 应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 07_0730_09

广义 Black_Scholes 模型期权定价新方法——保险精算方法*

闫海峰[1,2], 刘三阳[1]

(1. 西安电子科技大学 应用数学系, 西安 710071;
2. 河南师范大学 数学与信息科学学院, 新乡 453002)

(我刊原编委云天铨推荐)

摘要: 利用公平保费原则和价格过程的实际概率测度推广了 Mogens Bladt 和 Tina Hviid Rydberg 的结果• 在无中间红利和有中间红利两种情况下, 把 Black_Scholes 模型推广到无风险资产(债券或银行存款)具有时间相依的利率和风险资产(股票)也具有时间相依的连续复利预期收益率和波动率的情况, 在此情况下获得了欧式期权的精确定价公式以及买权与卖权之间的平价关系• 给出了风险资产(股票)具有随机连续复利预期收益率和随机波动率的广义 Black_Scholes 模型的期权定价的一般方法• 利用保险精算方法给出了股票价格遵循广义 Ornstein_Uhlenback 过程模型的欧式期权的精确定价公式和买权和卖权之间的平价关系•

关 键 词: 期权定价; Black_Scholes 模型; 公平保费; O_U 过程
中图分类号: O211.6; F830.9 文献标识码: A

引 言

Robert Merton[1] 以其最优投资组合和消费策略的动态规划精确解, 开创了连续时间金融模型的研究, 这一研究为他在 1973 年创立的证券定价的广义均衡模型奠定了基础, 而该模型的建立是连续时间金融研究的又一里程碑• Robert Merton 的主要贡献是利用套利思想证明了由 Fisher Black 和 Myron Scholes[2] 在 1973 年提出的期权定价公式和对衍生证券定价方法的进一步发展• Darrell Duffie[3] 用传统的期权定价方法导出了 Black_Scholes 公式, 而传统的定价方法都是基于无套利, 均衡, 完备的市场假设, 利用复制的思想得到, 用复制的思想 Black_Scholes 公式断言: 任何未定权益的价值均可由包含基础证券(股票)和无风险证券(债券)组成的投资组合精确复制, 换句话说, 购买或出售一个期权的风险可完全被投资组合的收益所对冲, 因此在无套利完备的市场假设下期权的市场价值可由债券和股票的市场价值确定, 但当市场有是有套利、非均衡、不完备时, 传统的期权定价方法将无法使用• 1998 年 Mogens Bladt 和 Tina Hviid Rydberg[4] 首次提出期权定价的保险精算方法, 其基本思想是: 无风险资产(确定的)按无风险利率折现, 风险资产(随机的)按期望收益率(定义如(1))折现, 欧式期权的价值等于在期权被

* 收稿日期: 2002_01_16; 修订日期: 2003_03_13
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(69972036); 河南省教委自然科学基金资助项目(1999110010)
作者简介: 闫海峰(1964—), 男, 河南卢氏人, 副教授, 博士(E_mail: yhaif@263.net)•

执行时股票期末价值按期望收益率折现的现值与执行价(无风险的)按无风险利率折现的现值之差在股票价格实际概率测度下的数学期望• 与期权定价的鞅方法相比较,保险精算方法的不同之处在于:计算数学期望所用的概率测度、期权被执行的条件以及计算可能损失的方式• 在鞅方法下,欧式看涨期权的价格等于期权被执行时(即股票期末价格大于期权的敲定价),股票期末价与期权敲定价之差在等价鞅测度下的数学期望• 等价鞅测度即为使股票折现价格过程为鞅的概率测度,通常不一定是股票价格过程的实际概率测度• 当金融市场是有套利、非均衡(等价鞅测度不存在)或不完备(等价鞅测度存在但不唯一)鞅方法将不能使用• 保险精算方法将期权定价问题转化为等价的公平保费确定问题,由于无任何经济假设,所以它不仅对无套利、均衡、完备的市场有效,且对有套利、非均衡、不完备的市场也有效• 本文用股票价格的实际概率测度和公平保费原则推广了 Mogens Bladt 和 Tina Hviid Rydberg[4] 的结果,将期权定价问题转化为等价的公平保费确定问题,在无中间红利和有中间红利两种情况下,把 Black_Scholes 模型推广到无风险资产(债券或银行存款)具有时间相依的利率 $r(t)$ 和风险资产(股票)具有时间相依的连续复利预期收益率 $\mu(t)$ 和波动率 $\sigma(t)$ 的情况,在此情况下获得了欧式期权的精确定价公式以及买权与卖权之间的平价关系• 给出了风险资产(股票)的连续复利预期收益率为 $\mu(S(t))$ 和波动率为 $\sigma(S(t))$ 的广义 Black_Scholes 模型的期权定价的一般方法• 利用保险精算方法给出了股票价格遵循广义 Ornstein_Uhlenback 过程模型的欧式期权的精确定价公式和买权与卖权之间的平价关系•

1　模型的建立

我们考虑由两类资产(证券)组成的连续贸易金融市场,一种是在 t 时刻具有瞬时无风险利率为 $r(t)$ 的无风险资产(如债券);另一类为风险资产(如股票),在 t 时刻其价格为 $S(t)$,考虑的时间区间为 $[0, T]$,0 表示为初始时间,T 表示为到期日,$\{S(t): t \geqslant 0\}$ 是定义在给定的滤子化完备概率空间 $(\Omega, F, F(t)_{t\geqslant 0}, P)$ 上的随机过程,$\{F_t: t \geqslant 0\}$ 是由 $S(t)$ 产生的自然滤子,假设 $S(0) = S$ 是大于零的常数• 有关期权保险精算定价的概念沿袭文[4]•

定义 1.1　随机过程 $\{S(t): t \geqslant 0\}$ 在 $[0, t]$ 区间上产生的期望收益率 $\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s$ 被定义为

$$\mathrm{e}^{\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s} = \frac{ES(t)}{S}, \tag{1}$$

其中,$\beta(t)$ 为 t 时刻 $S(t)$ 的连续复利收益率•

债券价格 $P(t)$ 满足方程:

$$\mathrm{d}P(t) = P(t)r(t)\mathrm{d}t,\quad P(T) = 1, \tag{2}$$

其中 $r(t)$ 是 t 时刻 $P(t)$ 瞬时利息率• 假设 $\beta(t)$ 和 $r(t)$ 是 $\{F_t: t \geqslant 0\}$ 适应的,且 $\int_0^T r(t)\mathrm{d}t < \infty$,$\int_0^T \beta(t)\mathrm{d}t < \infty$•

设 $C(k, T)$ 和 $P(k, T)$ 分别表示以股票价格 $S(t)$ 为标的资产,执行价为 k,到期日为 T 的欧式买权和卖权的保险精算定价• $C^*(k, T)$ 和 $P^*(k, T)$ 为相应的鞅方法期权定价•

定义 1.2　欧式期权的保险精算价值定义为:当期权被执行时,股票到期日的折现值与执行价的折现值的差,在股票价格实际分布的概率测度下的数学期望值• 资产的折现价的计算方法如下:无风险资产(确定的)按无风险利率折现,风险资产(随机的)按其期望收益率(定义如(1))折现• 欧式期权在到期日被执行的充要条件是:

欧式买权为 $\exp\left\{-\int_0^T\beta(t)\,\mathrm{d}t\right\}S_T>\exp\left\{-\int_0^T r(t)\,\mathrm{d}t\right\}k$,

欧式卖权为 $\exp\left\{-\int_0^T\beta(t)\,\mathrm{d}t\right\}S_T<\exp\left\{-\int_0^T r(t)\,\mathrm{d}t\right\}k$•

设 $C(k,T)$ 和 $P(k,T)$ 分别表示欧式看涨和看跌期权的保险精算定价, 由上述定义得

$$C(k,T)=E\left[\left(\exp\left\{-\int_0^T\beta(t)\,\mathrm{d}t\right\}S(T)-\exp\left\{-\int_0^T r(t)\,\mathrm{d}t\right\}k\right)I\left\{\exp\left\{-\int_0^T\beta(t)\,\mathrm{d}t\right\}S(T)>\exp\left\{-\int_0^T r(t)\,\mathrm{d}t\right\}k\right\}\right],\tag{3}$$

$$P(k,T)=E\left[\left(\exp\left\{-\int_0^T r(t)\,\mathrm{d}t\right\}k-\exp\left\{-\int_0^T\beta(t)\,\mathrm{d}t\right\}S(T)\right)I\left\{\exp\left\{-\int_0^T r(t)\,\mathrm{d}t\right\}k>\exp\left\{-\int_0^T\beta(t)\,\mathrm{d}t\right\}S(T)\right\}\right]•\tag{4}$$

注 1) 定义 1.2 中, 没有对金融市场和价格过程作任何限制• 计算期权价格时只利用了价格过程在期末时的实际概率分布和公平保费原理, 克服了鞅方法定价中寻找等价鞅测度的困难• 所以保险精算定价对非均衡, 不完备金融市场也适用•

2) 期权的保险精算定价与传统的无套利定价有许多本质的区别: 保险精算定价中欧式买权执行条件为 $\exp\left\{-\int_0^T\beta(t)\,\mathrm{d}t\right\}S(T)>\exp\left\{-\int_0^T r(t)\,\mathrm{d}t\right\}k$ 而不是 $S(T)>k$; 在鞅方法定价中, 当期权被执行时, 即 $S(T)>k$ 欧式期权的价值等于股票期末价与期权执行价之差在等价鞅测度下的数学期望• 对完备的金融市场, 即市场存在唯一的等价鞅测度 Q, 传统的鞅方法给出欧式期权的无套利定价为:

$$C^*(k,T)=E^Q\left\{\exp\left\{-\int_0^T r(t)\,\mathrm{d}t\right\}[S(T)-k]^+\right\},\tag{5}$$

$$P^*(k,T)=E^Q\left\{\exp\left\{-\int_0^T r(t)\,\mathrm{d}t\right\}[k-S(T)]^+\right\}•\tag{6}$$

3) 当 $\{S(t):t\geqslant 0\}$ 是几何 Brown 运动时, 欧式期权的保险精算定价和鞅方法定价是一致的, 两种方法都可得到 Black_Scholes 公式• (文[4]中的性质 2.1 和定理 2.1)• 当 $\{S(t):t\geqslant 0\}$ 是指数 Levy 过程时, 保险精算定价与鞅方法定价都是无套利的•

2 广义 Black_Scoles 模型

本节我们假设风险资产(股票)的价格过程 $\{S(t):t\geqslant 0\}$ 和无风险资产的价格过程 $\{P(t):t\geqslant 0\}$ 分别满足:

$$\mathrm{d}S(t)=S(t)\mu(t)\,\mathrm{d}t+S(t)\sigma(t)\,\mathrm{d}B,\quad S(0)=S,\tag{7}$$

$$\mathrm{d}P(t)=P(t)r(t)\,\mathrm{d}t,\quad P(T)=1,\tag{8}$$

其中 $B(t)$ 表示定义在完备概率空间 (Ω,F,P) 上的标准 Brown 运动• $S(0)=S$, S 是大于零的常数, $\mu(t)$, $r(t)$, $\sigma(t)$ 是 $[0,\infty)\to\mathbf{R}$ 上的函数, 且满足

$$\int_0^T\mu(t)\,\mathrm{d}t<\infty,\quad\int_0^T r(t)\,\mathrm{d}t<\infty,\quad\int_0^T\sigma^2(t)\,\mathrm{d}t<\infty•\tag{9}$$

2.1 标的资产不支付中间红利

定理 2.1 假设 $\{S(t):t\geqslant 0\}$, $\{P(t):t\geqslant 0\}$ 满足方程(7)、(8) 且风险资产在有效期内无红利支付, 则

$$1)\quad C(k,T)=SN(d_1)-k\exp\left\{-\int_0^T r(t)\,\mathrm{d}t\right\}N(d_2),\tag{10}$$

2) $P(k,T) = k\exp\left\{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t\right\}N(-d_2) - SN(-d_1)$, (11)

3) $C(k,T) + k\exp\left\{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t\right\} = S + P(k,T)$, (12)

其中

$$d_1 = d_2 + \sqrt{\int_0^T \sigma^2(t)\mathrm{d}t},$$

$$d_2 = \frac{\ln\frac{S}{k} + \int_0^T r(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^T \sigma^2(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{\int_0^T \sigma^2(t)\mathrm{d}t}},$$

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}\mathrm{d}y,$$

($N(x)$ 表示标准正态随机变量的分布函数)

证明　由 Itô 引理随机微分方程(7)有唯一解

$$S(t) = S\exp\left\{\int_0^t \left(\mu(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s)\mathrm{d}B(s)\right\}\cdot \tag{13}$$

特别由(13)可得

$$S(T) = S\exp\left\{\int_0^T \left(\mu(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)\mathrm{d}s + \int_0^T \sigma(s)\mathrm{d}B(s)\right\},$$

注意到

$$\int_0^T \sigma(s)\mathrm{d}B(s) \sim N\left(0, \int_0^T \sigma^2(s)\mathrm{d}s\right)$$

从而

$$\ln\left(\frac{S_T}{S}\right) \sim N\left(\int_0^T \left(\mu(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)\mathrm{d}s, \int_0^T \sigma^2(s)\mathrm{d}s\right),$$

由
$$S(T) = S\exp\left\{\int_0^T \left(\mu(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)\mathrm{d}s + \int_0^T \sigma(s)\mathrm{d}B(s)\right\}$$

和
$$\int_0^T \sigma(s)\mathrm{d}B(s) \sim N\left(0, \int_0^T \sigma^2(s)\mathrm{d}s\right),$$

我们可得

$$ES(T)/S = \exp\left\{\int_0^T \mu(s)\mathrm{d}s\right\}\cdot$$

由定义 1.1 知 $\int_0^T \mu(s)\mathrm{d}s$ 是价格过程 $\{S(t): t \geqslant 0\}$ 在区间 $[0, T]$ 上的期望收益率· 注意到

$$\exp\left\{-\int_0^T \mu(s)\mathrm{d}s\right\}S(T) > \exp\left\{-\int_0^T r(s)\mathrm{d}s\right\}k$$

等价于

$$\frac{\int_0^T \sigma(s)\mathrm{d}B(s)}{\sqrt{\int_0^T \sigma^2\mathrm{d}(s)}} > -\frac{\ln\frac{S}{k} + \int_0^T \left(r(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\mathrm{d}s\right)}{\sqrt{\int_0^T \sigma^2\mathrm{d}(s)}},$$

令
$$d_2 = \frac{\ln\frac{S}{k} + \int_0^T \left(r(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)\mathrm{d}s}{\sqrt{\int_0^T \sigma^2(s)\mathrm{d}(s)}},$$

由
$$\frac{\int_0^T \sigma(s)\,\mathrm{d}B(s)}{\sqrt{\int_0^T \sigma^2(s)\,\mathrm{d}s}} \sim N(0,1),$$
可得
$$\mathrm{E}\left[\exp\left\{-\int_0^T \mu(s)\,\mathrm{d}s\right\} S_T I\left\{\exp\left\{-\int_0^T \mu(s)\,\mathrm{d}s\right\} S(T) > \exp\left\{-\int_0^T r(s)\,\mathrm{d}s\right\} k\right\}\right] =$$
$$\int_{-d_2}^{\infty} S\exp\left\{\frac{\left[y-\sqrt{\int_0^T \sigma^2(s)\,\mathrm{d}s}\right]^2}{2}\right\}\mathrm{d}y = SN\left(d_2+\sqrt{\int_0^T \sigma^2(s)\,\mathrm{d}s}\right),$$
$$\mathrm{E}\left[\exp\left\{-\int_0^T r(s)\,\mathrm{d}s\right\} kI\left\{\exp\left\{-\int_0^T \mu(s)\,\mathrm{d}s\right\} S_T > \exp\left\{-\int_0^T r(s)\,\mathrm{d}s\right\} k\right\}\right] =$$
$$\exp\left\{-\int_0^T r(s)\,\mathrm{d}s\right\} kN(d_2)。$$
由公式(3)可得(10)式。类似于(10),可证(11)和(12)式。

注　1) 公式(10),(11),(12)与投资者的预期收益率 $\mu(t)$ 无关,所以该定价对任意投资者来讲是公平的。

2) 如果 $r(t)$, $\sigma(t)$ 是常数,则公式(10)和(11)就是通常的 Black_Scholes 公式。

2.2　标的资产支付中间红利

假设风险资产股票的价格过程 $\{S(t): t \geqslant 0\}$ 满足(7)式,在 t 时刻以瞬时红利率 $\rho(t)$ 支付红利,这里连续函数 $\rho(t): [0,\infty) \to \mathbf{R}$, $\int_0^T \rho(t)\,\mathrm{d}t < \infty$ 定义了一个累积红利过程 $D(t) = \int_0^t \rho(s)\,\mathrm{d}s$,在现在时刻,股票价值 $S(0)$ 由两部分组成:$S(0)\left[1-\exp\left\{-\int_0^T \rho(s)\,\mathrm{d}s\right\}\right]$ 是作为红利在到期日之前发放的,是无风险的;$S(0)\exp\left\{-\int_0^T \rho(s)\,\mathrm{d}s\right\}$ 是股票在到期日的价值 $S(T)$ 的现值,是有风险的。所以定理 2.1 中风险资产的现值应为 $S(0)\exp\left\{-\int_0^T \rho(s)\,\mathrm{d}s\right\}$,我们用 $S\exp\left\{-\int_0^T \rho(s)\,\mathrm{d}s\right\}$ 代替定理 2.1 中的 S 得如下结论。

定理 2.2　假设 $\{S(t): t \geqslant 0\}$, $\{P(t): t \geqslant 0\}$ 满足方程(7)和(8)且风险资产在有效期内 t 时刻以瞬时红利率 $\rho(t)$ 支付红利,则

1) $$C(k,T) = S\exp\left\{-\int_0^T \rho(s)\,\mathrm{d}s\right\}N(d_1^*) - k\exp\left\{-\int_0^T r(s)\,\mathrm{d}s\right\}N(d_2^*), \tag{14}$$

2) $$P(k,T) = k\exp\left\{-\int_0^T r(s)\,\mathrm{d}s\right\}N(-d_2^*) - S\exp\left\{-\int_0^T \rho(s)\,\mathrm{d}s\right\}N(-d_1^*), \tag{15}$$

3) $$C(k,T) + k\exp\left\{-\int_0^T r(s)\,\mathrm{d}s\right\} = S\exp\left\{-\int_0^T \rho(s)\,\mathrm{d}s\right\} + P(k,T), \tag{16}$$

其中
$$d_1^* = d_2^* + \sqrt{\int_0^T \sigma^2(s)\,\mathrm{d}s},$$
$$d_2^* = \frac{\ln\frac{S}{k} + \int_0^T\left[r(s) - \rho(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right]\mathrm{d}s}{\sqrt{\int_0^T \sigma^2(s)\,\mathrm{d}s}}。$$

注　1) 期权定价公式(14)、(15)、(16)都与投资者对股票的预期收益率 $\mu(t)$ 无关，所以该定价对任意投资者是公平的•

2) 如果 $r(t),\sigma(t),\rho(t)$ 是常数，则公式(14)和(15)就是通常的有红利支付情况下的 Black_Scholes 公式•

3) 定理 2.1 和定理 2.2 也可由期权定价的鞅方法证明([5]，[6])•

3　随机波动率的广义 Black_Scholes 模型

本节我们假设风险资产的价格过程 $\{S(t): t\geqslant 0\}$ 遵循 Itô 方程

$$\mathrm{d}S(t)=\mu(S(t))\mathrm{d}t+\sigma(S(t))\mathrm{d}B(t)\qquad(S(0)=S,S>0),\tag{17}$$

其中，$\{B(t): t\geqslant 0\}$ 表示定义在完备概率空间 (Ω,F,P) 上的标准 Brown 运动，漂移项 $\mu(\cdot)\in C^1(\mathbf{R})$，扩散项 $\sigma(\cdot)\in C^2(\mathbf{R})$ ($C^n(\mathbf{R})$ 表示 $\mathbf{R}$ 上的 n 阶连续可导函数类，$C(\mathbf{R})$ 表示 $\mathbf{R}$ 上的有界连续函数类)•　方程(17)的解依赖于时间 t，漂移项 $\mu(\cdot)$，扩散项 $\sigma(\cdot)$ 以及标准 Brown 运动 $\{B(t): t\geqslant 0\}$•　假设 $\sigma(\cdot)\in C^2(\mathbf{R})$ 和 $\mu(\cdot)$ 满足 Lipschitz 条件，Kouritzin 和 Li[7] 证明了方程(17)有唯一强解，并且可表示为

$$S(t)=\varphi\left(S,t,\int_0^t f(s)\mathrm{d}B(s)\right),\tag{18}$$

其中 $f(\cdot)\in C(\mathbf{R})$，且 $(t,u)\to\varphi(s,t,u)\in C^{1,2}(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R})$，特别对给定的扩散项 $\sigma(\cdot)$ 方程(17)有唯一的可表示为 $S(t)=\varphi\left(S,t,\int_0^t f(s)\mathrm{d}B(s)\right)$ 的显式解•

引理 3.1　1) 给定扩散项 $\sigma(\cdot)\in C^1(\mathbf{R})$ 满足

$$\sigma(x)\neq 0\ (\forall x\in\mathbf{R})\ \text{和}\ \int_{-\infty}^0\frac{\mathrm{d}x}{|\sigma(x)|}=\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}x}{|\sigma(x)|}=\infty,\tag{19}$$

则对任意常数 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ 和 $\Lambda(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}z}{|\sigma(z)|}$，$x\in\mathbf{R}$，随机微分方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}S(t)=\left(\alpha-\beta\Lambda(S(t))+\dfrac{1}{2}\sigma'(S(t))\right)\sigma(S(t))\mathrm{d}t+\sigma(S(t))\mathrm{d}B(t),\\ S(0)=S,\ S>0\end{cases}\tag{20}$$

有唯一强解

$$S(t)=\Lambda^{-1}\left(\frac{\int_0^t\exp\{\beta s\}\mathrm{d}B(s)+\alpha\int_0^t\exp\{\beta s\}\mathrm{d}s+\Lambda(S)}{\exp\{\beta t\}}\right)•\tag{21}$$

2) 设 $\sigma(\cdot)\in C^1(\mathbf{R})$ 满足

$\sigma(x)=0$ 当且仅当 $x=0$，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sigma(x)}{x}=r\neq 0,\ \int_{-\infty}^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{|\sigma(x)|}=\int_{+1}^\infty\frac{\mathrm{d}x}{|\sigma(x)|}=\infty,\tag{22}$$

则对任意常数 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，Itô 方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}S(t)=\left(\dfrac{\sigma(S(t))}{r}\left(\alpha-\beta\ln|\Psi(S(t))|\right)+\dfrac{1}{2}\sigma'(S(t))\sigma(S(t))\right)\mathrm{d}t+\\ \qquad\sigma(S(t))\mathrm{d}B(t),\\ S(0)=S,\ S>0\end{cases}\tag{23}$$

有非爆炸性强解

$$S(t)=\Psi^{-1}\left(\exp\left\{\frac{r\int_0^t\exp\{\beta s\}\mathrm{d}B(s)+\left(\ln|\Psi(S)|+\alpha\int_0^t\exp\{\beta s\}\mathrm{d}s\right)}{\exp\{\beta s\}}\right\}\right),\tag{24}$$

其中 $\Psi(\cdot)$ 定义为

$$\Psi(x) \hat{=} x\exp\left\{\int_0^x \frac{rz-\sigma(z)}{z\sigma(z)}\mathrm{d}z\right\} \qquad (x \in \mathbf{R}) \cdot \tag{25}$$

引理 3.1 的证明参见[7]•

由引理 3.1 知, 存在基本的 Itô 方程类(如(20)和(23))有显式解

$$S(t)=\varphi\left(S, t, \int_0^t f(s)\mathrm{d}B(s)\right), \quad \varphi(S, 0, 0)=S, \tag{26}$$

其中 $f(\cdot)$ 是连续实值函数• 而在一般的假设条件下有 $\int_0^t f(s)\mathrm{d}B(s) \sim N\left(0, \int_0^t f^2(s)\mathrm{d}s\right)$, 设 $\Phi(x)$ 是标准正态分布的概率密度函数• 由(26)式可得

$$\exp\left\{\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s\right\}=\frac{ES(t)}{S}=\frac{1}{S}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(S, t, x\sqrt{\int_0^t f^2(s)\mathrm{d}s}\right)\Phi(x)\mathrm{d}x \cdot \tag{27}$$

由定义 1.2 可得, 以 $S(t)$ 为标的资产的欧式期权定价公式•

当股票价格 $S(t)$ 满足方程(20)和(23)时, 以 $S(t)$ 为标的资产的欧式期权定价方法如下:

首先, 由引理 3.1 求方程(20)和(23)的显式解 $S(t)=\varphi\left(S, t, \int_0^t f(s)\mathrm{d}B(s)\right)$;

其次, 计算 $S(t)$ 在 $[0, t]$ 内的期望收益率 $\exp\left\{\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s\right\}=ES(t)/S$,

最后, 由定义 1.2 可求得以 $S(t)$ 为标的资产的欧式期权的定价公式•

例 3.1 广义 Ornstein_Uhlenback 模型

假设风险资产的价格过程 $S(t)$ 满足随机微分方程(SDE)

$$\mathrm{d}S(t)=S(t)(\mu-\alpha\ln S(t))\mathrm{d}t+S(t)\sigma\mathrm{d}B \qquad (S(0)=S), \tag{28}$$

其中, $\sigma>0$, μ, α 是任意常数, S 是大于零的常数• 称上述价格过程模型为广义 Ornstein_Uhlenack 模型•

显然, 在方程(28)中扩散项 $\sigma(x)=\sigma\cdot x$ 满足引理 3.1 的条件(22)且相应的 $\Psi(x)=x$• 则由引理 3.1 随机微分方程(28)有非爆炸性强解

$$S(t)=S^{\exp\{-\alpha t\}}\exp\left\{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha s}\mathrm{d}s+\sigma\mathrm{e}^{-\alpha t}\int_0^t \mathrm{e}^{\alpha s}\mathrm{d}B(s)\right\}, \tag{29}$$

且

$$ES(t)=S^{\exp\{-\alpha t\}}\exp\left\{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha s}\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\sigma^2\int_0^t \mathrm{e}^{-2\alpha s}\mathrm{d}s\right\} \cdot$$

由定义 1.1 可得

$$\exp\left\{\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s\right\}=S^{\exp\{-\alpha t\}-1}\exp\left\{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha s}\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\sigma^2\int_0^t \mathrm{e}^{-2\alpha s}\mathrm{d}s\right\} \cdot \tag{30}$$

类似于定理 2.1 和定理 2.2 的证明可得如下定理•

定理 3.1 设 $\{S(t): t \geqslant 0\}$, $\{P(t): t \geqslant 0\}$ 分别满足方程(28)和(8), 风险资产在有效期内无红利支付, 则

$$1)\ C(k, T)=SN\left(d+\sigma\sqrt{\int_0^T \mathrm{e}^{-2\alpha s}\mathrm{d}s}\right)-kN(d)\exp\left\{-\int_0^T r(s)\mathrm{d}s\right\}, \tag{31}$$

$$2)\ P(k, T)=kN(-d)\exp\left\{-\int_0^T r(s)\mathrm{d}s\right\}-SN\left(-d-\sigma\sqrt{\int_0^T \mathrm{e}^{-2\alpha s}\mathrm{d}s}\right), \tag{32}$$

$$3)\ P(k, T)+S=C(k, T)+k\exp\left\{-\int_0^T r(s)\mathrm{d}s\right\}, \tag{33}$$

其中

$$d=\frac{\ln\frac{S}{k}+\int_0^T r(s)\,\mathrm{d}s-\frac{\sigma^2}{2}\int_0^T \mathrm{e}^{-2\alpha s}\,\mathrm{d}s}{\sigma\sqrt{\int_0^T \mathrm{e}^{-2\alpha s}\,\mathrm{d}s}},\quad N(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}\mathrm{d}y.$$

注 1) 当 $\alpha\to 0+$, $r(t)$ 常数时,公式(31)、(32)就是著名的 Black_Scholes 公式.

2) $C(k,T)$ 和 $P(k,T)$ 与方程(28)中的漂移项 μ 无关.

定理 3.2 设 $\{S(t):t\geqslant 0\}$, $\{P(t):t\geqslant 0\}$ 满足方程(28)和(8),且风险资产在有效期内 t 时刻以瞬时红利率 $\rho(t)$ 支付红利, $\int_0^T \rho(t)\,\mathrm{d}t<\infty$, 则

$$1)\ C(k,T)=SN\left(d^*+\sigma\sqrt{\int_0^T \mathrm{e}^{-2\alpha s}\,\mathrm{d}s}\right)\exp\left\{-\int_0^T\rho(s)\,\mathrm{d}s\right\}-kN(d^*)\exp\left\{-\int_0^T r(s)\,\mathrm{d}s\right\},\tag{34}$$

$$2)\ P(k,T)=kN(-d^*)\exp\left\{-\int_0^T r(s)\,\mathrm{d}s\right\}-SN\left(-d^*-\sigma\sqrt{\int_0^T \mathrm{e}^{-2\alpha s}\,\mathrm{d}s}\right)\exp\left\{-\int_0^T\rho(s)\,\mathrm{d}s\right\},\tag{35}$$

$$3)\ P(k,T)+S\exp\left\{-\int_0^T\rho(s)\,\mathrm{d}s\right\}=C(k,T)+k\exp\left\{-\int_0^T r(s)\,\mathrm{d}s\right\},\tag{36}$$

其中

$$d^*=\frac{\ln\frac{S}{k}+\int_0^T(r(s)-\rho(s))\,\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\sigma^2\int_0^T \mathrm{e}^{-2\alpha s}\,\mathrm{d}s}{\sigma\sqrt{\int_0^T \mathrm{e}^{-2\alpha s}\tau\,\mathrm{d}s}}.\tag{37}$$

注 1) 当 $\alpha\to 0+$, $r(t)$, $\rho(t)$ 为常数时,公式(34)、(35)是有红利支付的 Black_Scholes 公式.

2) $C(k,T)$ 和 $P(k,T)$ 与方程(28)中的漂移项 μ 无关.

3) 定理 3.1 和定理 3.2 可推广到更一般的广义 Ornstein_Uhlenback 过程模型,即漂移系数 μ 和扩散项 σ 是依赖于时间 t 的函数.

[参 考 文 献]

[1] Merton R. Optimum consumption and portfolio rules in continuous time model[J]. Journal of Economic Theory, 1971, **3**(3): 373—413.

[2] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy, 1973, **81**(4): 633—654.

[3] Duffie D. Security Markets: Stochastic Models[M]. Boston: Academic Press, 1988.

[4] Bladt M, Rydberg H T. An actuarial approach to option pricing under the physical measure and without market assumptions[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 1998, **22**(1): 65—73.

[5] Duffie D. Dynamic Asset Pricing Theory[M]. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1996.

[6] Merton R. Continuous_Time Finance[M]. Oxford: Blacwell Publishers, 1990.

[7] Kouritzin M A, Deli Li. On explicit solution to stochastic differential equation[J]. Stochastic Analysis and Applications, 2000, **18**(4): 571—580.

[8] 薛宏. 鞅方法在未定权益定价中的应用[J]. 工程数学学报, 2000, **17**(1): 135_138.

[9] Roos Cox J C, Rubinstein S A. Option pricing: A simplified approach[J]. Journal of Economics, 1979, **7**(2): 229—263.
[10] Bernt, Φksendal. Stochasitc Differential Equations[M]. Fourth Ed. New York: Springer_Verlag, 1995.

New Method to Option Pricing for the General Black_Scholes Model —An Acturarial Approach

YAN Hai_feng[1,2], LIU San_yang[1]
(1. Department of Applied Mathematics, Xidian University, Xi' an 710071, P.R.China;
2. Department of Mathematics, Henan Normal University, Xinxiang, Henan 453002, P.R.China)

Abstract: Using physical probability measure of price process and the principle of fair premium, the results of Mogens Bladt and Hina Hviid Rydberg are generalized. In two cases of paying intermediate divisends and no intermediate dividends, the Black_Scholes model is generalized to the case where the riskless asset (bond or bank account) earns a time_dependent interest rate and risky asset (stock) has time_dependent the continuously compounding expected rate of return, volatility. In these cases the accurate pricing formula and put_call parity of European option are obtained. The general approach of option pricing is given for the general Black_Scholes of the risk asset (stock) with a stochastic continuously compounding expected rate of return, volatility. The accurate pricing formula and put_call parity of European option on a stock whose price process is driven by general Ornstein_Uhlenback process are given by actuarial approach.

Key words: option pricing; Black_Scholes model; fair premium; O_U process