应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 06_0572_07

关于 Reich 的公开问题*

张石生[1,2]

(1. 宜宾学院 数学系, 宜宾 644007;
2. 四川大学 数学系, 成都 610064)

(我刊编委张石生来稿)

摘要: 在更一般的条件和在更一般的形式下对 Reich 提出的公开问题给出一个肯定的答复• 同时也推广和改进了 Reich, Shioji, Takahashi 和 Wittmann 等人的一些最新成果•

关 键 词: 渐近非扩张映象; 非扩张映象; 不动点; 迭代逼近
中图分类号: O197.91 文献标识码: A

1 引言及预备知识

本文处处设 E 是一实的 Banach 空间, E^* 是 E 的对偶空间, D 是 E 之一非空子集, $J: E \to 2^{E^*}$ 是由下式定义的正规对偶映象:

$$J(x) = \left\{f \in E^*: \langle x, f\rangle = \|x\| \|f\|, \ \|x\| = \|f\|\right\} \qquad x \in E• \tag{1}$$

定义 1 设 $T: D \to D$ 是一映象•

1. T 称为渐近非扩张的[1], 如果存在一序列 $\{k_n\} \subset [1, \infty)$, $\lim_{n\to\infty} k_n = 1$ 使得

$$\|T^n x - T^n y\| \leqslant k_n \|x - y\| \qquad \forall x, y \in D, n \geqslant 1;$$

2. T 称为非扩张的, 如果上式中的序列 $\{k_n\}$ 是一常数序列 $\{1\}$•

定义 2 设 $U = \{x \in E: \|x\| = 1\}$• E 的范数称为一致 Gâteaux 可微的, 如果对每一 $y \in U$, 下面的极限

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$$

对 $x \in U$ 一致地成立•

如所周知下面的命题成立•

命题 1[2,3] 设 E 是一 Banach 空间, 其范数是一致 Gâteaux 可微的, 则由(1) 式定义的正规对偶映象 $J: E \to 2^{E^*}$ 是单值的, 而且在 E 的每一有界集上是由 E 的强拓扑到 E^* 的弱* 拓扑是一致连续的•

定义 3 设 D 是 E 之一非空闭凸集, $x \in D$ 是一给定点, $T: D \to D$ 是一映象•

1. 当 T 是具序列 $\{k_n\} \subset [1, \infty)$, $k_n \to 1$ 的渐近非扩张映象时, 则由下式定义的序列 $\{x_n\}$:

* 收稿日期: 2002_01_17; 修订日期: 2003_03_15
作者简介: 张石生(1934—), 男, 云南曲靖人, 教授(E_mail: sszhang_1@mail.yahoo.com.cn)•

$$\begin{cases} x_0 \in D, \\ x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n) T^n y_n \quad n \geq 0, \\ y_n = \beta_n x_n + (1-\beta_n) T^n x_n \end{cases} \tag{2}$$

称为第一型的修正的 Reich 序列, 其中$\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$ 是[0, 1] 中的两个数列;

2. 在(2) 中, 如果 $\beta_n = 1$, $\forall n \geq 0$, 则 $y_n = x_n$. 于是由下式定义的序列$\{x_n\}$:

$$\begin{cases} x_0 \in D, \\ x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n) T^n x_n \quad n \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

称为第二型的修正的 Reich 序列, 其中$\{\alpha_n\}$ 是[0, 1] 中的数列;

3. 当 T 是一非扩张映象时, 则由下式定义的序列$\{x_n\}$:

$$\begin{cases} x_0 \in D, \\ x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n) T y_n \quad n \geq 0, \\ y_n = \beta_n x_n + (1-\beta_n) T x_n \end{cases} \tag{4}$$

及由下式定义的序列$\{x_n\}$:

$$\begin{cases} x_0 \in D, \\ x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n) T x_n \quad n \geq 0 \end{cases} \tag{5}$$

都称为Reich 序列, 其中$\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$ 是[0, 1] 中的两个数列.

关于由(5) 式定义的Reich 序列$\{x_n\}$ 的收敛性问题, Reich 提出下面的公开问题:

公开问题(Reich[4]) 设 E 是一 Banach 空间. 问是否存在这样的数列$\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$, 使得对 E 中任意的关于非扩张映象具不动点性质的弱紧凸子集D, 及对任意的非扩张映象 $T: D \to D$ 和任意的$x \in D$, 由(5) 式定义的序列$\{x_n\}$收敛于T 之一不动点?

关于上述公开问题, 尽管 Reich[5, 4] 在 E 是一致光滑的Banach 空间且$\{\alpha_n\} = \{n^{-a}\}$, $0 < a < 1$ 的条件下曾给出一个肯定的答复, 但这一问题一般来说仍未解决.

1992 年Wittmann[6] 在 E 是Hilbert 空间且$\{\alpha_n\}$ 满足

$$0 \leq \alpha_n \leq 1, \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty \tag{6}$$

的条件下也给出一个肯定的答复.

1997 年 Shioji, Takahashi[7] 把 Wittmann 的结果推广到具一致 Gâteaux 可微范数的 Banach 空间.

本文的目的是研究由(2) 和(3) 所定义的第一型和第二型的修正的 Reich 序列$\{x_n\}$ 及由(4) 和(5) 所定义的 Reich 序列的收敛性问题. 所得结果不仅在更一般的条件和更广泛的形式下, 对 Reich 的公开问题给出肯定的答复, 而且也推广和改进了Reich[4, 5], Shioji, Takahashi[7, 8] 和Wittmann[6] 中的相应的结果.

本文的主要结果是下面的:

定理 1 设 E 是一实Banach 空间, 且 E 的范数是一致Gâteaux 可微的. 设 D 是E 之一非空闭凸子集, $T: D \to D$ 是具序列$\{k_n\} \subset [1, \infty)$, $k_n \to 1$, $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ 的渐近非扩张映象, 且 T 在D 中的不动点集$F(T) \neq \emptyset$. 设$\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$ 是[0, 1] 中的二序列满足下列条件:

$$\alpha_n \to 0 \quad (n \to \infty); \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty. \tag{7}$$

对任给的 $x \in D$ 及对任一 $n \geqslant 1$, 定义一压缩映象 $S_n: D \to D$ 如下:

$$S_n(z) = (1 - d_n)x + d_n T^n z,$$

其中

$$d_n = \frac{t_n}{k_n} \quad (n = 1, 2, \cdots) \ t_n \in (0, 1), \ t_n \to 1 \ (n \to \infty) \cdot$$

设 z_n 是 S_n 的唯一不动点, 即 z_n 满足:

$$z_n = S_n(z_n) = (1 - d_n)x + d_n T^n z_n \qquad n \geqslant 1 \cdot \tag{8}$$

如果 $\{z_n\}$ 当 $n \to \infty$ 时强收敛于 T 的某一不动点 $z \in F(T)$, 则由(2) 定义的第一型的修正的 Reich 序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 的不动点 z 的充分必要条件是: 由(2) 式定义的序列 $\{y_n\}$ 是有界的·

定理 2 如果定理 1 中的条件被满足, 则由(3) 式定义的第二型的修正的 Reich 序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 的不动点 z 的充分必要条件是 $\{x_n\}$ 有界·

定理 3 设 E 是一实 Banach 空间, 其范数是一致 Gâteaux 可微的· 设 D 是 E 之一非空闭凸子集, $T: D \to D$ 是一非扩张映象且 T 的不动集 $F(T) \neq \emptyset$· 设 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中的两个序列且满足条件(7)· 设 $x \in D$· 定义一压缩映象 $S_t: D \to D$ 如下:

$$S_t(z) = (1 - t)x + tTz \qquad z \in D,$$

其中

$$0 < t < 1, \ t \to 1- \cdot$$

设 z_t 是 S_t 的唯一不动点· 如果当 $t \to 1-$ 时, z_t 强收敛于某一 $z \in F(T)$, 则由(4) 或(5) 所定义的 Reich 序列 $\{x_n\}$ 都强收敛于不动点 z·

下面的两个引理在证明本文主要结果时起到重要的作用·

引理 1(Chang[9]) 设 E 是实 Banach 空间, 设 $J: E \to 2^{E^*}$ 是正规对偶映象, 则对任意的 x, $y \in E$, 下列不等式成立:

(a) $\|x + y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\langle y, j(x + y)\rangle, \quad \forall j(x + y) \in J(x + y);$

(b) $\|x + y\|^2 \geqslant \|x\|^2 + 2\langle y, j(x)\rangle, \quad \forall j(x) \in J(x)$·

为了完全起见, 我们给出其证明·

事实上, 由一已知结果(见, Asplund[3]), J 可以等价地定义为泛函 $\phi(x) = \|x\|^2/2$ 的次微分, 即 $J(x) = \partial\phi(x)$, 故对任意的 $j(x + y) \in J(x + y)$ 有

$$\frac{\|x\|^2}{2} - \frac{\|x + y\|^2}{2} \geqslant \langle x - (x + y), j(x + y)\rangle = -\langle y, j(x + y)\rangle \cdot$$

从而得知结论(a) 成立·

类似地, 对任一 $j(x) \in J(x)$ 有

$$\frac{\|x + y\|^2}{2} - \frac{\|x\|^2}{2} \geqslant \langle (x + y) - x, j(x)\rangle = \langle y, j(x)\rangle \cdot$$

故结论(b) 也成立· 证毕·

引理 2[10] 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 是 3 个非负序列满足条件: 存在正整数 n_0, 当 $n \geqslant n_0$ 时有

$$a_{n+1} \leqslant (1 - \lambda_n)a_n + b_n + c_n \qquad \forall n \geqslant n_0,$$

其中 $\{\lambda_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中的序列, $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n = \infty$, $b_n = 0(\lambda_n)$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$, 则 $a_n \to 0 (n \to \infty)$·

2 主要结果的证明

定理 1 的证明

“必要性”　设$\{x_n\}$强收敛于$z\in F(T)$. 于是由(2)和T的渐近非扩张性知

$$\begin{aligned}\|y_n-z\| &= \|\beta_n(x_n-z)+(1-\beta_n)(T^nx_n-z)\|\leqslant \\ &\beta_n\|x_n-z\|+(1-\beta_n)k_n\|x_n-z\|\leqslant \\ &k_n\|x_n-z\|\to 0\quad (n\to\infty).\end{aligned}\tag{9}$$

故$y_n\to z(n\to\infty)$. 因而$\{y_n\}$是一有界列.

“充分性”　设$\{y_n\}$是有界的. 于是由$k_n\to 1(n\to\infty)$知数列$\{k_n\}$也是有界的. 又由(2)知

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-z\| &= \|\alpha_n(x-z)+(1-\alpha_n)(T^ny_n-z)\|\leqslant \\ &\alpha_n\|x-z\|+(1-\alpha_n)k_n\|y_n-z\|\leqslant M\qquad \forall n\geqslant 0,\end{aligned}\tag{10}$$

其中$M=\max\left\{\|x-z\|,\ \sup\limits_{n\geqslant 0}k_n\cdot\|y_n-z\|\right\}$; 另因

$$\|T^nx_n-z\|\leqslant k_n\|x_n-z\|\qquad \forall n\geqslant 0;\tag{11}$$

$$\|T^ny_n-z\|\leqslant k_n\|y_n-z\|\qquad \forall n\geqslant 0.\tag{12}$$

故$\{x_n\},\{T^nx_n\},\{T^ny_n\}$均是有界列.

另由假定条件, E的范数是一致Gâteaux可微的, 于是由命题1知正规对偶映象$J: E\to 2^{E^*}$是由E的强拓扑到E^*的弱*拓扑一致连续. 因此对任意的$n\geqslant 0$, 由(2)和引理1(a)有

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-z\|^2 &= \|(1-\alpha_n)(T^ny_n-z)+\alpha_n(x-z)\|^2\leqslant \\ &(1-\alpha_n)^2\|T^ny_n-z\|^2+2\alpha_n\langle x-z, J(x_{n+1}-z)\rangle\leqslant \\ &(1-\alpha_n)^2k_n^2\|y_n-z\|^2+2\alpha_n\langle x-z, J(x_{n+1}-z)\rangle.\end{aligned}\tag{13}$$

现考察(13)式右端第1项. 由(9)有

$$\begin{aligned}(1-\alpha_n)^2k_n^2\|y_n-z\|^2 &\leqslant (1-\alpha_n)k_n^4\|x_n-z\|^2= \\ &(1-\alpha_n)\|x_n-z\|^2+(k_n^4-1)(1-\alpha_n)\|x_n-z\|^2\leqslant \\ &(1-\alpha_n)\|x_n-z\|^2+(k_n-1)\cdot M_1,\end{aligned}\tag{14}$$

其中$M_1=\sup\limits_{n\geqslant 0}\{(k_n^3+k_n^2+k_n+1)\}\cdot\sup\limits_{n\geqslant 0}\|x_n-z\|^2$.

下面考察(13)式右端第2项. 由(8)知

$$x_n-z_m=(1-d_m)(x_n-x)+d_m(x_n-T^mz_m)\qquad \forall n\geqslant 0\text{ 及 }\forall m\geqslant 1.\tag{15}$$

于是由引理1(b)和(15)有

$$\begin{aligned}d_m^2\|x_n-T^mz_m\|^2 &= \|(x_n-z_m)-(1-d_m)(x_n-x)\|^2\geqslant \\ &\|x_n-z_m\|^2-2(1-d_m)\langle x_n-x, J(x_n-z_m)\rangle= \\ &\|x_n-z_m\|^2-2(1-d_m)\langle x_n-z_m+z_m-x, J(x_n-z_m)\rangle= \\ &(1-2(1-d_m))\|x_n-z_m\|^2+2(1-d_m)\langle x-z_m, J(x_n-z_m)\rangle.\end{aligned}$$

移项化简得

$$\frac{d_m^2}{1-d_m}\|x_n-T^mz_m\|^2+\frac{1-2d_m}{1-d_m}\|x_n-z_m\|^2\geqslant 2\langle x-z_m, J(x_n-z_m)\rangle.\tag{16}$$

由假定, $z_m\to z\in F(T)$, 于是有

$$\lim_{m\to\infty}\|T^mz_m-z\|\leqslant\lim_{m\to\infty}k_m\|z_m-z\|=0,$$

即 $T^m z_m \to z\ (m \to \infty)$. 因而

$$\lim_{m\to\infty} \| x_n - z_m \| = \lim_{m\to\infty} \| x_n - T^m z_m \| = \| x_n - z \|. \tag{17}$$

现在(16)式两端让 $m \to \infty$ 取极限. 利用(17),于是(16)式左端的极限为

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty}\left\{ \frac{d_m^2}{1-d_m} \| x_n - T^m z_m \|^2 + \frac{1-2d_m}{1-d_m} \| x_n - z_m \|^2 \right\} = \\
&\quad \lim_{m\to\infty}\left\{ \frac{d_m^2 + (1-2d_m)}{1-d_m} \| x_n - z_m \|^2 \right\} = \\
&\quad \lim_{m\to\infty}(1-d_m) \| x_n - z_m \|^2 = \\
&\quad 0 \cdot \| x_n - z \|^2 = 0 \qquad (\text{因 } d_m \to 1).
\end{aligned} \tag{18}$$

利用正规对偶象 J 的强弱* 的一致连续性,(16)式右端的极限为

$$\lim_{m\to\infty} 2\langle x - z_m, J(x_n - z_m)\rangle = 2\langle x - z, J(x_n - z)\rangle. \tag{19}$$

于是由(16),(18)和(19)有

$$\langle x - z, J(x_n - z)\rangle \leqslant 0 \qquad \forall n \geqslant 0.$$

从而有

$$\limsup_{n\to\infty} \langle x - z, J(x_n - z)\rangle \leqslant 0. \tag{20}$$

于是对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 n_0, 当 $n \geqslant n_0$ 时

$$\langle x - z, J(x_n - z)\rangle < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是当 $n \geqslant n_0$ 时有

$$2\alpha_n \langle x - z, J(x_n - z)\rangle < \alpha_n \cdot \varepsilon. \tag{21}$$

令 $b_n = 2\alpha_n \max\left\{ \langle x - z, J(x_n - z)\rangle, 0\right\}$. 于是由(21)知

$$b_n = 0(\alpha_n). \tag{22}$$

把(14)和(22)代入(13)化简得

$$\| x_{n+1} - z \|^2 \leqslant (1-\alpha_n) \| x_n - z \|^2 + b_n + c_n \qquad \forall n \geqslant 0,$$

其中 $c_n = (k_n - 1)M_1$, 因

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} (k_n - 1) M_1 < \infty,\ b_n = 0(\alpha_n),\ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty.$$

令 $\qquad a_n = \| x_n - z \|^2,\ \lambda_n = \alpha_n$,

由引理2知 $a_n \to 0\ (n \to \infty)$, 即 $x_n \to z\ (n \to \infty)$.

定理1证毕.

定理2的证明

在(2)中取 $\beta_n = 1$, $\forall n \geqslant 0$, 于是 $y_n = x_n$, $\forall n \geqslant 0$. 因而由(2)式所定义的第一型的修正的Reich序列$\{x_n\}$,就化为由(3)定义的第二型的修正的Reich序列$\{x_n\}$. 于是定理2的结论由定理1直接可得.

定理3的证明

因 $T: D \to D$ 是非扩张映象,故 T 是具常数列$\{k_n = 1\}$的渐近非扩张映象且$\{k_n\}$满足条件 $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) = 0 < \infty$.

为了证明定理3的结论,我们只需证明由(4)式所定义的序列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$及(5)式所定

义的序列$\{x_n\}$都是有界的即可• 为简单起见, 我们只证由(4) 式所定义的$\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 是有界的•

事实上, 令

$$M = \max\{\|x_1 - z\|, \|x - z\|\}, \tag{23}$$

其中 $x \in D, z \in F(T)$ 是定理 3 中给定的点• 下面用归纳法证明

$$\begin{cases} \|x_n - z\| \leqslant M & \forall n \geqslant 1, \\ \|y_n - z\| \leqslant M & \forall n \geqslant 1 . \end{cases} \tag{24}$$

事实上, 当 $n = 1$ 时, 由(23) 有

$$\|x_1 - z\| \leqslant M;$$

而且

$$\|y_1 - z\| = \|\beta_1(x_1 - z) + (1 - \beta_1)(Tx_1 - z)\| \leqslant \beta_1\|x_1 - z\| + (1 - \beta_1)\|x_1 - z\| \leqslant M .$$

故当 $n = 1$ 时, (24) 的结论成立•

设当 $n = k$ 时, (24) 的结论成立, 下证当 $n = k + 1$ 时(24) 的结论也成立•

由(4) 有

$$\|x_{k+1} - z\| = \|\alpha_k(x - z) + (1 - \alpha_k)(Ty_k - z)\| \leqslant \alpha_k\|x - z\| + (1 - \alpha_k)\|y_k - z\| \leqslant M;$$

$$\|y_{k+1} - z\| = \|\beta_{k+1}(x_{k+1} - z) + (1 - \beta_{k+1})(Tx_{k+1} - z)\| \leqslant \beta_{k+1}\|x_{k+1} - z\| + (1 - \beta_{k+1})\|x_{k+1} - z\| \leqslant M .$$

这表明(24) 的结论为真, 故$\{x_n\}$和$\{y_n\}$ 都是有界的• 故定理 3 的结论可以用类似于在定理 1 和定理2 证明中所使用的方法直接可得•

定理 3 得证•

注 1 在 Reich[5] 及Takahashi[8] 中的均指出: 如果定理3 中的集合 D 还满足附加条件:“ D 是 E 中的弱紧凸集”, 则序列$\{z_t\}$ 其满足下列条件:

$$z_t = tx + (1 - t)Tz_t \qquad t \in (0, 1)$$

强收敛于 T 之一不动点 $z \in D$ •

注 2 定理 3 不仅在更一般的形式和在更一般的条件下对 Reich 的公开问题给出了一个肯定的答复, 而且在下列几方面推广和改进了 Wittmann[6], Shioji, Takahashi[7] 中的相应的结果:

1) 放弃了 Shioji, Takahashi[7] 及 Wittmann[6] 中的条件 $\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$;

2) 把由(5) 式定义的序列$\{x_n\}$ 推广到由(4) 式定义的序列$\{x_n\}$ •

3) 在证明方法上也与[4, 6, 7] 中的方法迥然相异•

注 3 定理 1 也是一个新结果, 它不仅对第一型的修正的 Reich 序列的收敛性给出一个充分必要条件, 而且在证明方法上也与 Reich[4], Shioji, Takahashi[7] 和 Wittmann[6] 中的迥异•

[参　考　文　献]

[1] Goebel K, Kirk W A. A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings[J]. Proc Amer Math Soc, 1972, **35**(1): 171—174.

[2] Deimling K. Nonlinear Functional Analysis[M]. Berlin: Springer_Verlag, 1985.

[3] Asplund E. Positivity of duality mappings[J]. Bull Amer Math Soc, 1967, **73**: 200—203.

[4] Reich S. Some problems and results in fixed point theory[J]. Contem Math, 1983, **21**: 179—187.

[5] Reich S. Strong convergence theorems for resolvent of accretive mappings in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1980, **75**: 287—292.

[6] Wittmann R. Approximation of fixed points of nonexpansive mappings[J]. Arch Math, 1992, **58**: 486—491.

[7] Shioji N, Takahashi W. Strong convergence of approximated sequence for nonexpansive mappings [J]. Proc Amer Math Soc, 1997, **125**(12): 3641—3645.

[8] Takahashi W. On Reich's strong convergence theorems for resolvents of accretive operators[J]. J Math Anal Appl, 1984, **104**: 546—553.

[9] Chang S S. Some problems and results in the study of nonlinear analysis[J]. Nonlinear Anal TMA, 1997, **30**(7): 4197—4208.

[10] Liu L S. Ishikawa and Mann iterative processes with errors for nonlinear strongly accretive mappings in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1995, **194**: 114—125.

On Reich's Open Question

ZHANG Shi_sheng[1, 2]

(1. Department of Mathematics, Yibin University, Yibin, Sichuan 644007, P. R. China;

2. Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, P. R. China)

Abstract: Under more general form and more general conditions an affirmative answer to Reich's open question is given. The results presented also extend and improve some recent results of Reich, Shioji, Takahashi and Wittmann.

Key words: asymptotically nonexpansive mapping; nonexpansive mapping; fixed point; iterative approximation