应用数学和力学,第 24 卷 第 6 期(2003 年 6 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 06_0579_04

股价最简微分方程,其解及与 Black_Scholes 模型的假设的相互关系*

云天铨[1], 雷光龙[2]

(1. 华南理工大学 力学系, 广州 510641;
2. 湖南大学 工商管理学院, 长沙 410082)

(我刊原编委云天铨来稿)

摘要: 在系数的某种等价关系条件下, 股价的两类数学表达式, 一类是基于明确型描述的由类似固体力学方法导出的最简微分方程(S. D. E.)的解, 另一类是基于不确定型描述(即统计理论)的 Black_Scholes 模型的假设(A. B_S. M.), 即股价密度函数服从对数正态分布, 可以是完全相同的• S. D. E. 的解仅适用于股市的常规情形(无利好或利空消息, 等), 因此, A. B_S. M. 的适用范围也相同•

关 键 词: 股票市场; 期权定价; Black_Scholes 模型; 概率与确定性; 微分方程
中图分类号: F830.9 文献标识码: A

1 股市的数学分析现状和两类分析体系

股市栏目下的出版物, 包括多达一、二百种的当代权威理论[1], 多属资料收集、获利经验、操盘对策、定性分析, 或用初等数学作技术分析等; 总体处于记述性、描述性阶段, 谈不上规律的定量探讨•

对股市行为采用数学分析工具和模型进行探讨的文献, 反而不在股市栏目而在期权定价的探讨中• 股票期权的定价, 需要了解股票价格的变化• 在对股价变化一无所知的情况下, 只好依赖于假设• 不同的模型用不同的假设•

当今国际主流学派所用的模型, 几乎全是统计概率型的模型• 如 Sprenkle(1960) 概率模型; Merton 的"Util_概率"模型; Black_Scholes 模型; Cox 的 CEV 模型; Merton 的跳_扩散模型; 二项式模型和 Gastineau_Mandansky 模型等等[2]• 其中以 B_S 模型最易使用和最受行家引用而最具权威性(B_S 公式制定人获 1997 年诺贝尔经济学奖)• B_S 模型假设股价按几何布朗运动, 呈对数正态分布•

B_S 模型的股价呈对数正态分布的假定, 是否符合市场实际? 有无被验证? 是备受质疑的• 文[3]认为"不大可能呈对数正态分布" 或"并没有取得实证检验"• 文[4]评论"B_S 模型

* 收稿日期: 2002_02_06; 修订日期: 2003_02_19
基金项目: 湖南省科委软科学基金资助项目(02ZRN2030)
作者简介: 云天铨(1936—), 男, 海南文昌人, 教授, 发表论文约 100 篇(E_mail: cttqyun@scut.edu.cn);
雷光龙(1964—), 男, 湖南安乡人, 副教授, 发表论文约 40 篇(E_mail: 8823800@vip.sina.com)•

统计上明显的偏差摆在那里, 但并没有一个更高明的模型可以取代它”•

我们认为股市千变万化, 数据多不胜数• 一个理论或者假设, 总可以找到一些数据支持它, 也可以找到另一些数据反对它• 关键是要找到理论或假设的适用范围• 本文将从另外的途径来指出 B_S 模型的这一假定的适用范围•

描述科学问题, 有两种体系: 一是明确型(确定论体系), 另一是不确定型(概率论体系)• 在牛顿力学和学校数学教学传统中, 前者占统治地位• 在现代物理中除少数决定论拥护者(如爱因斯坦)外, 后者占统治地位[5]• 在经济(证券)领域更是概率论一统天下• 尽管概率论在许多领域取得很出色成就, 但它的描述是不确定的• 对于即使是只有几千万分之一的概率的个别事件, 它却不能确定不会发生• 这种不确定性是人类认识上的一种遗憾• 追求完美, 追求用确定性去描述和认识世界是一种永恒的动力• 那怕道路再漫长、曲折, 目标再遥远, 也将一步步地逼近•

本文作者的所有工作[6~13], 走的是与当前国际主流学派不同的道路, 即用确定性去描述证券市场行为• 其中行为的规律性, 用明确的微分方程来体现; 行为的多样性(可变性)用微分方程的系数, 初始条件去反映•

2　股价最简微分方程

按我们最简单的假设, 可得如下的买入和卖出的量的方程:

$$A_{\mathrm{p}}(t+\Delta t)=p_1 v^{-1}(t)+p_2\dot{v}(t), \tag{1}$$

$$A_{\mathrm{s}}(t+\Delta t)=s_1 v(t)-s_2\dot{v}(t), \tag{2}$$

式中 A 代表量; v, $\dot{v}$ 分别代表股价和股价变化率; t 代表时间, Δt 为时间增量; 下标或字符 p, s 分别代表买入和卖出• p_1, p_2, s_1, s_2 分别是买入和卖出的系数•

(1) 式表示时刻 $t+\Delta t$ 的买入量与时刻 t 的股价成反比, 与股价变化率成正比• (2) 式表示卖出和买入服从相反规律, 即卖出量与股价成正比, 与股价变化率的负值成正比(避免采用与 $\dot{v}$ 成反比, 当 $\dot{v}=0$ 时计算出现无穷大)• 这两式中都应用了“最近时原理”[9]•

按照股价升降由求供关系决定的假定, 得

$$\dot{v}(t)\Delta t=v(t+\Delta t)-v(t)=g\cdot\left[A_{\mathrm{p}}(t)-A_{\mathrm{s}}(t)\right], \tag{3}$$

式中常数 g 使式子左右量纲相等• 其中 $\dot{v}(t)$ 定义为

$$\dot{v}(t)=\left[v(t+\Delta t)-v(t)\right]/\Delta t\qquad(\min\ \Delta t), \tag{4}$$

(3) 式表示求供差与股价变化率成正比• 将(1)、(2)式代入(3)式, 取 $\Delta t=1$, 略去 $\dot{v}(t)$ 与 $\dot{v}(t+\Delta t)$ 的区别, 得:

$$k\dot{v}(t)=cv^{-1}(t)-dv(t), \tag{5}$$

式中 $k=1-g(p_2+s_2)$, $c=gp_1$, $d=gs_1$ 皆为常数•

(5) 式就是股价最简微分方程• 指数期货和期权的市场价格都可导出与(5)式同类型的微分方程[11,12]•

3　股价最简微分方程的解及其与 B_S 模型假设关系

设(5)式的解为:

$$v^2(t)=B_1+B_2\exp(B_3 t), \tag{6}$$

式中 B_1、B_2、B_3 为待定常数•

(6) 式两边对 t 求导, 并代入(5)式和(6)式, 得:

$$B_1 = c/d, \quad B_3 = -2d/k, \tag{7}$$

剩下的常数 B_2, 由微分方程的初始条件确定• 设时刻 $t = 0$ 的股价 $v(0)$ 已知, 将 $t = 0$ 代入(6)式得:

$$B_2 = v^2(0) - B_1 = v^2(0) - c/d, \tag{8}$$

于是(5)式的解为:

$$v^2(t) = c/d + [v^2(0) - c/d]\exp[(-2d/k)t]• \tag{9}$$

解(9)式显示出股价 $v(t)$ 的走势, 而 B_S 模型的假设则表达股价的概率分布• 这二者本是互不关联的两码事• 不过, 二者的数学表达式有共同之处, 当赋予公式变量以新的含义时, 二者可看成等价•

B_S 模型的假定之一是: 随机变量股价 s 呈对数正态分布• 即分布密度 $\varphi_{\ln}(s)$ 为[14]:

$$\varphi_{\ln}(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma s}\mathrm{e}^{-(\ln s-\mu)^2/2\sigma^2} & s > 0, \\ 0 & s \leqslant 0• \end{cases} \tag{10}$$

变换变量, 令

$$x = (\ln s - \mu)/\sigma, \tag{11}$$

化为标准型, 其分布函数 $F(x)$ 为:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-u^2/2}\mathrm{d}u = P(s < x), \tag{12}$$

式中 s 为随机变量, x 为给定股价 s 由(11)式定的值, μ 和 σ 分别为均值与标准差, P 为 $(s < x)$ 的概率•

将(9)或(6)式变换坐标消去 B_1 后, 两边开方后得到

$$v_1(t) = \sqrt{v^2(t) - B_1} = \sqrt{B_2}\,\mathrm{e}^{B_3 t/2}• \tag{13}$$

若令 $\quad B_3 t = -x^2, \qquad (14)$

则(13)式与(10)式的标准化型式有同样的函数表达式, 即同为 e 的同幂次函数• 也就是说本文的解(9)式和 B_S 模型假定的对数正态分布的分布密度一致• 为进一步明确二者的联系, 将(13)式两边取对数, 得

$$t = 2(\ln v_1(t) - \ln\sqrt{B_2})/B_3, \tag{15}$$

代入(14)及(11)式, 得:

$$\sigma^2 = B_3, \quad \mu = \ln\sqrt{B_2}, \quad s = v_1• \tag{16}$$

这就是说, 当满足(14)式和(16)式时, 本文的解(9)式与 B_S 模型假设的分布密度完全一致•

4　本文的解(9)式及 B_S 模型假设的适用范围

本文的股价微分方程(5)是股价微分方程中最简单的一种情形• 它的(1)、(2)式只取[8]中的前二项, 略去 $A_p(t)$ 及 $A_s(t)$ 等项, 代表投资者只根据股价及股价变化率决定买卖策略• 这属于文[7]称之为常规(无利好, 利空消息)情形• 因为忽略了由"从势原理"[9]引起的不稳定因素, 常规情形是一种稳定的情形, 文[13]从博奕论的角度指出常规情形是稳定的•

显然本文的解(9)式, 只适用于股市的常规情形• 根据(13)与(10)的标准型的一致性, 可以推知: B_S 模型的假设: 股价呈对数正态分布也仅适用于股市的常规情形•

[参　考　文　献]

[1]　钱可通. 当代投资权威理论[M]. 香港: 香港出版集团有限公司, 1990, 1—25.

[2] Ghaziri H, Elfakhani S, Assi J. Neural networks approach to pricing options[J]. Neural Network World, 2000, (1/2): 271—277.
[3] 谢素. 不变方差弹性(CEV)过程障碍期权的定价[J]. 管理科学学报, 2001, **4**(5): 13—20.
[4] 钱立. 简评期权定价理论的主要发展[J]. 经济科学, 2000, (4): 89—97.
[5] 柳延延. 概率与决定论[M]. 上海: 上海社会科学院出版社, 1996, 6.
[6] 云天铨. 股价变化率的基本积分_微分方程[J]. 华南理工大学学报, 1996, **24**(6): 35—39.
[7] 云天铨. 常规情形的股价短期预测[J]. 华南理工大学学报, 1997, **25**(5): 47—51.
[8] 云天铨. 计算股市的基本方程、理论和原理(Ⅰ)——基本方程[J]. 应用数学和力学, 1999, **20**(2): 145—152.
[9] 云天铨. 计算股市的基本方程、理论和原理(Ⅱ)——基本原理[J]. 应用数学和力学, 1999, **20**(7): 675—681.
[10] 云天铨. 计算股市的基本方程、理论和原理(Ⅲ)——基本理论[J]. 应用数学和力学, 2000, **21**(8): 777—781.
[11] 云天铨. 金融衍生产品的力学方法分析(Ⅰ)——期指价格基本方程[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(1): 104—110.
[12] 云天铨. 金融衍生产品的力学方法分析(Ⅱ)——期权市场价格基本方程[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(9): 905—910.
[13] 云天铨. 博奕理论在股票和期权交易中的应用[J]. 预测, 2001, (2): 36—38.
[14] 《数学手册》编写组. 数学手册[M]. 北京: 高等教育出版社, 1979, 798.

Simplest Differential Equation of Stock Price, Its Solution and Relation to Assumption of Black_Scholes Model

YUN Tian_quan[1], LEI Guang_long[2]

(1. Department of Mechanics, South China University of Technology, Guangzhou 510641, P. R. China;
2. College of Administration of Industry & Commerce, Hunan University, Changsha 410082, P. R. China)

Abstract: Two kinds of mathematical expressions of stock price, one of which based on certain description is the solution of the simplest differential equation (S. D. E.) obtained by method similar to that used in solid mechanics, the other based on uncertain description (i. e., the statistic theory) is the assumption of Black_Scholes's model (A. B_S. M.) in which the density function of stock price obeys logarithmic normal distribution, can be shown to be completely the same under certain equivalence relation of coefficients. The range of the solution of S. D. E. has been shown to be suited only for normal cases (no profit, or lost profit news, etc.) of stock market, so the same range is suited for A. B_S. M. as well.

Key words: stock market; option pricing; Black_Scholes model; probability and certainty; differential equation