{11}$$

其中, $g(R, \beta) = 1 + (\beta/R)^2$, α, β 为待定的积分常数. α 描述变形后不同方向的变形比, β 描述变形的大小.

在远离微孔的区域内, (10)式中的变形状态应与无孔时相同, 令 $R \rightarrow +\infty$, 并与(1)式比较可得

$$\alpha = \sqrt[4]{\lambda^3}. \tag{12}$$

于是, (10)式可写为

$$x = \lambda \sqrt{g} X, \quad y = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\lambda}} Y, \quad z = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} Z. \tag{13}$$

相应的变形梯度张量及右、左 Green-Cauchy 变形张量分别为

$$F = \begin{bmatrix} \lambda \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial X} X + \lambda \sqrt{g} & \lambda \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial Y} X & 0 \\ \lambda \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial X} Y & \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial Y} Y + \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\lambda}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\text{其中, } C_{11} &= \left[\lambda \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial X} X + \lambda \sqrt{g} \right]^2 + \left[\lambda \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial Y} X \right]^2, \\
C_{12} = C_{21} &= \left[\lambda \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial X} X + \lambda \sqrt{g} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial X} Y \right] + \left[\lambda \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial Y} X \right] \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial Y} Y + \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\lambda}} \right], \\
C_{22} &= \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial Y} Y + \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\lambda}} \right]^2 + \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial X} Y \right]^2, \\
B_{11} &= \left[\lambda \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial X} X + \lambda \sqrt{g} \right]^2 + \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial Y} Y \right]^2, \\
B_{12} = B_{21} &= \left[\lambda \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial X} X + \lambda \sqrt{g} \right] \left[\lambda \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial Y} X \right] + \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial X} Y \right] \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial Y} Y + \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\lambda}} \right], \\
B_{22} &= \left[\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial Y} Y + \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\lambda}} \right]^2 + \left[\lambda \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial Y} X \right]^2,
\end{aligned}$$

右、左 Green-cauchy 变形张量的第一和第五不变量分别为

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left[\lambda \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial X} X + \lambda \sqrt{g} \right]^2 + \left[\lambda \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial Y} X \right]^2 + \\
&\quad \left[\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial Y} Y + \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\lambda}} \right]^2 + \left[\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial X} Y \right]^2 + \frac{1}{\lambda}, \\
I_5 &= \left[\lambda \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial X} X + \lambda \sqrt{g} \right]^2 + \left[\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial X} Y \right]^2.
\end{aligned}$$

将其代入(6)式可得相应的非零 Cauchy 应力分量为

$$\begin{cases}
\tau_{xx} = -p + 2 \left\{ \frac{\mu}{2} C_{11} + \mu \alpha (I_5 - 1) \left[\lambda \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial X} X + \lambda \sqrt{g} \right]^2 \right\}, \\
\tau_{yy} = -p + 2 \left\{ \frac{\mu}{2} C_{22} + \mu \alpha (I_5 - 1) \left[\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial X} Y \right]^2 \right\}, \\
\tau_{zz} = -p + \frac{\mu}{\lambda}, \\
\tau_{xy} = 2 \left\{ \frac{\mu}{2} C_{12} + \mu \alpha (I_5 - 1) \left[\lambda \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial X} X + \lambda \sqrt{g} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial X} Y \right] \right\}.
\end{cases} \quad (14)$$

同样,由边界条件 $\tau_z = 0$ 可得 $p = \mu/\lambda$.

2.2 变分方程与近似解

显然,现在由(14)式给出的应力分量中还包括常数 β ,为了求出它,我们采用最小势能原理使得微孔的边界条件和微分方程在变分意义下得到近似的满足.

2.2.1 三孔板的总势能

现考虑矩形板中含有三个半径均为 b 的微小空洞,设其中一个位于矩形板中心处,另两个有两种排列方式,排列 1:两个微孔位于 Y 轴上,中心坐标分别为 $(0, \pm d)$;排列 2:两个微孔位于 X 轴上,中心坐标轴分别为 $(\pm d, 0)$,分别如图 6、图 7 所示.不同的排列方式有不同形式的总势能,排列 1 的总势能为

$$\begin{aligned}
\Pi &= \int_{\Omega} W dV - 2 \int_{\Omega_1} W dV - qHL_2 [f_1(L/2) - 1] L/2 = \\
&\quad \int_0^{2\pi c} \int_b^{H/2} \int_{-H/2}^{H/2} WR dR d\Theta dZ - 2 \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \int_{R_1}^{R_2} \int_{-H/2}^{H/2} WR dR d\Theta dZ -
\end{aligned}$$

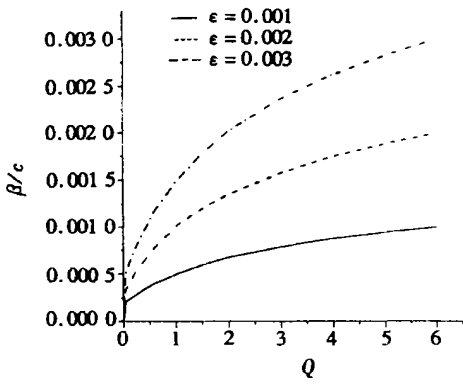


图1 $a = 0.5$ 时单个微孔的 β_Q 曲线

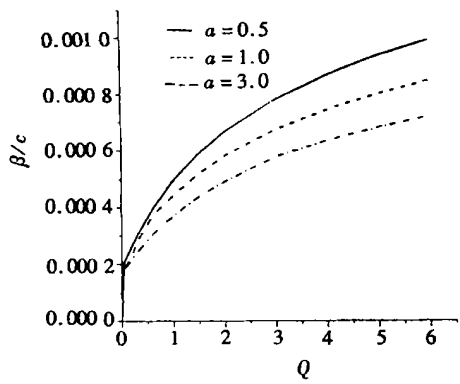


图2 $\epsilon = 0.003$ 时单个微孔的 β_Q 曲线

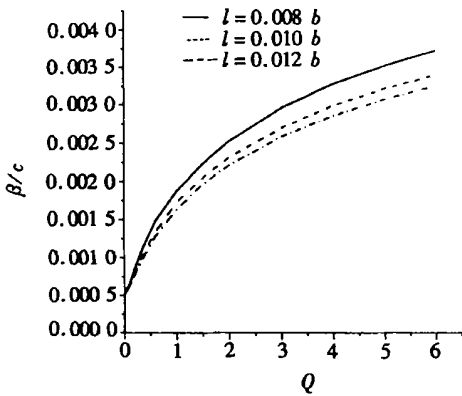


图3 $a = 0.5$ 时排列1的三个微孔的 β_Q 曲线

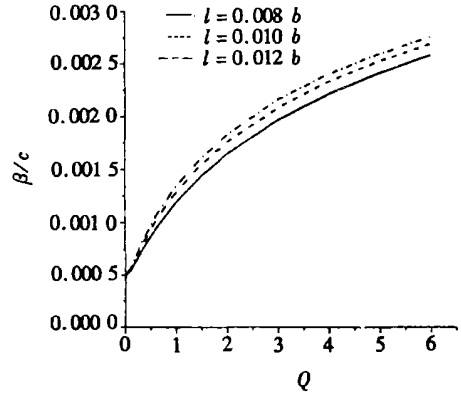


图4 $a = 0.5$ 时排列2的三个微孔的 β_Q 曲线

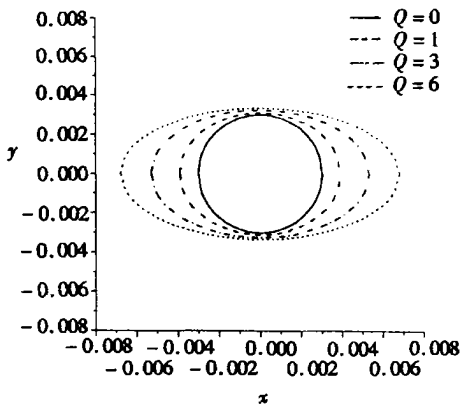


图5 $a = 0.5$ 时单个微孔的变形示意图

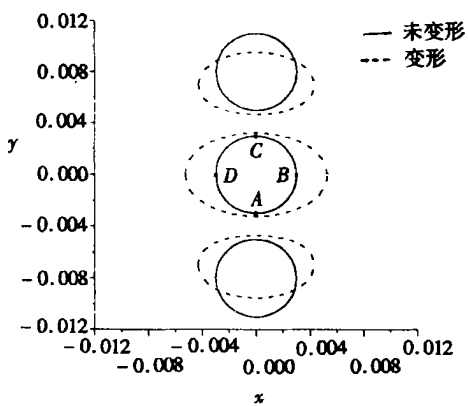


图6 $a = 0.5$ 时排列1的三个微孔的变形示意图

$$2Hqc^2 \left[\lambda_1 \sqrt{1 + \beta^2} - 1 \right], \tag{15}$$

式中, $\Omega = \left\{ R \in [b, c], b \ll c, b/c = \epsilon, \Theta \in [0, 2\pi], Z \in \left[-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right] \right\}$ 为去掉中心微孔的

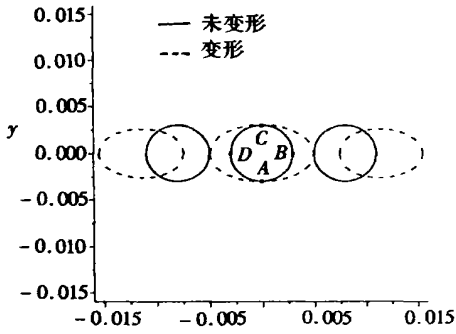


图 7 $a = 0.5$ 时排列 2 的三个微孔的变形示意图

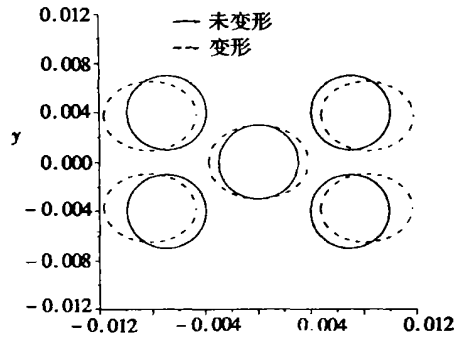


图 8 $a = 0.5, \Theta_0 = \pi/6$ 时排列 4 的五个微孔的变形示意图

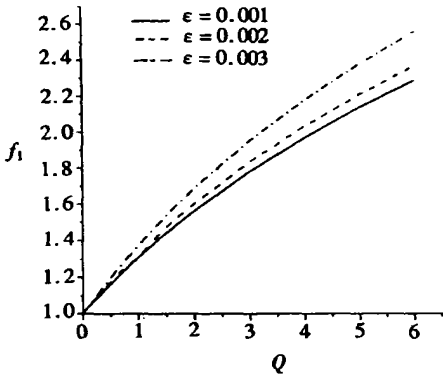


图 9 $a = 0.5$ 时排列 1 的三个微孔的中心微孔上 f_1-Q 曲线

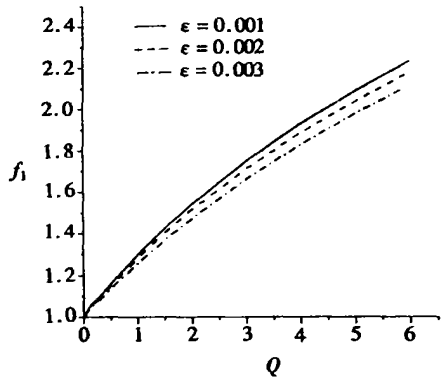


图 10 $a = 0.5$ 时排列 2 的三个微孔的中心微孔上 f_1-Q 曲线

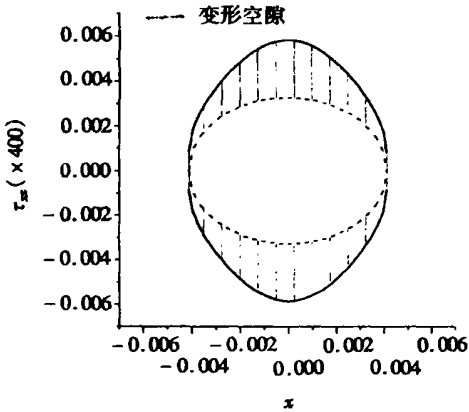


图 11 $a = 0.5$ 单孔板的微孔边缘的应力分布示意图

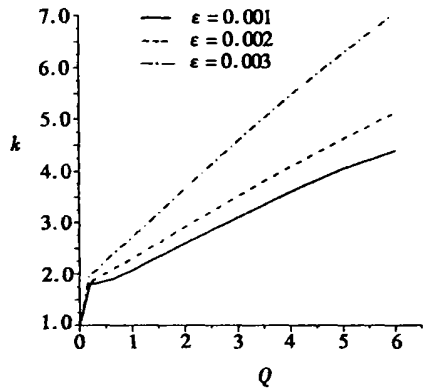


图 10 $a = 0.5$ 时图 6 中 A 或 C 点的 $k-Q$ 曲线

半径为 c 环形域, $\partial \Omega$ 为环形域的外边界, Ω_1 是中心在 $(0, \pm l)$ 的微孔所占区域

$$\Theta_1 = \arccos(b/l), R_{1,2} = l \sin \Theta_1 \sqrt{b^2 - l^2 \cos^2 \Theta_1} \cdot$$

排列 2 的总势能为

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_{\Omega} W dV - 2 \int_{\Omega_1} W dV - qHL_2 [f_1(L_1/2) - 1] L_1/2 = \\ & \int_0^{2\pi} \int_b^c \int_{-H/2}^{H/2} WR dR d\Theta dZ - 2 \int_{-\Theta_2}^{\Theta_2} \int_{R_3}^{R_4} \int_{-H/2}^{H/2} WR dR d\Theta dZ - \\ & 2Hqc^2 \left[\lambda \sqrt{1 + \beta^2} - 1 \right], \end{aligned} \tag{16}$$

式中, Ω_1 是中心在 $(\pm l, 0)$ 的微孔所占区域

$$\Theta_2 = \arcsin(b/l), R_{3,4} = l \cos \Theta \pm \sqrt{b^2 - l^2 \sin^2 \Theta}.$$

2.2.2 单孔板的总势能

若矩形板中仅含有一个位于中心处半径为 b 的微小空洞, 其总势能可由三孔板的排列 1 或排列 2 的总势能(15)或(16)式去掉第二项得到。

2.2.3 五孔板的总势能

若矩形板中含有五个半径为 b 的微小空洞, 设其中一个位于矩形板中心处, 另外几个有如下几种排列方式。排列 1: 两个微孔位于 Y 轴上, 中心坐标分别为 $(0, \pm l)$, 另两个微孔位于 X 轴, 中心坐标分别为 $(\pm l, 0)$; 排列 2: 四个微孔位于 Y 轴上, 中心坐标分别为 $(0, \pm 2l)$; 排列 3: 四个微孔均位于 X 轴上, 中心坐标分别为 $(\pm 2l, 0)$; 排列 4: 四个微孔关于 X 轴和 Y 轴对称分布在中心坐标分别为 $(l \cos \Theta_0, l \sin \Theta_0)$ 处, $\Theta_0 = \pi/6$ 时如图 8 所示。此时的总势能应去掉四个非中心微孔的应变能, 且不同的排列有不同形式的总势能。如对排列 1, 其总势能的相应形式为

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_0^{2\pi} \int_b^c \int_{-H/2}^{H/2} WR dR d\Theta dZ - 2 \int_{\Theta_1}^{\pi - \Theta_1} \int_{R_1}^{R_2} \int_{-H/2}^{H/2} WR dR d\Theta dZ - \\ & 2 \int_{-\Theta_2}^{\Theta_2} \int_{R_3}^{R_4} \int_{-H/2}^{H/2} WR dR d\Theta dZ - 2Hqc^2 \left[\lambda \sqrt{1 + \beta^2} - 1 \right], \end{aligned} \tag{17}$$

式中,

$$\Theta_1 = \arccos(b/l), R_{1,2} = l \sin \Theta \pm \sqrt{b^2 - l^2 \cos^2 \Theta},$$

$$\Theta_2 = \arcsin(b/l), R_{3,4} = l \cos \Theta \pm \sqrt{b^2 - l^2 \sin^2 \Theta}.$$

其它排列方式下的总势能可以同样的方式得到。

(15)、(16)、(17)等式中的未知数为待定常数 β , 将(4)式中的应变能函数代入进行数值积分, 然后对 β 求导, 并由变分方程 $\partial \Pi / \partial \beta = 0$ 可求得这个待定常数 $\beta = \beta(a, \varepsilon, l, q)$, ($\varepsilon = b/c$) 的变分解的数值结果。

3 数值结果及讨论

3.1 变形参数 β

应用上述变分原理, 我们求得了不同的各向异性参数 $a = 0.5, 1.0, 2.0$ 、不同大小的微孔 $\varepsilon = 0.001, 0.002, 0.003$ 、不同的孔间距 $l = 0.008b, 0.01b, 0.012b$ 对应的三孔、五孔及单孔的各种排列方式下 β 值随荷载参数 Q 变化的数值结果。其中, $a = 0.5$ 时单孔板的 β_Q 曲线示于如图 1; $\varepsilon = 0.003$ 时单孔板的 β_Q 曲线示于如图 2; $a = 0.5, \varepsilon = 0.003$ 时三孔板排列 1 和排列 2 的 β_Q 曲线分别示于图 3、图 4。由图可见, 在所有情况下, β 均随微孔大小的增加而增加, 随材料各向异性程度的增加而减少。在三孔板的排列 1, 五孔板的排列 1、排列 2、 $\Theta_0 = \pi/3$ 的排列 4 的情况下, β 随孔间距离的增加而减少; 在三孔板的排列 2, 五孔板的排列 3、 $\Theta_0 = \pi/6$ 的排

列 4 的情况下, β 随孔间距离的增加而增加。在不同的载荷作用下, 对五孔板而言, β 值从大到小的次序依次为(以 $a = 0.1$ 和 $Q = 1.0$ 为例): $\beta = 0.00194327c$ (排列 2), $\beta = 0.00190851c$ ($\Theta_0 = \pi/3$ 的排列 4), $\beta = 0.00148919c$ (排列 1), $\beta = 0.00121516c$ ($\Theta_0 = \pi/6$ 的排列 4), $\beta = 0.00109506c$ (排列 3)。对三孔板而言, 排列 1 的 β 值大于排列 2 的 β 值。

3.2 微孔的增长变形

将求得的参数代入(13)式, 可求得微孔上各点的变形幅度 f_1, f_2 的数值结果, 进而可求得整个微孔相应的变形结果。其中, 单个微孔随荷载 Q 的变形如图 5 所示; 两种排列方式下三个微孔的变形分别如图 6、图 7 所示; $\Theta_0 = \pi/6$ 的排列 4 的五个微孔的变形如图 8 所示; 两种排列方式下三孔板中心微孔的 f_1-Q 曲线分别如图 9、图 10 所示。矩形板变形的基本特征是 y 方向的变形远小于 x 方向的变形, 随着拉伸载荷的增加, 圆形的中心微孔逐渐变成长短径之比不断增加的椭圆形微孔, 而非中心微孔则由圆形变为近似于椭圆形的形状, 且其中心产生的一定量的移动。所有微孔的变形均随材料各向异性程度的增加而减少。单孔板的变形与微孔的大小关系不大; 三孔的排列 1, 五孔板的排列 1、排列 2、 $\Theta_0 = \pi/3$ 的排列 4 的情况下微孔的变形值随微孔大小的增加而增加, 随孔间距离的增加而减少; 三孔板的排列 2, 五孔板的排列 3、 $\Theta_0 = \pi/6$ 的排列 4 的情况下, 微孔的变形值随微孔大小的增加而减少, 随孔间距离的增加而增加。

3.3 微孔边缘的应力分布

将求得的参数代入(14)中, 可得各种排列情况下微孔边缘上各点的应力 $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{xy}$ 随荷载参数 Q 变化的数值结果, 并进而得到各个微孔上的应力分布情况。其中, 单个微孔边缘应力 τ_{xx} 在 $a = 0.5, \epsilon = 0.003$ 时的分布示意于图 11; 两种排列方式下的三孔板的中心微孔上 A、C 点处的应力集中系数 k 示于图 12、图 13。由图可见, 微孔边缘的应力分布以 x 方向的应力 τ_{xx} 为主, y 方向的应力 τ_{yy} 相对而言可忽略不计, 且 B、D 点的应力 τ_{xx} 最小, A、C 点的应力 τ_{xx} 最大, 并有明显的应力集中特征。单孔板的应力 τ_{xx} 与微孔的大小关系不大; 三孔板的排列 1, 五孔板的排列 1、排列 2、 $\Theta_0 = \pi/3$ 的排列 4 的情况下微孔上各点的应力 τ_{xx} 值随微孔的大小增加而增加, 随孔间距离的增加而减少; 三孔板的排列 2, 五孔板的排列 3、 $\Theta_0 = \pi/6$ 的排列 4 的情况下, 微孔上各点的应力 τ_{xx} 值随微孔大小的增加而减少, 随孔间距离的增加而增加。微孔上应力分布的这种基本特征和其变形的基本特征一致。

3.4 单孔、三孔及五孔的结果比较

在相同的情况下, 五孔板排列 2 的 β 值最大、 $\Theta_0 = \pi/3$ 的排列 4 的 β 值次之, 排列 1 的三孔的 β 值再次之, 然后是五孔板排列 1 的 β 值、单孔的 β 值、 $\Theta_0 = \pi/6$ 排列 4 的 β 值、排列 2 的三孔的 β 值, 五孔板排列 3 的 β 值最小。微孔变形大小和孔边应力 τ_{xx} 大小的排列顺序也是如此。

[参 考 文 献]

[1] Horgan C O, Polignone D A. Cavitation in nonlinear elastic solids A review[J]. Applied Mechanics Review, 1995, 48(8): 471-485.

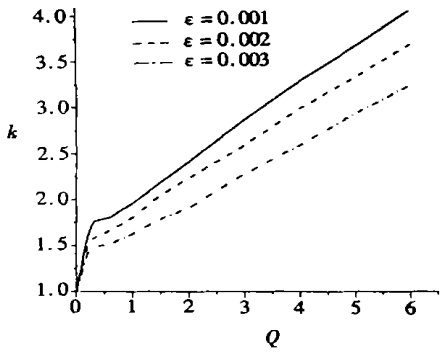


图 13 $a = 0.5$ 时图 7 中 A 或 C 点的 $k \sim Q$ 曲线

- [2] Chou_Wang M_S, Horgan C O. Void nucleation and growth for a class of incompressible nonlinearly elastic materials[J]. *Int J Solids Structures*, 1989, **25**(11): 1239—1254.
- [3] 任九生, 程昌钧. 不可压超弹性材料中的空穴分叉[J]. *应用数学和力学*, 2002, **23**(8): 783—789.
- [4] REN Jiu_sheng, CHENG Chang_jun. Bifurcation of cavitation solutions for incompressible transversely isotropic hyper_elastic materials[J]. *Journal of Engineering Mathematics*, 2002, **44**(3): 245—257.
- [5] Horgan C O, Abeyaratne R. A bifurcation problem for a compressible nonlinearly elastic medium: growth of a micro_void[J]. *J Elasticity*, 1986, **16**(1): 189—200.
- [6] Horgan C O. Void nucleation and growth for compressible nonlinearly elastic materials: an example [J]. *Int J Solids Structures*, 1992, **29**(2): 279—291.
- [7] 程昌钧, 尚新春. 超弹性矩形板单向拉伸时微孔的增长[J]. *应用数学和力学*, 1997, **18**(6): 573—578.
- [8] REN Jiu_sheng, CHENG Chang_jun, SHANG Xin_chun. The growth of a void in a rubber rectangular plate under uniaxial extension[J]. *Journal of Shanghai University*, 2001, **5**(3): 177—182.
- [9] 任九生, 程昌钧. 多孔 Mooney_Rivlin 材料矩形板的单向拉伸[J]. *力学季刊*, 2002, **23**(3): 347—353.
- [10] Polignone D A, Horgan C O. Cavitation for incompressible anisotropic nonlinearly elastic spheres[J]. *J Elasticity*, 1993, **33**(1): 27—65.

Transversely Isotropic Hyper_Elastic Material Rectangular Plate With Voids Under a Uniaxial Extension

CHENG Chang_jun, REN Jiu_sheng

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics; Department of Mechanics,
Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China)

Abstract: The finite deformation and stress analyses for a transversely isotropic rectangular plate with voids and made of hyper_elastic material with the generalized neo_Hookean strain energy function under a uniaxial extension are studied. The deformation functions of plates with voids that are symmetrically distributed in a certain manner are given and the functions are expressed by two parameters by solving the differential equations. The solution may be approximately obtained from the minimum potential energy principle. Thus, the analytic solutions of the deformation and stress of the plate are obtained. The growth of the voids and the distribution of stresses along the voids are analyzed and the influences of the degree of anisotropy, the size of the voids and the distance between the voids are discussed. The characteristics of the growth of the voids and the distribution of stresses of the plates with one void, three or five voids are obtained and compared.

Key words: transversely isotropic; hyper_elastic material; rectangular plate with voids; finite deformation; potential energy principle; growth of voids