

文章编号: 1000-0887(2003) 06-0551-08

# 非线性不平衡弹性轴系动力学的 安全裕度准则\*

陈予恕<sup>1</sup>, 李银山<sup>1,2</sup>, 薛禹胜<sup>3</sup>

(1. 天津大学 力学系, 天津 300072; 2. 河北工业大学 机械工程学院 力学系,  
天津 300130; 3. 国家电力公司 电力自动化研究院, 南京 210003)

(本刊编委陈予恕来稿)

**摘要:** 给出了一个弹性转子系统的非线性动力学安全裕度准则。采用分解和聚合的方法将系统的积分空间与观察空间分离, 在积分空间中得到高维系统的稳态轨迹; 根据转子系统振动的国际标准确定安全准则的能量界限, 在一系列观察空间中采用能量相比正面积准则计算安全裕度。给出了滑动轴承非线性油膜力条件下不平衡转子系统安全裕度计算的实例。所建议的安全裕度准则包括了工程中通用的稳定裕度的计算, 它是解决非线性系统安全裕度和稳定裕度量化计算问题的一种有效方法。

**关键词:** 不平衡弹性转子; 安全裕度; 相比正面积准则(CPAC); 分岔和混沌  
**中图分类号:** TB122; TH133 **文献标识码:** A

## 引言

目前, 新近兴起学科——混沌动力学为非线性动力系统的分析开拓了广阔前景<sup>[1~5]</sup>。

大型旋转机械是十分典型的非线性非自治动力大系统。其安全运行对于社会生活和经济发展都是至关重要的, 而稳定性又是其安全运行的关键。大系统的安全稳定分析和控制不仅是重大的基础科学研究课题, 而且对于解决现时生活和生产中的安全问题也有特别重要的意义<sup>[6,7]</sup>。虽然众多数学家、力学家和工程师在稳定性研究方面, 做了不懈努力, 但是, 长期以来, 稳定性研究仅仅局限于低维定性理论和线性系统的稳定性量化理论。由于计算机的发展, 高维非线性系统稳定性量化理论成为可能<sup>[8]</sup>。

李和陈<sup>[9]</sup>提出了适用于转子稳态稳定性定量问题的相比正面积准则(CPAC, comparative positive\_area criterion)。采用 CPAC 方法分析了转子系统的非线性油膜失稳问题, 并给出了稳定裕度的定义。

安全裕度是根据转子系统运行的实际振幅(或振动烈度)与规范允许值的差距的一种评估

\* 收稿日期: 2002\_02\_04; 修订日期: 2003\_02\_18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(重大 19990510); 山西省自然科学基金资助项目(20001007); 国家重点基础研究专项经费资助项目(G1998020316)

作者简介: 陈予恕(1931—), 男, 山西肥城人, 教授, 博士生导师, 俄国应用科学院国外院士  
(E-mail: yschen@public.tpt.tj.cn)

指标, 它不但可评估或设计结构的动力学参数而且包含了稳定裕度的概念。本文结合国内外现有的旋转机械振动评定标准, 给出了安全裕度的定义。

在线性转子动力学中多以衰减指数计算其稳定裕度, 而在非线性系统中, 由于衰减指数是决定于系统的非线性函数, 这种计算遇到了很大困难, 如果用安全裕度准则, 则可将倍周期分岔点的能量作为安全界限, 利用相比正面积准则, 则可得到规定的稳定裕度。

## 1 弹性转子运动方程

带有一个圆盘的对称单跨弹性转子, 两端支承在同样的油膜轴承上, 轴的弯曲刚度系数为  $k$ , 圆盘及转子的质量向圆盘处和两端简化, 圆盘处的质量为  $m_1$ , 轴两端的质量各为  $m_2/2$ , 简化模型如图 1 所示, 其运动方程为

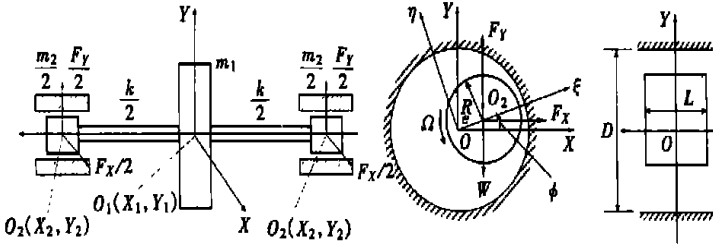


图 1 滑动轴承弹性转子模型

$$m_1 \ddot{z}_1 + k(z_1 - z_2) + m_1 g - m_1 e \omega^2 \exp(i\omega t) = 0, \quad (1a)$$

$$m_2 \ddot{z}_2 + k(z_2 - z_1) - f + m_2 g = 0, \quad (1b)$$

式中,  $z_j = x_j + iy_j$  ( $j = 1, 2$ );  $f = f_x + if_y$  ( $i$  是虚数单位);  $e$  — 质量偏心距(m);  $\omega$  — 转动角速度, 单位 rad/s;  $f_x, f_y$  — 作用于各轴颈上的油膜力(N);  $g$  — 重力加速度( $m/s^2$ )。

假定  $\delta$  为轴承平均间隙(m), 引入如下无量纲变量

$$Z_j = \frac{z_j}{\delta} \quad (j = 1, 2), \quad \tau = \omega t, \quad \rho = \frac{e}{\delta}, \quad \nu = \frac{m_1}{m_2}, \quad \beta = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad F = \frac{f}{\sigma W}.$$

将方程(1)无量纲化得到

$$\ddot{Z}_1 + \frac{1}{\beta^2}(Z_1 - Z_2) + \frac{1}{M\sigma} - \rho \exp(i\tau) = 0, \quad (2a)$$

$$\ddot{Z}_2 + \frac{\nu}{2\beta^2}(Z_2 - Z_1) - \frac{\nu}{M}F + \frac{1}{M\sigma} = 0, \quad (2b)$$

其中

$$Z_j = X_j + iY_j \quad (j = 1, 2), \quad F = F_X + iF_Y, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_1}},$$

$$W = \left[ \frac{m_1}{2} + m_2 \right] g, \quad \sigma = \frac{\eta \omega R L}{W} \left[ \frac{R}{\delta} \right]^2 \left[ \frac{L}{2R} \right]^2, \quad M = \frac{\omega^2 \delta}{\sigma g},$$

$\sigma$  — Sommerfeld 数,  $R$  — 轴颈半径(m),  $L$  — 轴承宽度(m),  $\eta$  — 油膜粘度。

无量纲非线性油膜力采用非稳态三函数解析表达式见[10]。

## 2 周期解稳定性量化分析及安全裕度定义

### 2.1 旋转机械振动评定标准

目前最常采用的是以通频振幅来衡量机械的安全运行状态, 根据所使用传感器的种类分

为:

- 1) 轴承振动评定法, 这可以利用接触式传感器放置在轴承座上进行测量。
- 2) 轴振动评定法, 这可利用非接触式传感器测量轴相对于机壳的振动值或轴的绝对振动值。

评定参数可用振动位移峰峰值和振动烈度来表示。

表 1 为国际电工委员会 IEC 推荐的轮机振动标准, 制定振动标准时假设: 1) 机组振动为单一频率的正弦波振动; 2) 轴承振动和转子振动基本上有一固定的比值, 因此可利用轴承振动代表转子振动; 3) 轴承座在垂直、水平方向上的刚度基本上相等, 即认为是各向同性的。双振幅

$$a_{\text{double}} = x_{\text{max}} - x_{\text{min}}, \quad (3)$$

振动烈度

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{2} (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2)} = \sqrt{\frac{1}{2} (a_1^2 \omega_1^2 + a_2^2 \omega_2^2 + \dots + a_n^2 \omega_n^2)} \cdot \quad (4)$$

表 1 IEC 汽轮机振动标准(峰峰值)

振动标准 $a_{\text{double}}/\mu\text{m}$	转速 $\omega/(r/\text{min})$				
	$\leq 1000$	1500	3000	3600	$\geq 6000$
轴承上	75	50	25	21	12
轴上(靠近轴承)	150	100	50	44	20

表 2 示出国际标准化组织 ISO3945 给出的振动烈度评定功率大于 300 kW, 转速为 600~12 000 r/min 的大型原动机和其它具有旋转质量的大型机器, 例如电动机和发电机、蒸汽轮机和燃气轮机、涡轮增压器、涡轮泵和风扇等的振动特性的国际标准。

表 2 ISO3945 振动标准

轴承振动烈度 $v_{\text{rms}}/(mm/s)$		0.46	0.71	1.17	1.8	2.8	4.6	7.1	11.2	18.0	28.0	45.0
支承分类	刚性	好			良		及格		不可用			
	柔性	好				良		及格		不可用		

## 2.2 多自由度系统稳定性的定量求解方法——分解和聚合

大系统理论的研究核心之一就是分解\_聚合, 即使大系统是线性的, 也只能以分解\_聚合的方式才能计算特征根, 否则在数值上将不可行。对于非线性大系统稳定性的严格定性分析, 目前仍只能依靠数值积分加上经验判断。而在创建非线性系统稳定分析的量化理论和算法方面, 数学界和控制理论界的研究至今处于探索阶段。分解\_聚合法将大系统分解为一系列的子系统, 分别对每个子系统进行分析, 再将它们的结果聚合成原大系统的结果。这个观点很具吸引力, 其关键是如何保证:

- 1) 在分解的过程中, 不改变原系统在所关注问题上的特性;
- 2) 在每个子系统的分析过程中, 完整地(至少充分地)计入其他子系统的影响;
- 3) 在聚合过程中, 合理地综合各子系统的分析结果对原系统特性的影响。

保稳降维变换的基本思想<sup>[8]</sup>是将  $R^n$  积分空间与观察空间  $R^1$  分离。对于数值积分任务来

说,以  $R^n$  为积分空间可以分析任意规模的系统,任意复杂的模型。对于稳定信息的提取任务来说,在  $R^1$  空间中则可以严格地提供稳定的充要条件和定义稳定裕度。因此,将观察空间从积分空间中分离出来很有好处。

### 2.3 临界能量的计算

在实际工程中,正常情况下转子系统的运行质量控制在任何测点上都有两个指标:

- ① 不出现半频成分或半频幅值不超过某很小的值; ② 工频振幅不超过某规定值。

由于周期 1 失稳模式对转子系统是最重要的,因此本文仅仅讨论周期 1 失稳模式的稳定裕度定义。设振动的位移 ( $\omega = 1$ ):

$$x = e + a \sin(\omega t + \varphi) = e + a \sin \theta, \quad \dot{x} = a \omega \cos \theta,$$

$$\ddot{x} = -a \omega^2 \sin \theta, \quad dx = a \cos \theta d\theta,$$

$$A_{cr} = \int_{\dot{x} dx > 0} \dot{x} dx = - \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{a^2 \omega^2}{2} \sin 2\theta d\theta - \int_{3\pi/2}^{2\pi} \frac{a^2 \omega^2}{2} \sin 2\theta d\theta = \frac{a^2 \omega^2}{2} = \frac{a^2}{2}, \quad (5)$$

$$A_{cr} = \frac{a_{double}^2}{8} \quad (\text{评定标准 1}), \quad (6)$$

$$A_{cr} = v_{rms}^2 \quad (\text{评定标准 2}). \quad (7)$$

### 2.4 安全性定量分析特征指标

周期解在  $F-u$  扩展相平面上有如下特征:

结论 1 对于稳定态周期 1 解,系统每个周期  $T$  内,在  $F-u$  平面上所围面积的代数和为零,

$$\oint (F_d - F_b) du = A_{inc} - A_{dec} = 0.$$

即动能增加面积

$$A_{inc} = \int_{(F_d - F_b) du > 0} (F_d - F_b) du$$

与动能减少面积

$$A_{dec} = \int_{(F_d - F_b) du < 0} (F_d - F_b) du$$

相等。实际上,正面积  $A_1^+ = A_{inc} = A_{dec}$  的大小反映了系统存储能量的多少。这里,  $F_b$ —广义制动力,  $F_d$ —广义驱动力,  $u$ —广义位置变量。

结论 2 对于周期 2 解,系统每个周期  $2T$  内,在  $F-u$  平面上所围面积的代数和为零,

$$\oint (F_d - F_b) du = A_{inc(2)} - A_{dec(2)} = 0,$$

动能增加面积  $A_{inc(2)}$  与动能减少面积  $A_{dec(2)}$  相等。正面积  $A_{(2)}^+ = A_{inc(2)} = A_{dec(2)}$  的大小反映了系统存储能量的多少。

结论 3 对于周期  $n$  解,系统每个周期  $nT$  内,在  $F-u$  扩展相平面上所围面积的代数和为零,

$$\oint (F_d - F_b) du = A_{inc(n)} - A_{dec(n)} = 0,$$

即动能增加面积  $A_{inc(n)}$  与动能减少面积  $A_{dec(n)}$  相等。正面积  $A_{(n)}^+ = A_{inc(n)} = A_{dec(n)}$  的大小反映了系统存储能量的多少。

我们按国际振动标准确定临界能量  $A_{cr}$   $A_{cr} - A_1^+$  (或  $A_{cr} - A_n^+$ ) 为安全性定量分析特征指标。对安全的轨迹  $A_{cr} - A_1^+$  (或  $A_{cr} - A_n^+$ ) 一定为正。不安全的轨迹  $A_{cr} - A_1^+$  (或  $A_{cr} - A_n^+$ )

一定为负。这里  $A_n^+ = A_n^+/n$  表示  $A_n^+$  对周期  $n$  的平均。

安全性定量分析特征指标有如下性质:

1) 安全性定量分析特征指标具有连续性; 2) 安全性定量分析特征指标具有单调性。

### 2.5 相比正面积准则和安全裕度的标么化定义

相比正面积准则: 任何小于  $A_{cr}$  的能量  $A_1^+$  (或  $A_n^+$ ) 的周期 1 解 (或者周期  $n$  解) 是安全的, 其安全裕度用  $A_{cr} - A_1^+$  (或  $A_{cr} - A_n^+$ ) 表示。

安全裕度的标么化定义:

$$\mu_k = \begin{cases} \frac{A_{cr} - A_n^+}{A_{cr}} \times 100\% & A_{cr} > A_n^+, \\ \frac{A_{cr} - A_n^+}{A_n^+} \times 100\% & A_{cr} < A_n^+. \end{cases} \quad (8)$$

显然,  $\mu_k(\%) \in [-100, 100]$ ,  $k$  为自由度数 ( $k = 1, 2, \dots, n$ )。

$R^N$  轨迹安全裕度等于其所有  $R^1$  映象裕度中的最小值。

$$\mu = \min(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, \dots, \mu_N). \quad (9)$$

## 3 安全裕度的工程实例计算

轴承\_转子系统(图 1) 参数选取:  $m_1 = 3 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 0.7 \text{ kg}$ ,  $k = 11.34 \text{ MN/m}$ ,  $\delta = 250 \mu\text{m}$ ,  $D = 30 \text{ mm}$ ,  $L = 10 \text{ mm}$ ,  $\eta = 0.05 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ,  $A_{cr} = 0.003872$ 。

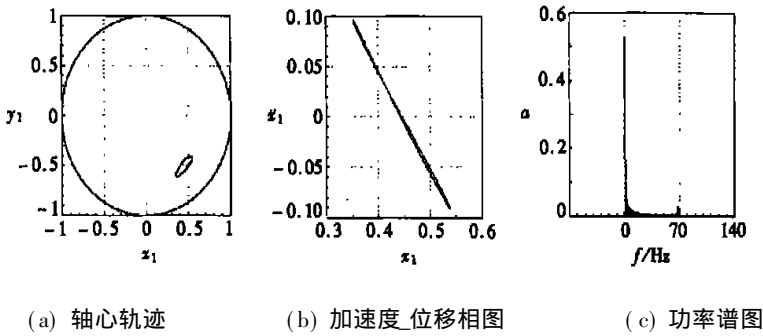
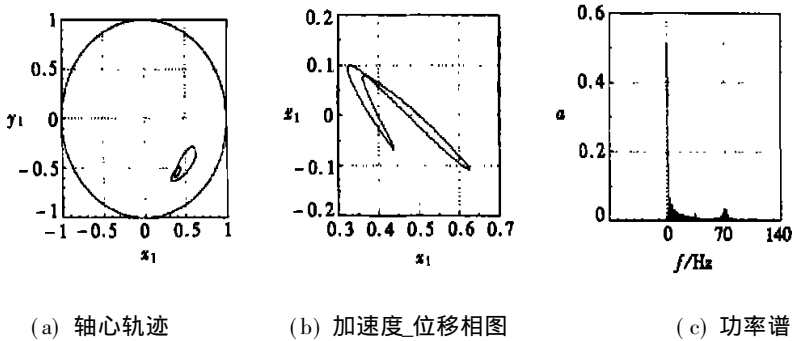
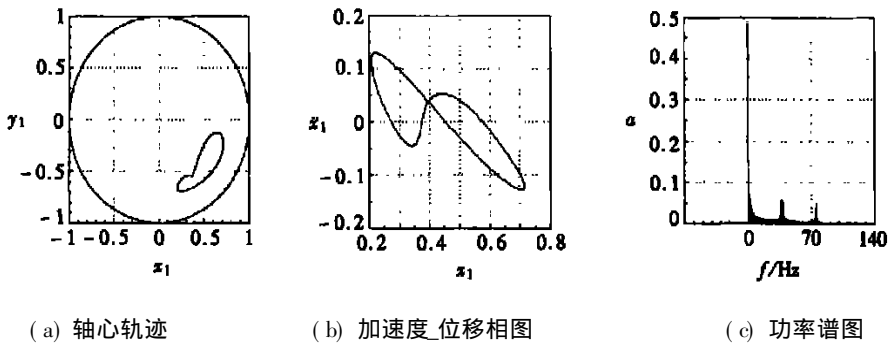
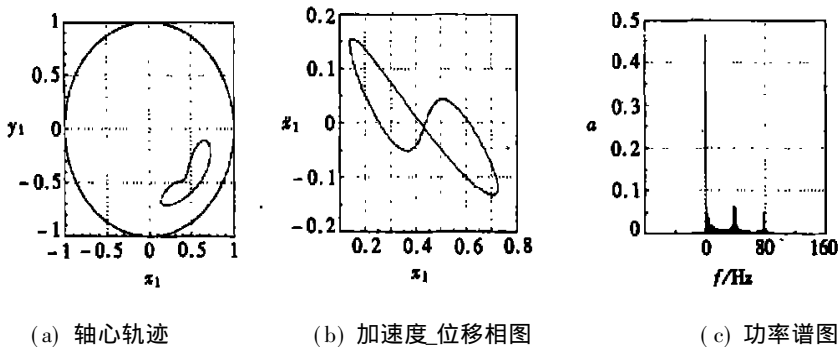
下面我们研究转子系统在转速为  $n = 4 \sim 5 \text{ kr/min}$  不同的不平衡量值 ( $\rho = 0 \sim 0.6$ ) 下的动力学行为。式(2) 是一个四自由度的强非线性非自治微分方程组。首先对系统进行积分求出系统的定常解, 然后根据 CPAC 理论对系统进行轨迹安全性的定量分析。图中变量除频率  $f$  外都是无量纲量。

表 3 给出了不平衡量  $\rho$  与安全裕度  $\mu$  的对应关系。

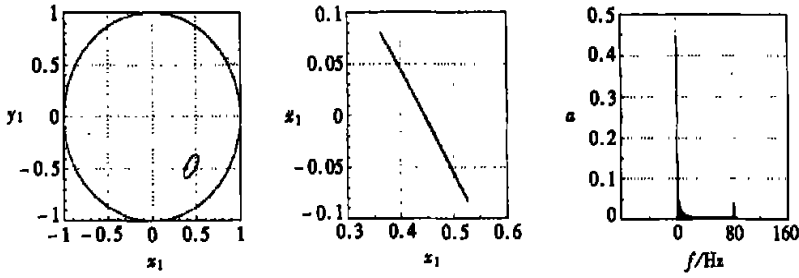
表 3 不平衡量  $\rho$  与稳定裕度的对应关系

转速 $n/(r/min)$	不平衡量 $\rho$	解的性质	安全裕度 $\mu$
4 100	0.1	周期 1	- 54.50%
4 300	0.1	周期 2	- 55.37%
4 500	0.1	周期 2	- 73.22%
4 700	0.1	周期 2	- 78.19%
4 900	0.1	周期 1	- 40.69%
4 200	0.05	周期 1	46.69%
4 400	0.05	周期 1	50.72%
4 600	0.05	周期 2	33.04%
4 800	0.05	周期 1	56.87%
5 000	0.05	周期 1	59.06%

图 2~ 图 6 给出了  $\rho = 0.1$  的轴心轨迹, 功率谱和位移\_加速度扩展相平面图。图 2 和图 6 为  $n = 4.1 \text{ kr/min}$  和  $n = 4.9 \text{ kr/min}$  时的工频周期运动。从功率谱图可以看出仅有工频、零频表示偏心, 轴心轨迹为一椭圆, 位移\_加速度图上表现为前后摆均一次穿过位移轴。图 3, 图 4 和图 5 分别为  $n = 4.3 \text{ kr/min}$ ,  $n = 4.5 \text{ kr/min}$  和  $n = 4.7 \text{ kr/min}$  时的周期 2 运动。从

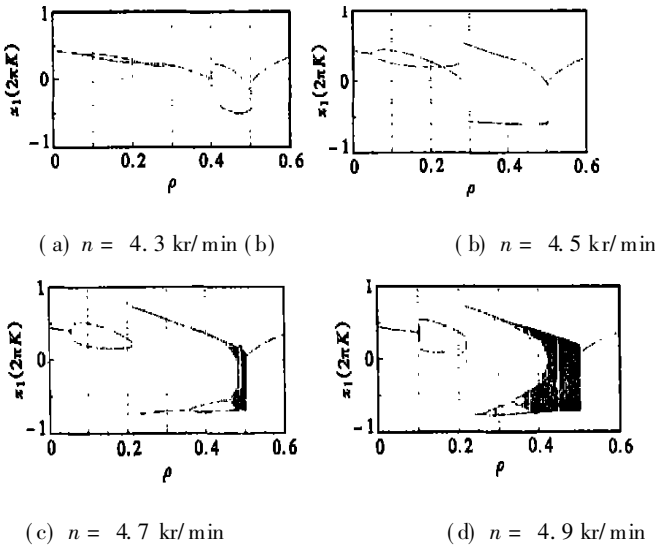
图2  $n = 4.1 \text{ kr/min}, \rho = 0.1$ 图3  $n = 4.3 \text{ kr/min}, \rho = 0.1$ 图4  $n = 4.5 \text{ kr/min}, \rho = 0.1$ 图5  $n = 4.7 \text{ kr/min}, \rho = 0.1$ 

功率谱图可以看出不仅有工频, 还有半频。  $n = 4.3 \text{ kr/min}$  时,  $a_{1/2} < a_1$ ;  $n = 4.5 \text{ kr/min}$  时,  $a_{1/2} \approx a_1$ ;  $n = 4.7 \text{ kr/min}$  时,  $a_{1/2} > a_1$ , 轴心轨迹为两个环或一条凹闭曲线, 力\_位移图上表现



(a) 轴心轨迹 (b) 加速度-位移相图 (c) 功率谱图

图6  $n = 4.9 \text{ kr/min}$ ,  $\rho = 0.1$



(c)  $n = 4.7 \text{ kr/min}$  (d)  $n = 4.9 \text{ kr/min}$

图7 对固定转速  $n$  的分岔图 ( $K = 500 \sim 700$ )

为前后摆4次穿过位移轴。

图7给出了以不平衡量  $\rho$  为参数的分岔图。从分岔图可以判断周期解、概周期解和混沌的变化规律。根据分岔点可计算稳定裕度,此部分工作另文发表。

## 4 结 论

1) 提出了适用于非线性转子系统的安全裕度概念,给出了轨迹安全裕度的定义,利用轨迹安全裕度可以很方便地来求取便于工程控制的参数安全裕度,利用参数安全裕度可以指导工程设计和控制。

2) 采用Poincaré映射,给出了以不平衡量  $\rho$  为参数的分岔图。

3) 转子系统通常会出现周期解、概周期解和混沌。一般来说,概周期解和混沌是正常工况不容许的,我们应该识别和避免。所以安全裕度的计算仅考虑周期解就可以了。

4) 对不平衡弹性转子系统典型的2种常见工况:工频振动和半频振动计算了安全裕度。

5) 安全裕度准则对大型旋转机械的超高自由度系统的稳定性量化分析提供了可能性。

## [参 考 文 献]

[1] CHEN Yu-shu, Leung A Y T. Bifurcation and Chaos in Engineering [M]. London: Springer, 1998.

- [2] 李银山, 陈予恕, 吴志强. 正交各向异性圆板非线性振动的亚谐分岔[J]. 机械强度, 2001, 23(2): 148—151.
- [3] 李银山, 杨桂通, 张善元, 等. 圆板受迫振动超谐分叉和混沌运动的实验研究[J]. 实验力学, 2001, 16(4): 347—358.
- [4] 李银山, 高峰, 张善元, 等. 二次非线性圆板的  $1/2$  亚谐解[J]. 机械强度, 2002, 24(4): 505—509.
- [5] 李银山, 刘波, 龙运佳, 等. 二次非线性粘弹性圆板的  $2/1$  超谐解[J]. 应用力学学报, 2002, 19(3): 20—24.
- [6] 李银山, 曹树谦, 丁千, 等. 非线性油膜力轴承上不平衡弹性转子的分岔和混沌[A]. 见: 杨桂通, 黄筑平, 梁乃刚 主编. 塑性力学与工程[C]. 北京: 万国学术出版社, 2002, 177—183.
- [7] 李银山, 孙雨明, 李欣业, 等. 不平衡弹性转子系统非线性油膜失稳分析[J]. 太原理工大学学报, 2001, 31(6): 559—561.
- [8] 薛禹胜. 运动稳定性量化理论——非自治非线性多刚体系统稳定性分析[M]. 南京: 江苏科学技术出版社, 1999.
- [9] 李银山, 陈予恕, 薛禹胜. 非线性油膜力轴承上不平衡弹性转子的稳定裕度[J]. 机械工程学报, 2002, 38(9): 27—32.
- [10] 徐小峰, 张文. 一种非稳态油膜力模型下刚性转子的分岔和混沌特性[J]. 振动工程学报, 2000, 13(6): 247—253.

## Safety Margin Criterion of Nonlinear Unbalance Elastic Axle System

CHEN Yu\_shu<sup>1</sup>, LI Yin\_shan<sup>1,2</sup>, XUE Yu\_sheng<sup>3</sup>

(1. Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China;

2. Institute of Engineering Mechanics, School of Mechanical Engineering,  
Hebei University of Technology, Tianjin 300130, P. R. China;

3. Nanjing Automation Research Institute, Nanjing 210003, P. R. China)

**Abstract:** The safety margin criterion of nonlinear dynamic question of an elastic rotor system are given. A series of observing spaces were separated from integral space by resolving and polymerizing method. The stable\_state trajectory of high dimensional nonlinear dynamic systems was got within integral space. According to international standard of rotor system vibration, energy limits of safety criterion were determined. The safety margin was calculated within a series of observing spaces by comparative positive\_area criterion(CPAC) method. A quantitative example calculating safety margin for unbalance elastic rotor system was given by CPAC. The safety margin criterion proposed includes the calculation of current stability margin in engineering. This criterion is an effective method to solve quantitative calculation question of safety margin and stability margin for nonlinear dynamic systems.

**Key words:** unbalance elastic rotor; safety margin; comparative positive\_area criterion(CPAC); bifurcation and chaos