

文章编号: 1000-0887(2003) 07-0747-08

符号空间的拟移位和 M^L -bicus 带上的 奇怪吸引子*

陈芳跃^{1,2}, 陈凤娟²

(1. 上海大学 数学系, 上海 200436;

2. 浙江师范大学 数学系, 浙江 金华 321004)

(刘曾荣推荐)

摘要: 给出了双边符号空间上的一种新的拟移位映射, 得到了它与传统的移位映射拓扑共轭。类似 Smale 马蹄, 对这种拟移位映射给出了一个模型, 即在 M^L -bicus 带上给出一类映射。同时刻划了这类映射的吸引子的结构及动力学行为。

关键词: 拟移位映射; M^L -bicus 带; 混沌; 奇怪吸引子

中图分类号: O189.11 文献标识码: A

引言

1967 年, Smale 构造了影响深远的马蹄(Horseshoe)模型, 并成功地运用符号空间上的移位映射刻划了它的丰富的动力学性质^[1]。由此引发了众多学者对符号动力系统的研究。人们不断发现许多复杂的自映射存在子系统 (X, f) 与 (Σ, σ) 拓扑共轭。其中 Σ 为相应的符号空间, σ 为移位映射。

然而, 符号空间上的自映射不仅限于移位(包括有限子移位), 已有一些文献给出了称之为拟移位或部分变号移位的自映射, 并用它们刻划了某些自映射的动力学性质^[2,3]。

设由符号 $\{0, 1\}$ 构成的单边符号空间为 Σ , 即 $\Sigma = \prod_{i=0}^{+\infty} \{0, 1\}$ 在 Σ 上定义拟移位映射 $\tau_1: \Sigma$

$$\rightarrow \Sigma \cdot \forall a = (a_0 a_1 a_2 \dots) \in \Sigma,$$
$$\tau_1(a) = \begin{cases} (a_1 a_2 a_3 \dots) & (\text{当 } a_0 = 0), \\ (\hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3 \dots) & (\text{当 } a_0 = 1). \end{cases}$$

其中 \hat{a}_i 为 a_i 的对称元, 即

$$\hat{a}_i = \begin{cases} 0 & (\text{当 } a_i = 1), \\ 1 & (\text{当 } a_i = 0). \end{cases}$$

文[2]用该类映射描述了 Cantor 集及平面 Cantor 集上的混沌映射。

文[3]给出了由符号 $\{0, 1\}$ 构成的双边符号空间

* 收稿日期: 2002_01_17; 修订日期: 2003_02_23

作者简介: 陈芳跃(1956—), 男, 浙江磐安人, 教授, 博士(E-mail: jhcfy@mail.jhptt.zj.cn);
陈凤娟(1971—), 女, 浙江诸暨人, 硕士, 讲师(E-mail: chengfj@mail.zjnu.net.cn)。

$$\Sigma_2 = \prod_{l=-\infty}^{+\infty} \{0, 1\}$$

上的拟移位映射: $\tau_2: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$.

对 $a = (\dots a_{-n} \dots a_{-1} a_0 a_1 \dots a_n \dots) \in \Sigma_2$

$$\tau_2(a) = \begin{cases} (\dots a_{-n} \dots a_{-1} a_0 a_1 a_2 \dots a_n \dots) & (\text{当 } a_0 = 0), \\ (\dots \hat{a}_{-n} \dots \hat{a}_{-1} a_0 \hat{a}_1 \hat{a}_2 \dots \hat{a}_n \dots) & (\text{当 } a_0 = 1), \end{cases}$$

并用 τ_2 描述了经典的 Smale 马蹄映射, 且证明了 (Σ_2, τ_2) 与移位映射 (Σ_2, σ) 拓扑共轭.

在本文中, 我们在 Σ_2 上定义一种新的拟移位映射:

定义 1 对 $a = (\dots a_{-n} \dots a_{-1} a_0 a_1 \dots a_n \dots) \in \Sigma_2$, $\tau: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$,

$$\tau(a) = \begin{cases} (\dots a_{-n} \dots a_{-1} a_0 a_1 a_2 \dots a_n \dots) & (\text{当 } a_0 = 0), \\ (\dots \hat{a}_{-n} \dots \hat{a}_{-1} a_0 a_1 a_2 \dots a_n \dots) & (\text{当 } a_0 = 1), \end{cases} \quad (1)$$

τ 称为符号空间 Σ_2 的拟移位映射, 其中 a_i 的对称元 \hat{a}_i 意义同上.

我们的主要结果是, 如此定义的 τ (Σ_2, τ) 与 (Σ_2, σ) 拓扑共轭. 同时, 类似 Smale 马蹄映射, 我们对 τ 给出了一个模型, 即在 $M^{\text{L}^{\text{bius}}}$ 带上给出一个映射 F , 存在 F 的吸引不变集 Λ , 并且证明了子系统 $(\Lambda, F|_{\Lambda})$ 与 (Σ_2, τ) 拓扑共轭, 从而说明 Λ 是一个奇怪吸引子.

1 (Σ_2, τ) 与 (Σ_2, σ) 拓扑共轭

为方便计, 我们用两个符号 $\{1, -1\}$ 代替符号 $\{0, 1\}$, 其中以 1 代替 0, -1 代替 1. 设 $s = (\dots s_{-n} \dots s_{-2} s_{-1} s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma_2$, 定义 $\xi: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ 为,

$$\xi(s)_i = \begin{cases} s_{i+1} & (\text{当 } i \geq 1), \\ s_0 \times s_{i+1} & (\text{当 } i \leq 2), \end{cases}$$

这里 $\xi(s)_i$ 为 $\xi(s)$ 的第 i 个元素, 即

$$\xi(s) = (\dots (s_0 \times s_{-n}) \dots (s_0 \times s_{-2}) (s_0 \times s_{-1}) s_0 s_1 s_2 \dots s_n \dots). \quad (2)$$

(“ \times ”为传统意义上的乘号). 显然在现在的记号下, ξ 与(1)式定义的 τ 是相同的.

定理 1 (Σ_2, τ) 与 (Σ_2, σ) 拓扑共轭.

证明 在 Σ_2 上定义距离为

$$d(s, t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(s_j, t_j)}{2^{|j|}} \quad (3)$$

其中 $\delta(s_j, t_j) = \begin{cases} 0 & (\text{当 } s_j = t_j), \\ 1 & (\text{当 } s_j \neq t_j). \end{cases}$

作 $\eta: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$, 对于 $s = (\dots s_{-n} \dots s_{-3} s_{-2} s_{-1} s_0 s_1 \dots s_n \dots) \in \Sigma_2$, 记 $\eta(s)_i$ 为其第 i 个元素,

$$\eta(s)_i = \begin{cases} s_i & (\text{当 } i \geq 1), \\ s_i \times s_{i+1} & (\text{当 } i \leq 2) \end{cases}$$

即 $\eta(s) = (\dots (s_{-n} \times s_{-n+1}) \dots (s_{-3} \times s_{-2}) (s_{-2} \times s_{-1}) s_{-1} s_0 s_1 \dots s_n \dots). \quad (4)$

容易看出 η 是个一一映射. 下证 η 的连续性.

设 $s = (\dots s_{-n} \dots s_{-2} s_{-1} s_0 s_1 \dots s_n \dots)$, $t = (\dots t_{-n} \dots t_{-2} t_{-1} t_0 t_1 \dots t_n \dots) \in \Sigma_2$,

有 $\eta(s) = (\dots (s_{-n} \times s_{-n+1}) \dots (s_{-3} \times s_{-2}) (s_{-2} \times s_{-1}) s_{-1} s_0 s_1 \dots s_n \dots),$

$$\eta(t) = (\dots (t_{-n} \times t_{-n+1}) \dots (t_{-3} \times t_{-2}) (t_{-2} \times t_{-1}) t_{-1} t_0 t_1 \dots t_n \dots),$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{Z}^+,$ 使得 $1/2^N < \varepsilon$. 当 $d(s, t) < 1/2^{N+1}$ 时, 由 d 的定义(3) 可得, 对 $|i| \leq N+1,$ 有 $s_i = t_i$. 所以, 当 $-N \leq i \leq -2$ 时, 有 $s_i = t_i$ 及 $s_{i+1} = t_{i+1}$. 于是此时有 $s_i \times s_{i+1} = t_i \times t_{i+1}$. 而当 $-1 \leq i \leq N$ 时, 显然有 $s_i = t_i$. 仍由(3) 式, 有 $d(\eta(s), \eta(t)) \leq 1/2^N < \varepsilon$. 即取 $\delta = 1/2^{N+1},$ 当 $d(s, t) < \delta$ 时, 有 $d(\eta(s), \eta(t)) < \varepsilon$. 类似可得 η^{-1} 的连续性. 故 η 为 Σ_2 到自身的同胚.

于是, 对 $\forall s = (\dots s_{-3} s_{-2} s_{-1} s_0 s_1 s_2 s_3 \dots) \in \Sigma_2,$

$$\begin{aligned} \eta(\xi(s)) &= \eta(\dots(s_0 \times s_{-3})(s_0 \times s_{-2})(s_0 \times s_{-1}) s_0 s_1 s_2 s_3 \dots) = \\ &= (\dots(s_0^2 \times s_{-3} \times s_{-2})(s_0^2 \times s_{-2} \times s_{-1})(s_0^2 \times s_{-1}) s_0 s_1 s_2 s_3 \dots) = \\ &= (\dots(s_{-3} \times s_{-2})(s_{-2} \times s_{-1}) s_{-1} s_0 s_1 s_2 s_3 \dots) = \\ &= \sigma(\dots(s_{-3} \times s_{-2})(s_{-2} \times s_{-1}) s_{-1} s_0 s_1 s_2 \dots) = \sigma(\eta(s)) \end{aligned}$$

即 (Σ_2, σ) 与 (Σ_2, ξ) 拓扑共轲, 因而 (Σ_2, σ) 与 (Σ_2, τ) 拓扑共轲. 证毕.

2 M^L-bius 带上的奇怪吸引子

设 M^L-bius 带表示为

$$M = \left\{ (x, p) \mid x \pmod{1} \in [0, 1), p = r e^{j\omega x}, -\frac{1}{2} \leq r \leq \frac{1}{2} \right\}, \quad (5)$$

把 M 看作由两部分 M_0 和 M_1 组成:

$$M_0 = \left\{ (x, p) \mid (x, p) \in M, 0 \leq x < \frac{1}{2} \right\}, \quad (6)$$

$$M_1 = \left\{ (x, p) \mid (x, p) \in M, \frac{1}{2} \leq x < 1 \right\}. \quad (7)$$

在 M 上定义连续自映射 $F: M \rightarrow M$ 为

$$F(x, p) = \begin{cases} (2x, \frac{r-1}{3} e^{j\omega 2x}) & ((x, p) \in M_0), \\ (2x-1, \frac{r-1}{3} e^{j\omega 2x}) & ((x, p) \in M_1). \end{cases} \quad (8)$$

由此定义, F 将 M 映成 M 上的一条宽度为 $1/3$ 的新带子 $F(M) = V_0 \cup V_1$. 其中 $V_0 = F(M_0), V_1 = F(M_1), V_0 \cup V_1$ 是连通的. 几何上看, $F(M)$ 可视为在 M 中剪去一个宽度为 $1/3$ 的小 M^L-bius 带后留下的部分. 而 $F^2(M)$ 是由 $V_0 \cup V_1$ 中的 2 条宽度为 $1/3^2$ 的小带子组成. 即 $F^2(M) = (V_{00} \cup V_{11}) \cup (V_{01} \cup V_{10})$. 这里, $V_{00} = F(M_0 \cap V_0), V_{01} = F(M_0 \cap V_1), V_{10} = F(M_1 \cap V_0), V_{11} = F(M_1 \cap V_1),$ 其中 $V_{00} \cup V_{11}, V_{01} \cup V_{10}$ 是各自连通. 如图 1 所示.

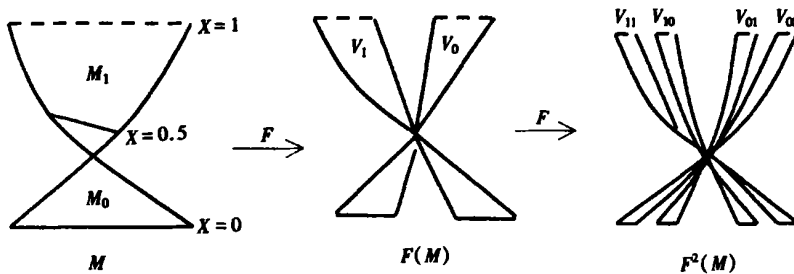


图 1

递推可知, $\bigcap_{i=0}^n F^i(M)$ 为 2^{n-1} 个宽度为 $1/3^n$ 的各自连通的小带子组成. 于是 $\Lambda = \bigcap_{i=0}^{\infty} F^i(M)$

$i(M)$ 由 M 上的无穷多封闭线圈组成. 对于 $\forall x_0 \in [0, 1)$, 用直线 $x = x_0$ 截 Λ , 则得直线上的一个 Cantor 三分集. 显然 Λ 是吸引的, 因为整个 M 都可视为 Λ 的吸引域, 故 Λ 是 F 的一个吸引子^[4,5]. 下面证明, $F|_{\Lambda}$ 是混沌的, 从而说明 Λ 是一个奇怪吸引子.

M_0, M_1 已在式(6)和(7)中定义, 现定义

$$\begin{aligned} M_{00} &= \left\{ (x, p) \mid (x, p) \in M, 0 \leq x < \frac{1}{4} \right\}, \\ M_{01} &= \left\{ (x, p) \mid (x, p) \in M, \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \right\}, \\ M_{10} &= \left\{ (x, p) \mid (x, p) \in M, \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \right\}, \\ M_{11} &= \left\{ (x, p) \mid (x, p) \in M, \frac{3}{4} \leq x < 1 \right\}. \end{aligned}$$

一般地, 定义

$$M_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}} = \left\{ (x, p) \mid (x, p) \in M, a \leq x < b \right\}.$$

其中 a, b 的二进制小数为 $a = 0.s_0 s_1 \dots s_{n-1} 000 \dots, b = 0.s_0 s_1 \dots s_{n-1} 111 \dots$. 对满足 $a \leq x_0 < b$ 的所有 x_0 , 其二进制小数表示中小数点后的前 n 位均为 $s_0 s_1 \dots s_{n-1}$. 显然 $M_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}}$ 的宽度 (欧氏意义下, 下同) 为

$$|M_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}}| = |b - a| = \frac{1}{2^n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

对应 $[0, 1)$ 中的二进制小数, 我们规定:

$$(s_0 s_1 \dots s_k 0111 \dots) = (s_0 s_1 \dots s_k 1000 \dots) \quad (\forall k \geq 0). \tag{9}$$

则对于任一符号序列 $(s_0 s_1 \dots s_{n-1} \dots)$ (除 $(11 \dots 1 \dots)$ 外), $M_{s_0 s_1 \dots s_{n-1} \dots}$ 为 M 上的一条直线. 反之, M 的任一直线 $x = x_0 \in [0, 1)$, 对应一符号序列 $(s_0 s_1 \dots s_{n-1} \dots)$ ($(s_0 s_1 \dots s_{n-1} \dots) \neq (11 \dots 1 \dots)$).

设 C 为 $[-1/2, 1/2]$ 上的 Cantor 三分集, 则 $C = \{y \mid y = x + 1/2, x \in C\}$ 为 $[0, 1]$ 上的 Cantor 三分集. 对 C 中的点, 可展开成相应的三进制小数, 其展开式中仅出现 0 和 2.

V_0, V_1 可表示为:

$$\begin{aligned} V_0 &= \left\{ (x, p) \mid (x, p) \in M, p = r e^{i\pi x}, -\frac{1}{2} \leq r \leq \frac{1}{6} \right\}, \\ V_1 &= \left\{ (x, p) \mid (x, p) \in M, p = r e^{i\pi x}, \frac{1}{6} \leq r \leq \frac{1}{2} \right\}, \end{aligned}$$

同理, 令

$$\begin{aligned} V_{00} &= \left\{ (x, p) \mid (x, p) \in M, p = r e^{i\pi x}, -\frac{1}{2} \leq r \leq \frac{7}{18} \right\}, \\ V_{01} &= \left\{ (x, p) \mid (x, p) \in M, p = r e^{i\pi x}, -\frac{5}{18} \leq r \leq \frac{1}{6} \right\}, \\ V_{10} &= \left\{ (x, p) \mid (x, p) \in M, p = r e^{i\pi x}, \frac{1}{6} \leq r \leq \frac{5}{18} \right\}, \\ V_{11} &= \left\{ (x, p) \mid (x, p) \in M, p = r e^{i\pi x}, \frac{7}{18} \leq r \leq \frac{1}{2} \right\}, \end{aligned}$$

一般地, 令

$$V_{s_1 \dots s_{-n}} = \left\{ (x, p) \mid (x, p) \in M, p = r e^{i\pi x}, c_1 \leq r \leq c_2 \right\},$$

其中 $c_1, c_2 \in C, c_1 + 1/2, c_2 + 1/2$ 的三进制小数表示分别为: $c_1 + 1/2 = 0.s_{-1}s_{-2}\dots s_{-n}00\dots, c_2 + 1/2 = 0.s_{-1}s_{-2}\dots s_{-n}22\dots$. 对于满足 $c_1 \leq r_0 \leq c_2$ 的每个 $r_0, r_0 + 1/2$ 的三进制小数展开

式中, 其小数点后的前 n 位小数均为 $s_{-1}s_{-2}\cdots s_{-n}$. 对于 c_1, c_2 的对称点 $-c_1$ 和 $-c_2$, 也有 $-c_1 - c_2 \in C$. 可知 $-c_1 + 1/2, -c_2 + 1/2$ 的三进制小数表示为

$$\begin{aligned} -c_1 + 1/2 &= 1 - (c_1 + 1/2) = 0.\hat{s}_{-1}\hat{s}_{-2}\cdots\hat{s}_{-n}22\dots, \\ -c_2 + 1/2 &= 1 - (c_2 + 1/2) = 0.\hat{s}_{-1}\hat{s}_{-2}\cdots\hat{s}_{-n}00\dots \end{aligned}$$

$$\left[\text{其中 } \hat{s}_i = \begin{cases} 2 & (s_i = 0) \\ 0 & (s_i = 2) \end{cases} \right]$$

即对满足 $-c_2 \leq r_1 \leq c_1$ 的 $r_1, r_1 + 1/2$ 的三进制小数展开式中, 其小数点后的前 n 位小数均为 $\hat{s}_{-1}\hat{s}_{-2}\cdots\hat{s}_{-n}$.

易知每个 $V_{s_{-1}s_{-2}\cdots s_{-n}}$ 的宽度为

$$|V_{s_{-1}s_{-2}\cdots s_{-n}}| \leq \frac{1}{3^n} \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow +\infty).$$

这样我们得到: 每一个 $r_0 \in C \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, 对应一个由 0, 2

两个符号构成的符号序列 $(s_{-1}s_{-2}\cdots s_{-n}\cdots)$. 而 r_0 的对称点 $-r_0 \in C$, 对应它们的对称元构成的符号序列 $(\hat{s}_{-1}\hat{s}_{-2}\cdots\hat{s}_{-n}\cdots)$. 相应地, $V_{s_{-1}s_{-2}\cdots s_{-n}}, V_{\hat{s}_{-1}\hat{s}_{-2}\cdots\hat{s}_{-n}}$ 为 M 的互为对称的两曲线段, 而 $V_{s_{-1}s_{-2}\cdots s_{-n}} \cup V_{\hat{s}_{-1}\hat{s}_{-2}\cdots\hat{s}_{-n}}$ 构成 M 上的一条曲线. 如图 2.

反之, 对于任一由 0 和 2 两个符号组成的序列 $(s_{-1}s_{-2}\cdots s_{-n}\cdots)$, 对应 C 的一点 r_0 , 因而对应 M 上的曲线段 $V_{s_{-1}s_{-2}\cdots s_{-n}}$.

将 $(s_{-1}s_{-2}\cdots s_{-n}\cdots)$ 中的符号 2 换成 1 (符号 0 不变), 再在前面 (9) 的规定下, 我们得到

$$\begin{aligned} \Lambda &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{s_i \in \{0,1\}} (V_{s_{-1}s_{-2}\cdots s_{-n}} \cap M_{s_0s_1\cdots s_{n-1}}) = \\ &= \bigcup_{s_i \in \{0,1\}} (V_{s_{-1}s_{-2}\cdots s_{-n}} \cap M_{s_0s_1\cdots s_{n-1}}). \end{aligned} \quad (10)$$

由以上分析及 Λ 的结构, 为得到 F 在 Λ 上的动力学性质, 需在 Σ_2 中除去某些序列. 记

$$\Sigma_2 = \left\{ s \in \Sigma_2 \mid s = (\cdots s_{-n} \cdots s_{-2}s_{-1}.s_0s_1\cdots s_{n-1}\cdots), \right. \\ \left. \forall N \in \mathbf{Z}^+, \exists i \geq N, s_i \neq 1 \right\}.$$

易知 Σ_2 上的位移 σ 与 Σ_2 上的位移 σ 具有同样的复杂性质 (例如拓扑混合性, 多种意义下的混沌性等), 且 (Σ_2, σ) 与 (Σ_2, τ) 拓扑共轭, 其中 τ 如定义 1 中所定义的拟移位 (证明与定理 1 完全一样. 略).

我们还需要下述引理.

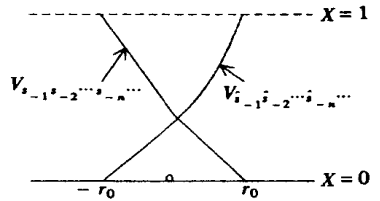
引理 (i) 设 $x \in [0, 1)$, 若 x 的二进制表示为 $x = 0.x_0x_1x_2\dots$, 则 $2x \pmod{1} = 0.$

$x_1x_2x_3\dots$;

(ii) 对于 $[0, 1]$ 中的 Cantor 三分集 C , $x \in C$, 设其三进制小数数为 $x = 0.x_{-1}x_{-2}\cdots$, (x_i 为 0 或 2), 则 $x/3 = 0.0x_{-1}x_{-2}\cdots$ 和 $1-x/3 = 0.2\hat{x}_{-1}\hat{x}_{-2}\cdots$. 其中

$$\hat{x}_i = \begin{cases} 2 & (x_i = 0), \\ 0 & (x_i = 2). \end{cases}$$

证明 (略).



$$\begin{aligned} r_0 + 1/2 &= 0.s_{-1}s_{-2}\cdots s_{-n}\cdots, \\ -r_0 + 1/2 &= 0.\hat{s}_{-1}\hat{s}_{-2}\cdots\hat{s}_{-n}\cdots \end{aligned}$$

图 2

定理 2 $(\Lambda, F|\Lambda)$ 与 (Σ_2, τ) 拓扑共轭.

证明 $\forall q \in \Lambda$, 由(10)式, \exists 序列 $(s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1} \dots)$ 和 $(s_{-1} s_{-2} \dots s_{-n} \dots)$,

$q \in V_{s_{-1} s_{-2} \dots s_{-n} \dots} \cap M_{s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1} \dots}$, 记 $q \sim (\dots s_{-n} \dots s_{-2} s_{-1} \cdot s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1} \dots)$.

设 $q = (x_0, p_0)$, $p_0 = r_0 e^{i\pi x_0}$, $r_0 \in C \subset [-1/2, 1/2]$, 其中 $x_0 = 0 \cdot s_0 s_1 \dots s_{n-1} \dots$. 记 $x_0 \sim (s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1} \dots)$, $r_0 \sim (s_{-1} s_{-2} \dots s_{-n} \dots)$ (若将 $(s_{-1} s_{-2} \dots s_{-n} \dots)$ 中的符号 1 换回 2, 则 $r_0 + 1/2 = 0 \cdot s_{-1} s_{-2} \dots s_{-n} \dots$).

由 F 的定义(8), 有

$$F(q) = F(x_0, p_0) = \begin{cases} \left(2x_0, \frac{r_0 - 1}{3} e^{i\pi 2x_0} \right) & (\text{当 } x_0, p_0 \in M_0) \\ \left(2x_0 - 1, \frac{r_0 - 1}{3} e^{i\pi 2x_0} \right) & (\text{当 } x_0, p_0 \in M_1) \end{cases}$$

于是

1) 当 $(x_0, p_0) \in M_0$, 即 $0 \leq x_0 < 1/2$, 此时 $x_0 \sim (s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1} \dots)$, 其中 $s_0 = 0$. 一方面, 由引理, 有 $2x_0 = 0 \cdot s_1 s_2 \dots s_{n-1} \dots$, 即 $2x_0 \sim (s_1 s_2 \dots s_{n-1} \dots)$; 另一方面, 由 $r_0 \in C$, 有 $(r_0 - 1)/3 \in C$, 且

$$\frac{r_0 - 1}{3} + 1/2 = \frac{r_0 + 1}{2}.$$

由引理之(ii),

$$\frac{r_0 + 1}{2} = 0 \cdot 0 s_{-1} s_{-2} \dots s_{-n} \dots,$$

将其中出现 2 的符号换为 1, 则得 $(r_0 - 1)/3$ 的序列表示为

$$\frac{r_0 - 1}{3} \sim (0 s_{-1} s_{-2} \dots s_{-n} \dots).$$

故

$$F(q) \sim (\dots s_{-n} \dots s_{-2} s_{-1} 0 \cdot s_1 s_2 \dots s_{n-1} \dots) \quad (11)$$

2) 当 $(x_0, p_0) \in M_1$, 即 $1/2 \leq x_0 < 1$. 此时 $x_0 \sim (s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1} \dots)$, 其中 $s_0 = 1$.

首先, $2x_0 - 1 = 0 \cdot s_1 s_2 \dots s_{n-1} \dots$. 记 $2x_0 - 1 \sim (s_1 s_2 \dots s_{n-1} \dots)$. 其次, 这时有

$$\frac{r_0 - 1}{3} e^{i\pi 2x_0} = \frac{1 - r_0}{3} e^{i\pi(2x_0 - 1)}.$$

由引理之(ii),

$$\frac{1 - r_0}{3} + 1/2 = 1 - \frac{r_0 + 1}{3} = 0 \cdot 2 \hat{s}_{-1} \hat{s}_{-2} \dots \hat{s}_{-n} \dots$$

将该式中的符号 2 换成 1, 得到 $(1 - r_0)/3$ 的符号序列表示为

$$\frac{1 - r_0}{3} \sim (1 \hat{s}_{-1} \hat{s}_{-2} \dots \hat{s}_{-n} \dots).$$

于是

$$F(q) \sim (\dots \hat{s}_{-n} \dots \hat{s}_{-2} \hat{s}_{-1} 1 \cdot s_1 s_2 \dots s_{n-1} \dots) \quad (12)$$

这样, 我们得到

$$F(q) = \begin{cases} V_{0 s_{-1} s_{-2} \dots s_{-n} \dots} \cap M_{s_1 s_2 \dots s_n \dots} & (\text{当 } q \in M_0), \\ V_{1 \hat{s}_{-1} \hat{s}_{-2} \dots \hat{s}_{-n} \dots} \cap M_{s_1 s_2 \dots s_n \dots} & (\text{当 } q \in M_1). \end{cases} \quad (13)$$

故 $F(\Lambda) \subset \Lambda$. 即 Λ 为不变集.

$\forall q \in \Lambda$, 设 $q = V_{s_{-1}s_{-2}\dots s_{-n}} \dots \cap M_{s_0s_1s_2\dots s_{n-1}} \dots$

现定义映射

$\Phi: \Lambda \rightarrow \Sigma_2$ 为

$$q \mapsto S = (\dots s_{-n} \dots s_{-1} \cdot s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1} \dots)$$

由(9)和(10)式知, Φ 是一一映射, 且易证 Φ 及 Φ^{-1} 均为连续映射, 故 Φ 为 Λ 到 Σ_2 的一个同胚. 于是

$$\tau(\Phi(q)) = \tau(S) = \tau(\dots s_{-n} \dots s_{-2} s_{-1} \cdot s_0 s_1 \dots s_{n-1} \dots) = \begin{cases} (\dots s_{-n} \dots s_{-2} s_{-1} s_0 \cdot s_1 s_2 \dots s_{n-1} \dots) & (\text{当 } s_0 = 0), \\ (\dots \hat{s}_{-n} \dots \hat{s}_{-2} \hat{s}_{-1} s_0 \cdot s_1 s_2 \dots s_{n-1} \dots) & (\text{当 } s_0 = 1). \end{cases}$$

而

$$\Phi(F(q)) = \begin{cases} \Phi(V_{0s_{-1}s_{-2}\dots s_{-n}} \dots \cap M_{s_1s_2\dots s_{n-1}} \dots) & (\text{当 } q \in M_0), \\ \Phi(V_{1s_{-1}s_{-2}\dots s_{-n}} \dots \cap M_{s_1s_2\dots s_{n-1}} \dots) & (\text{当 } q \in M_1). \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (\dots s_{-n} \dots s_{-2} s_{-1} 0 \cdot s_1 s_2 \dots s_{n-1} \dots) & (\text{当 } q \in M_0), \\ (\dots \hat{s}_{-n} \dots \hat{s}_{-2} \hat{s}_{-1} 1 \cdot s_1 s_2 \dots s_{n-1} \dots) & (\text{当 } q \in M_1). \end{cases}$$

即 $\tau \circ \Phi = \Phi \circ F|_{\Lambda}$. 证毕.

由定理2, 我们得到了 Λ 是 M 上的映射 F 的一个奇怪吸引子.

3 结束语

我们在给出了 Σ_2 上的拟移位映射 τ 与通常的移位映射 σ 拓扑共轭的同时, 成功地刻划了 M^L -bius 带上的映射 F 在其吸引子 Λ 上的动力性质. 从数学上讲, 进一步的问题是如何刻划 M 上的比 F 更复杂的映射, 如在 x 方向的扩张不是2倍, 而是一般的 u 倍 ($u > 1$), 在 r 方向的压缩是 λ 倍 ($\lambda < 1/2$), 值得探讨. 另一方面, 真如 Σ_2 上移位映射 σ 能在实际上得到应用一样^[6,7], 我们认为从力学和物理角度来看, 这种 M^L -bius 带上奇怪吸引子可能意味着扭结在一定条件也可能产生复杂运动, 这对于理解复杂运动的起源是有益的, 具体实例将另行发表.

[参 考 文 献]

- [1] Smale S. Differentiable dynamical systems[J]. Bull Amer Math Soc, 1967, 73: 747—817.
- [2] 李明军, 李开泰. 一类描述混沌映射的符号动力系统[J]. 高校应用数学学报, 1999, 14(2): 125—129.
- [3] 麦结华. 用5进制小数描述 Smale 马蹄映射[J]. 科学通报, 1993, 38(21): 1932—1935.
- [4] 刘曾荣. 二维平面映射的奇怪吸引子[M]. 苏州: 苏州大学出版社, 1996, 1—30.
- [5] Devany R. Chaotic Dynamical Systems [M]. Second Ed. Addisonwesley, Samenvatting: Benjamin Cummings, 1989.
- [6] 刘曾荣, 秦文新, 谢惠民, 等. 一类二维映射的奇怪吸引子的结构和动力学行为[J]. 中国科学A, 1993, 23(7): 702—708.
- [7] 刘曾荣, 秦文新, 谢惠民. Lauwerier 吸引子的结构和动力学行为[J]. 科学通报, 1992, 37(14): 1269—1271.
- [8] Edgar G A. Measure, Topology and Fractal Geometry [M]. New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1990.
- [9] 郑伟谋, 郝柏林. 实用符号动力学[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1994.

[10] 王树禾. 微分方程模型与混沌[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1999.

Model Shift and Strange Attractor on M^1 -bius Strip

CHEN Fang_yue^{1,2}, CHEN Feng_juan²

(1. Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200436, P. R. China;

2. Department of Mathematics, Zhejiang Normal University, Jinhua, Zhejiang 321004, P. R. China)

Abstract: A new model shift mapping was given in bilateral symbol space. It is topologically conjugate with the traditional shift mapping. Similar to Smale Horseshoe, a model was constructed correspondent to the model shift mapping, i. e. a class of mapping on M^1 -bius strip was given. Its attractors' structure and dynamical behaviour were described.

Key words: model shift mapping; M^1 -bius strip; chaos; strange attractor