应用数学和力学,第 24 卷 第 6 期(2003 年 6 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 06_0595_10

一类广义耦合的非线性波动方程组时间周期解的存在性*

房少梅[1,2], 郭柏灵[3]

(1. 广东韶关学院 数学系,广东韶关 512005;
2. 中国工程物理研究院 研究生部, 北京 100088;
3. 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

(我刊编委郭柏灵来稿)

摘要: 研究了一类广义耦合的非线性波动方程组关于时间周期解的问题· 首先利用 Galerkin 方法构造近似时间周期解序列,然后利用先验估计和 Laray_Schauder 不动点原理,证明近似时间周期解序列的收敛性,从而得到该问题时间周期解的存在性·

关 键 词: 非线性波动方程组; 先验估计; 时间周期解
中图分类号: O175.25; O175.29 文献标识码: A

引 言

文[1]给出了如下非线性方程组的光滑解的存在性

$$u_t = u_{xxx} + buu_x + 2vv_x, \tag{1}$$

$$v_t = 2(uv)_x \cdot \tag{2}$$

该方程组描述了内长波相互作用的过程· Ito M. 提出了一个构造循环算子的方法[2], 由此推出方程(1)~(2)具有无穷多个对称和运动常数· P. F. He[3]得到了耦合非线性 KdV 方程组[4]的光滑解的存在性

$$u_t = a(u_{xxx} + buu_x) + 2bvv_x, \tag{3}$$

$$v_t = -v_{xxx} - 3uv_x, \tag{4}$$

其中 a 和 b 是常数·

我们注意到 M. E. Schonbek[5]对于类似的耦合非线性方程系统[6]

$$u_t = u_{xxx} - uu_x - v_x, \tag{5}$$

$$v_t = -(uv)_x \tag{6}$$

使用抛物正则化方法和 L^1 里弱紧集的 Dunford 定理证明了它的弱解的整体存在性·

本文, 我们研究了如下具有周期边界条件的耗散耦合非线性波动方程的时间周期解

$$u_t + f(u)_x - \alpha u_{xx} + \beta u_{xxx} + 2vv_x = G_1(u, v) + h_1(x), \tag{7}$$

* 收稿日期: 2001_05_28; 修订日期: 2003_03_03
作者简介: 房少梅(1964—), 女, 安徽淮北人, 副教授, 博士, 研究方向: 无穷维动力系统与计算可视化(E_mail: dz90@163.net)·

$$v_t - \gamma v_{xx} + (2uv)_x + g(v)_x = G_2(u,v) + h_2(x), \tag{8}$$

$$u(x,t+\omega) = u(x,t),\ v(x,t+\omega) = v(x,t) \qquad x \in \mathbf{R},\ t \in \mathbf{R}, \tag{9}$$

$$u(x+D,t) = u(x-D,t),\ v(x+D,t) = v(x-D,t) \qquad x \in \mathbf{R},\ t \in \mathbf{R}, \tag{10}$$

其中 $\omega > 0$、$D > 0$、$\alpha > 0$、$\beta \neq 0$、$\gamma > 0$ 是实数• 函数 $u(x,t)$、$v(x,t)$ 是关于时间 t 的周期函数, 其周期同为 ω; 并且关于空间变量 x, 函数 $u(x,t)$、$v(x,t)$ 也是周期的, $f(u)$、$g(v)$、$G_1(u,v)$、$G_2(u,v)$ 为已知的实值函数• 我们证明了非线性波动方程组(7)~(10)时间周期强解的存在性•

为方便起见, 我们用 $\|\cdot\|$ 表示 $\|\cdot\|_{L^2}$, 用 $\|\cdot\|_p$ 表示 $\|\cdot\|_{L^p}$, 用 $\|\cdot\|_m$ 表示 $\|\cdot\|_{H^m}$, $\Omega = (-D, D)$, $t \geqslant 0$, $\omega > 0$•

本文中, $L_2(\Omega)$ 是具有如下内积

$$(u,v) = \int_\Omega uv\,\mathrm{d}x$$

的 Hilbert 空间•

设 X 是 Banach 空间, 我们定义 $C^K(\omega, X)$ 是 X 中具有 1 到 K 阶导数的周期函数(周期为 ω), 其范数定义如下:

$$\|u\|_{C^K(\omega,X)} = \sup_{0 \leqslant t \leqslant \omega} \sum_{i=1}^{K} \|D_t^i u\|_X•$$

用 $L_p(\omega, X)\ (1 \leqslant p < \infty)$ 表示 X 中具有模

$$\|u\|_{L_p(\omega,X)} = \left(\int_0^\omega \|u\|_X^p\right)^{1/p} \leqslant \infty \qquad (1 \leqslant p < \infty),$$

$$\|u\|_{L_\infty(\omega,X)} = \sup_{0 \leqslant t \leqslant \omega} \|u\|_X$$

的时间周期为 ω 的函数的集合•

1 近似解的存在性

我们运用 Galerkin 方法和 Laray_Schauder 不动点定理证明方程(7)~(10)的近似时间周期解的存在性•

设 $\omega_j(x)\ (j = 1, 2, \cdots)$ 为方程 $\Delta\omega_j + \lambda_j\omega_j = 0$ 具有周期边界条件(9)、(10)对应于特征值 $\lambda_j (j = 1, 2, \cdots)$ 的标准特征函数• 在 L^2 中生成标准正交基 $\left\{\omega_j(x)\right\}$•

设问题(7)~(10)的近似时间周期解 $u_N(x,t)$, $v_N(x,t)$ 具有如下形式

$$u_N(x,t) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{jN}(t)\,\omega_j(x),\quad v_N(x,t) = \sum_{j=1}^{N} \beta_{jN}(t)\,\omega_j(x), \tag{11}$$

其中 $\alpha_{jN}(t)$, $\beta_{jN}(t)\ (j = 1, 2, \cdots, N_j;\ N = 1, 2, \cdots)$ 是变元 $t \in \mathbf{R}^+$ 的系数函数• 按照 Galerkin 方法, 系数 $\alpha_{jN}(t)$、$\beta_{jN}(t)$ 必须满足如下的方程(12)~(13):

$$\begin{aligned}(u_{Nt} + f(u_N)_x - \alpha u_{Nxx} + \beta u_{Nxxx} + 2v_N v_{Nx} -\\ G_1(u_N, v_N) - h_1(x), \omega_j(x)) = 0,\end{aligned} \tag{12}$$

$$(v_{Nt} + g(v_N)_x - \gamma v_{Nxx} + 2(u_N v_N)_x - G_2(u_N, v_N) - h_2(x), \omega_j(x)) = 0• \tag{13}$$

这是一个一阶非线性常微分方程组, 我们用 Laray_Schauder 不动点定理来证明问题(12)~(13)的近似时间周期解的存在性•

对于任意的自然数 N, 设 H_N 是由 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N$ 张成的子空间, 记为 $H_N = \mathrm{span}\left\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N\right\}$•

设 $\xi_N(x,t)=\sum_{j=1}^{N}\delta_{jN}(t)\omega_j(x),\ \eta_N(x,t)=\sum_{j=1}^{N}\gamma_{jN}(t)\omega_j(x)$. (14)

我们定义算子 $T_\lambda:(\xi_N,\eta_N)\to(u_N,v_N)\ (0\leqslant\lambda\leqslant 1)$.

显然对任意 $(\xi_N,\eta_N)\in C^1(\omega,H_N)$, 如下的常微分线性方程组存在唯一的以 ω 为周期的解 $(u_N,v_N)\in C^1(\omega,H_N)$:

$$(u_{Nt}-\alpha u_{Nxx}+\beta u_{Nxxx}+\lambda M_1(\xi_N,\eta_N)-h_1(x),\ \omega_j(x))=0, \tag{15}$$

$$(v_{Nt}-\gamma v_{Nxx}+\lambda M_2(\xi_N,\eta_N)-h_2(x),\ \omega_j(x))=0, \tag{16}$$

其中

$$M_1(\xi_N,\eta_N)=f(\xi_N)_x+2\eta_N\eta_{Nx}-G_1(\xi_N,\eta_N),$$

$$M_2(\xi_N,\eta_N)=g(\eta_N)_x+2(\xi_N\eta_N)_x-G_2(\xi_N,\eta_N).$$

显然映射 $T_\lambda:(\xi_N,\eta_N)\to(u_N,v_N)$ 在 $C^1(\omega,H_N)$ 中是连续且紧的. 当 $\lambda=0$, 线性方程(15)~(16) 有唯一解

$$(\overline{u_N},\overline{v_N})=\left(\left\{\delta_{jN}(t)\right\},\left\{\gamma_{jN}(t)\right\}\right)\in C^1(\omega,H_N).$$

因此, T_0 有唯一不动点 $(\overline{u_N},\overline{v_N})$ 在 $C^1(\omega,H_N)$ 中. 要运用 Leray_Schauder 不动点定理证明映射 T_λ 中存在不动点, 我们只需要证明当用 $\lambda M_1(\xi_N,\eta_N)$、$\lambda M_2(\xi_N,\eta_N)$ 替代非线性项 $M_1(u_N,v_N)$、$M_2(u_N,v_N)$ 时方程(15)~(16) 的所有可能的解都满足下面不等式,

$$\|u_N\|^2+\|v_N\|^2\leqslant\left(\frac{1}{\omega}+1\right)E_1, \tag{17}$$

其中 E_1 是与 λ、N 无关的常数, 仅依赖于 α、β、γ、$\|h_1\|$ 和 $\|h_2\|$.

引理 1.1 设

1) $G_i(0,0)=0\ (i=1,2)$, $(\xi,\eta)\begin{pmatrix}-G_{1u} & -G_{2u}\\ -G_{1v} & -G_{2v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\geqslant b_0(|\xi|^2+|\eta|^2)$, $(\xi,\eta)\in R^2$, $b_0>0$ 是常数.

2) $h_i(x)\in L^2(\Omega)\ (i=1,2)$, $\Omega=(-D,D)$.

3) $u_N(x,t),\ v_N(x,t)\in C^1(\omega,H_N)$.

则有不等式(17) 成立.

证明 问题(15)~(16) 能写为如下的等价形式

$$\begin{aligned}&(u_{Nt}+\lambda f(u_N)_x-\alpha u_{Nxx}+\beta u_{Nxxx}+2\lambda v_Nv_{Nx}-\\ &\qquad\lambda G_1(u_N,v_N)-h_1(x),\ \omega_j(x))=0,\end{aligned} \tag{18}$$

$$(v_{Nt}+\lambda g(v_N)_x-\gamma v_{Nxx}+2\lambda(u_Nv_N)_x-\lambda G_2(u_N,v_N)-h_2(x),\ \omega_j(x))=0. \tag{19}$$

用 $\alpha_{jN}(t)$、$\beta_{jN}(t)$ 分别乘以(18)、(19), 从 1 到 N 对 j 求和, 有

$$\begin{aligned}&(u_{Nt}+\lambda f(u_N)_x-\alpha u_{Nxx}+\beta u_{Nxxx}+2\lambda v_Nv_{Nx}-\\ &\qquad\lambda G_1(u_N,v_N)-h_1(x),\ u_N)=0,\end{aligned} \tag{20}$$

$$(v_{Nt}+\lambda g(v_N)_x-\gamma v_{Nxx}+2\lambda(u_Nv_N)_x-\lambda G_2(u_N,v_N)-h_2(x),\ v_N)=0. \tag{21}$$

其中

$$(u_N,v_N)=\int_{-D}^{D}u_N(x,t)v_N(x,t)\,\mathrm{d}x,\quad (u_N,\lambda f(u_N)_x)=0,$$

$$(u_N,-\alpha u_{Nxx})=\alpha\|u_{Nx}\|^2,\quad (v_N,-\gamma v_{Nxx})=\gamma\|v_{Nx}\|^2,$$

$$(u_N,\beta u_{Nxxx})=0,\quad (v_N,\lambda g(v_N)_x)=0,$$

$$(u_N,2\lambda v_Nv_{Nx})+(v_N,2\lambda(u_Nv_N)_x)=2\lambda\left(\int u_Nv_Nv_{Nx}\,\mathrm{d}x-2\int u_Nv_Nv_{Nx}\,\mathrm{d}x\right)=0,$$

$$
\begin{aligned}
&(u_N,\ \lambda G_1(u_N, v_N)) + (v_N,\ \lambda G_2(u_N, v_N)) = \\
&\quad \lambda((u_N,\ G_{1u_N} u_N + G_{1v_N} v_N) + (v_N,\ G_{2u_N} u_N + G_{2v_N} v_N)) = \\
&\quad \lambda(u_N, v_N)\begin{pmatrix} -G_{1u_N} & -G_{2u_N} \\ -G_{1v_N} & -G_{2v_N} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_N \\ v_N \end{pmatrix} \leqslant -b_0\lambda(\|u_N\|^2 + \|v_N\|^2),
\end{aligned}
$$

$$
(u_N, h_1(x)) \leqslant \frac{b_0}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2b_0}\|h_1\|^2,
$$

$$
(v_N, h_2(x)) \leqslant \frac{b_0}{2}\|v\|^2 + \frac{1}{2b_0}\|h_2\|^2.
$$

(20)和(21)相加,得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u_N\|^2 + \|v_N\|^2) + \alpha\|u_{Nx}\|^2 + \gamma\|v_{Nx}\|^2 + \\
&\quad b_0(2\lambda - 1)(\|u_N\|^2 + \|v_N\|^2) \leqslant \frac{1}{2b_0}(\|h_1\|^2 + \|h_2\|^2). \qquad (22)
\end{aligned}
$$

在 $[0, \omega]$ 上对(22)积分,有

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\omega (\|u_N(\cdot, t)\|^2 + \|v_N(\cdot, t)\|^2)\mathrm{d}t \leqslant \\
&\quad \frac{\omega}{b_0^2(2\lambda - 1)}(\|h_1(x)\|^2 + \|h_2(x)\|^2) = E_1. \qquad (23)
\end{aligned}
$$

因此,存在一个 $t^* \in [0, \omega]$,使得

$$
\begin{aligned}
&\|u_N(\cdot, t^*)\|^2 + \|v_N(\cdot, t^*)\|^2 \leqslant \\
&\quad \frac{1}{b_0^2(2\lambda - 1)}(\|h_1(x)\|^2 + \|h_2(x)\|^2) = \frac{E_1}{\omega}. \qquad (24)
\end{aligned}
$$

对(22)再次积分从 t^* 到 $t+\omega(t \in [0, \omega])$,可得

$$
\begin{aligned}
&\|u_N(\cdot, t)\|^2 + \|v_N(\cdot, t)\|^2 \leqslant (\|u_N(\cdot, t^*)\|^2 + \|v_N(\cdot, t^*)\|^2) + \\
&\quad \frac{\omega}{b_0^2(2\lambda - 1)}(\|h_1(x)\|^2 + \|h_2(x)\|^2) = \left(\frac{1}{\omega} + 1\right)E_1, \qquad (25)
\end{aligned}
$$

故 $\quad \|u_N(\cdot, t)\|^2 + \|v_N(\cdot, t)\|^2 \leqslant (1/\omega + 1)E_1,$

即存在一个确定的与 λ, N 无关的常数 E_1.

因此,由Laray_Schauder不动点定理,我们知道方程(15)~(16)的解属于 $C^1(\omega, H_N)$,当 $\lambda = 1$,我们得到在 $C^1(\omega, H_N)$ 中存在方程(15)~(16)的解 (u_N, v_N). 引理证完.

定理 1.1 对任意的自然数 N,方程(15)~(16)存在有近似时间周期解 $(u_N, v_N) \in C^1(\omega, H_N)$.

2 一致性先验估计

在第1节里,我们得到了方程(7)~(10)的近似时间解序列 $(\{u_N\}, \{v_N\})$. 本节,我们将证明这个解序列 $(\{u_N\}, \{v_N\})$ 是收敛的,而且它的极限就是问题(7)~(10)的时间周期解. 为了这个目的,我们需要证明方程(7)~(10)关于时间近似周期解的一致性先验估计.

引理 2.1(Sobolev's 不等式[8]) 设 $u \in L_q(\Omega)$,其中 $1 \leqslant r, q < \infty$, $\Omega \in R^n$. 存在常数 $C > 0$,使得

$$
\|D^j u\|_{L_p(\Omega)} \leqslant C\|D^m u\|_{L_r(\Omega)}^a \|u\|_{L_q(\Omega)}^{1-a},
$$

其中 $\quad 0 \leqslant j \leqslant m,\ j/m \leqslant a \leqslant 1,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty$

和 $\quad 1/p = j/n + a(1/r - m/n) + (1-a)/q.$

引理 2.2　在引理 1.1 的条件下,我们设

1) $f(u)\in C^1,\ g(v)\in C^1,\ G_i(u,v)\in C^1(i=1,2)$;

2) $|f(u)|\leqslant A|u|^{5-\delta},\ |g(v)|\leqslant B|v|^{6-\delta}, A>0, B>0,\ \delta\geqslant 0,\ |G_i|\leqslant C_i(|u|^5+|v|^5),\ C_i>0$.

则关于方程(7)~(10)的近似时间周期解,我们有如下估计

$$\|u_{Nx}\|^2+\|v_{Nx}\|^2\leqslant\left(1/\omega+1\right)E_2,\tag{26}$$

其中常数 E_2 不依赖于 N.

证明　考察下列方程

$$(u_{Nt}+f(u_N)_x-\alpha u_{Nxx}+\beta u_{Nxxx}+2v_Nv_{Nx}-G_1(u_N,v_N)-h_1(x),\omega_j'')=0,\tag{27}$$

$$(v_{Nt}+g(v_N)_x-\gamma v_{Nxx}+2(u_Nv_N)_x-G_2(u_N,v_N)-h_2(x),\omega_j'')=0.\tag{28}$$

用 α_{jN} 乘以(27),对 j 从 1 到 N 求和,有

$$(u_{Nt}+f(u_N)_x-\alpha u_{Nxx}+\beta u_{Nxxx}+2v_Nv_{Nx}-G_1(u_N,v_N)-h_1(x),u_{Nxx})=0,\tag{29}$$

其中

$$(u_{Nxx},u_{Nt})=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{Nx}\|^2,$$

$$\begin{aligned}(u_{Nxx},f(u_N)_x)&=-(u_{Nxxx},f(u_N))=\\&\frac{1}{\beta}(u_{Nt}+f(u_N)_x-\alpha u_{Nxx}+2v_Nv_{Nx}-G_1(u_N,v_N)-h_1(x),f(u_N))=\\&\frac{1}{\beta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int F(u_N)\mathrm{d}x-\frac{\alpha}{\beta}(u_{Nxx},f(u_N))+\frac{2}{\beta}(v_Nv_{Nx},f(u_N))-\\&\frac{1}{\beta}(G_1(u_N,v_N)+h_1(x),f(u_N)).\end{aligned}$$

由 Sobolev 插值不等式,得到

$$\begin{aligned}|(u_{Nxx},f(u_N))|&\leqslant\|u_{Nxx}\|\cdot\|f(u_N)\|\leqslant A\|u_{Nxx}\|\cdot\|u_N\|_{10-2\delta}^{5-\delta}\leqslant\\&\frac{\beta}{12}\|u_{Nxx}\|^2+C(\|u_N\|),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{\beta}|(v_Nv_{Nx},f(u_N))|&\leqslant\frac{2}{|\beta|}\|v_N\|_4\|v_{Nx}\|\,\|f(u_N)\|_2\leqslant\\&\frac{\alpha}{12}\|u_{Nxx}\|^2+\frac{\gamma}{8}\|v_{Nxx}\|^2+C(\|u_N\|,\|v_N\|),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\beta}(G_1(u_N,v_N),f(u_N))\right|&\leqslant\frac{4C_1}{|\beta|}(\|u_N\|_{10-\delta}^{10-\delta}+\|v_N\|_{10-2\delta}^{5-\delta}+\|v_N\|_{10}^{5})\leqslant\\&\frac{\alpha}{12}\|u_{Nxx}\|^2+\frac{\gamma}{8}\|v_{Nxx}\|^2+C(\|u_N\|,\|v_N\|),\end{aligned}$$

$$|(u_{Nxx},h_1)|\leqslant\|u_{Nxx}\|\cdot\|h_1\|\leqslant\frac{\alpha}{12}\|u_{Nxx}\|^2+\frac{3}{\alpha}\|h_1\|^2,$$

$$(u_{Nxx},-\alpha u_{Nxx})=-\alpha\|u_{Nxx}\|^2,\ (u_{Nxx},\beta u_{Nxxx})=0.$$

根据(29),有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\|u_{Nx}\|^2-\frac{2}{\beta}\int F(u_N)\mathrm{d}x\right]+\frac{7\alpha}{12}\|u_{Nxx}\|^2-2(u_{Nxx},v_Nv_{Nx})\leqslant\\&\quad-(u_{Nxx},G_1(u_N,v_N))+\frac{\gamma}{4}\|u_{Nxx}\|^2+\frac{3}{\alpha}\|h_1\|^2+C.\end{aligned}\tag{30}$$

用 β_{jN} 乘以(28),关于 j 从 1 到 N 求和,有

$$(v_{Nt}+g(v_N)_x-\gamma v_{Nxx}+2(u_Nv_N)_x-G_2(u_N,v_N)-h_2(x),v_{Nxx})=0,\tag{31}$$

其中

$$(v_{Nxx}, v_{Nt}) = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v_{Nx}\|^2,\ (v_{Nxx}, -\gamma v_{Nxx}) = -\gamma\|v_{Nxx}\|^2,$$

$$|(v_{Nxx}, g(v_N)_x)| \leqslant C\|v_{Nxx}\|\cdot\|g(v_N)_x\| \leqslant \frac{\gamma}{16}\|v_{Nxx}\|^2 + C,$$

$$|(v_{Nxx}, h_2)| \leqslant \|v_{Nxx}\|\cdot\|h_2\| \leqslant \frac{\gamma}{16}\|v_{Nxx}\|^2 + \frac{4}{\gamma}\|h_2\|^2,$$

$$|2(u_{Nxx}, v_N v_{Nx}) + 2(v_{Nxx}, (u_N v_N)_x)| = 3\left|\int u_{Nx} v_{Nx}^2 \mathrm{d}x\right| \leqslant$$

$$3\|u_{Nx}\|^2\|v_{Nx}\|_4^2 \leqslant \frac{\alpha}{24}\|u_{Nxx}\|^2 + \frac{\gamma}{16}\|v_{Nxx}\|^2 + C,$$

$$(u_{Nxx}, G_1(u_N, v_N)) + (v_{Nxx}, G_2(u_N, v_N)) =$$

$$-(u_{Nx}, G_{1x}(u_N, v_N)) - (v_{Nx}, G_{2x}(u_N, v_N)) =$$

$$-(u_{Nx}, G_{1u_N}u_{Nx} + G_{1v_N}v_{Nx}) - (v_{Nx}, G_{2u_N}u_{Nx} + G_{2v_N}v_{Nx}) =$$

$$-(u_{Nx}, v_{Nx})\begin{pmatrix} G_{1u_N} & G_{2u_N} \\ G_{1v_N} & G_{2v_N}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{Nx} \\ v_{Nx}\end{pmatrix} \leqslant$$

$$-b_0(\|u_{Nx}\|^2 + \|v_{Nx}\|^2)\cdot$$

不等式(30)和(31)相加,得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t) + 2b_0\Phi(t) + \alpha\|u_{Nxx}\|^2 + \gamma\|v_{Nxx}\|^2 \leqslant$$

$$\frac{3}{\alpha}\|h_1\|^2 + \frac{4}{\gamma}\|h_2\|^2 + C, \tag{32}$$

其中 $\Phi(t) = \|u_{Nx}\|^2 + \|v_{Nx}\|^2 - \frac{2}{\beta}\int F(u_N)\mathrm{d}x\cdot$

在[0, ω]上对(32)积分,注意到

$$\left|\frac{2}{\beta}\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x\right| \leqslant A\|u\|_{6-\delta}^{6-\delta} \leqslant \frac{1}{2}\|u_{xx}\|^2 + C,$$

因此我们得到

$$\int_0^\omega(\|u_{Nx}\|^2 + \|v_{Nx}\|^2)\mathrm{d}t \leqslant \frac{\omega}{2b_0}\left(\frac{3}{\alpha}\|h_1\|^2 + \frac{4}{\gamma}\|h_2\|^2\right) = E_2\cdot \tag{33}$$

故存在一个 $t^* \in [0, \omega]$,使得

$$\|u_{Nx}(\cdot, t^*)\|^2 + \|v_{Nx}(\cdot, t^*)\|^2 \leqslant \frac{1}{2b_0}\left(\frac{3}{\alpha}\|h_1\|^2 + \frac{4}{\gamma}\|h_2\|^2\right) = \frac{E_2}{\omega}\cdot \tag{34}$$

对(32)再次积分,从 t^* 到 $t + \omega(t \in [0, \omega])$,得到

$$\|u_{Nx}(\cdot, t)\|^2 + \|v_{Nx}(\cdot, t)\|^2 \leqslant$$

$$\|u_{Nx}(\cdot, t^*)\|^2 + \|v_{Nx}(\cdot, t^*)\|^2 + E_2 \leqslant (1/\omega + 1)E_2, \tag{35}$$

即有(26)成立• 引理证完•

引理 2.3 在引理 2.2 的条件下,设

1) $f(u) \in C^2,\ g(v) \in C^2,\ G_i(u, v) \in C^2(i = 1, 2)$;

2) $h_i(x) \in H^1(\Omega)\ (i = 1, 2)\cdot$

则关于方程(7)~(10)的近似时间周期解,我们有如下估计

$$\|u_{Nxx}\|^2 + \|v_{Nxx}\|^2 \leqslant \left(\frac{1}{\omega} + 1\right)E_3, \tag{36}$$

其中 E_3 是不依赖于 N 的常数•

证明 考察下列方程

$$(u_{Nt}+f(u_N)_x-\alpha u_{Nxx}+\beta u_{Nxxx}+2v_Nv_{Nx}-G_1(u_N,v_N)-h_1(x),\ \omega_j^{(4)})=0, \tag{37}$$

$$(v_{Nt}+g(v_N)_x-\gamma v_{Nxx}+2(u_Nv_N)_x-G_2(u_N,v_N)-h_1(x),\ \omega_j^{(4)})=0. \tag{38}$$

用 α_{jN} 乘以(37), 对 j 从 1 到 N 求和, 得到

$$(u_{Nt}+f(u_N)_x-\alpha u_{Nxx}+\beta u_{Nxxx}+2v_Nv_{Nx}-G_1(u_N,v_N)-h_1(x),\ u_{Nxxxx})=0, \tag{39}$$

其中

$$\begin{aligned}&|(u_{Nxxxx},f(u_N)_x)|=|u_{Nxxx},f''(u_N)u_N^2(x)+f'(u_N)u_{Nxx}|\leqslant\\&\quad\|f''(u_N)\|_\infty\|u_{Nxxx}\|\|u_{Nx}\|_4^2+\|f'(u_N)\|_\infty\|u_{Nxxx}\|\|u_{Nxx}\|\leqslant\\&\quad\frac{\alpha}{10}\|u_{Nxxx}\|^2+C,\end{aligned}$$

$$|(u_{Nxxxx},-\alpha u_{Nxx})|=\alpha\|u_{Nxxx}\|^2,\quad(u_{Nxxxx},\beta u_{Nxxx})=0,$$

$$|(u_{Nxxxx},2v_Nv_{Nx})|=|(u_{Nxxx},2(v_{Nx}^2+v_Nv_{Nx}))|\leqslant\frac{\gamma}{8}\|v_{Nxxx}\|^2+\frac{\alpha}{10}\|u_{Nxxx}\|^2+C,$$

$$|(u_{Nxxxx},h_1)|\leqslant\|u_{Nxxx}\|\|h_{1x}\|\leqslant\frac{5}{\alpha}\|h_{1x}\|^2+\frac{\alpha}{10}\|u_{Nxxx}\|^2.$$

用 β_{jN} 乘以(38), 对 j 从 1 到 N 求和, 得到

$$(v_{Nt}+g(v_N)_x-\gamma v_{Nxx}+2(u_Nv_N)_x-G_2(u_N,v_N)-h_2(x),v_{Nxxxx})=0, \tag{40}$$

注意到

$$|(v_{Nxxxx},-\gamma v_{Nxx})|=\gamma\|v_{Nxxx}\|^2,$$

$$\begin{aligned}&|(v_{Nxxxx},2(u_Nv_N)_x)|=|(v_{Nxxx},2(u_{Nx}v_N+u_Nv_{Nx})_x)|=\\&\quad|(v_{Nxxx},2(u_{Nxx}v+2u_{Nx}v_{Nx}+u_Nv_{Nxx}))|\leqslant\\&\quad\frac{\gamma}{16}\|v_{Nxxx}\|^2+\frac{\alpha}{10}\|u_{Nxxx}\|^2+C,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&|(v_{Nxxxx},g(v_N)_x)|=|(v_{Nxxx},g''(v_N)v_{Nx}^2+g'(v_N)v_{Nxx})|\leqslant\\&\quad\|g''(v_N)\|_\infty\|v_{Nxxx}\|\|v_{Nx}\|_4^2+\|g'(v_N)\|_\infty\|v_{Nxxx}\|\|v_{Nxx}\|\leqslant\\&\quad\frac{\gamma}{16}\|v_{Nxxx}\|^2+C,\end{aligned}$$

$$|(v_{Nxxxx},h_2)|\leqslant\|v_{Nxxx}\|\|h_{2x}\|\leqslant\frac{2}{\gamma}\|h_{2x}\|^2+\frac{\gamma}{8}\|u_{Nxxx}\|^2,$$

$$\begin{aligned}&(u_{Nxxxx},G_1(u_N,v_N))+(v_{Nxxxx},G_2(u_N,v_N))=\\&\quad(u_{Nxx},G_{1u_N}u_{Nxx}+G_{1v_N}v_{Nxx}+G_{1u_Nu_N}u_{Nx}^2+G_{1v_Nv_N}v_{Nx}^2+2G_{1u_Nv_N}u_{Nx}v_{Nx})+\\&\quad(v_{Nxx},G_{2u_N}u_{Nxx}+G_{2v_N}v_{Nxx}+G_{2u_Nu_N}u_{Nx}^2+G_{2v_Nv_N}v_{Nx}^2+2G_{2u_Nv_N}u_{Nx}v_{Nx})\leqslant\\&\quad-b_0(\|u_{Nxx}\|^2+\|v_{Nxx}\|^2)+\frac{\gamma}{8}\|v_{Nxxx}\|^2+\frac{\alpha}{10}\|u_{Nxxx}\|^2+C,\end{aligned}$$

其中常数 C 依赖于 $\|u_N\|_{H^1}$ 和 $\|v_N\|_{H^1}$. 由(39)和(40), 得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}(\|u_{Nxx}\|^2+\|v_{Nxx}\|^2)+\alpha\|u_{Nxxx}\|^2+\gamma\|v_{Nxxx}\|^2+\\&\quad 2b_0(\|u_{Nxx}\|^2+\|v_{Nxx}\|^2)\leqslant\frac{5}{\alpha}\|h_{1x}\|^2+\frac{2}{\gamma}\|h_{2x}\|^2+C.\end{aligned} \tag{41}$$

在 $[0,\omega]$ 上, 对不等式(41)积分, 因此有

$$\int_0^\omega(\|u_{Nxx}\|^2+\|v_{Nxx}\|^2)\mathrm dt\leqslant\frac{\omega}{2b_0}\left(\frac{5}{\alpha}\|h_{1x}\|^2+\frac{2}{\gamma}\|h_{2x}\|^2+C\right)=E_3, \tag{42}$$

即, 存在一个 $t^*\in[0,\omega]$, 使得

$$\|u_{Nxx}(\cdot,t^*)\|^2+\|v_{Nxx}(\cdot,t^*)\|^2\leqslant\frac{1}{2b_0}\left(\frac{5}{\alpha}\|h_{1x}\|^2+\frac{2}{\gamma}\|h_{2x}\|^2\right)=\frac{E_3}{\omega}. \tag{43}$$

对(41)再次积分从 t^* 到 $t+\omega(t\in[0,\omega])$,有

$$\|u_{Nxx}(\cdot,t)\|^2+\|v_{Nxx}(\cdot,t)\|^2\leqslant$$
$$\|u_{Nxx}(\cdot,t^*)\|^2+\|v_{Nxx}(\cdot,t^*)\|^2+E_3\leqslant\left(\frac{1}{\omega}+1\right)E_3, \tag{44}$$

故(36)成立• 引理证完•

引理2.4 在引理2.3的条件下,我们设

1) $f(u)\in C^3,\ g(v)\in C^3,\ G_i(u,v)\in C^3(i=1,2)$;

2) $h_i(x)\in H^3(\Omega)\ (i=1,2)$•

则关于方程(7)~(10)的近似时间周期解,我们有如下估计

$$\|u_{Nxxx}\|+\|v_{Nxxx}\|\leqslant(1/\omega+1)E_4, \tag{45}$$

其中 E_4 是与 N 无关,而与 $\|u\|_{H^3}$、$\|v\|_{H^3}$、$\|h_i\|_{H^3}(i=1,2)$ 有关•

证明 考察下列方程

$$(u_{Nt}+f(u_N)_x-\alpha u_{Nxx}+\beta u_{Nxxx}+2v_Nv_{Nx}-G_1(u_N,v_N)-h_1(x),\omega_j^{(6)})=0, \tag{46}$$

$$(v_{Nt}+g(v_N)_x-\gamma v_{Nxx}+2(u_Nv_N)_x-G_2(u_N,v_N)-h_2(x),\omega_j^{(6)})=0• \tag{47}$$

用 α_{jN} 乘以(46),对 j 从1到 N 求和,有

$$(u_{Nt}+f(u_N)_x-\alpha u_{Nxx}+\beta u_{Nxxx}+2v_Nv_{Nx}-G_1(u_N,v_N)-h_1(x),2u_{Nx^6})=0• \tag{48}$$

用 β_{jN} 乘以(47),对 j 从1到 N 求和,有

$$(v_{Nt}+g(v_N)_x-\gamma v_{Nxx}+2(u_Nv_N)_x-G_2(u_N,v_N)-h_2(x),2v_{Nx^6})=0• \tag{49}$$

由于

$$(u_{Nx^6},u_{Nt})=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{Nxxx}\|^2+\|u_{Nxxx}\|^2,$$

$$(v_{Nx^6},v_{Nt})=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v_{Nxxx}\|^2+\|v_{Nxxx}\|^2,$$

使用Sobolev不等式有

$$\|f(u)\|_k\leqslant C(\|u\|_\infty+\|u\|_\infty^{k-1}+1)\max_{1\leqslant p\leqslant k}|D^pf(u)|\ \|u\|_k,$$

其中常数 C 不依赖于 f 和 u,有

$$|(u_{Nx^6},f(u_N)_x)|\leqslant C\|u_{Nxxx}\|\ \|u_{Nxxxx}\|\leqslant\frac{\alpha}{8}\|u_{Nxxxx}\|^2+C(\|u_{Nxxx}\|^2+1),$$

$$|(v_{Nx^6},g(v_N)_x)|\leqslant C\|v_{Nxxx}\|\ \|v_{Nxxxx}\|\leqslant\frac{\gamma}{8}\|v_{Nxxxx}\|^2+C(\|v_{Nxxx}\|^2+1),$$

$$|(u_{Nx^6},G_1+h_1)|\leqslant\frac{\alpha}{8}\|u_{Nxxxx}\|^2+C,$$

$$|(v_{Nx^6},G_2+h_2)|\leqslant\frac{\gamma}{8}\|v_{Nxxxx}\|^2+C,$$

$$|(u_{Nx^6},2v_Nv_{Nx})|=|(u_{Nxxxx},6v_{Nx}v_{Nxx}+2v_Nv_{Nxxx})|\leqslant$$
$$\frac{\alpha}{8}\|u_{Nxxxx}\|^2+\frac{\gamma}{8}\|v_{Nxxxx}\|^2+C,$$

$$|(v_{Nx^6},2(u_Nv_N)_x)|=|(v_{Nxxxx},2(u_{Nxxx}v+3u_{Nxx}v_{Nx}+3u_Nv_{Nxx}+u_Nv_{Nxxx}))|\leqslant$$
$$\frac{\alpha}{8}\|u_{Nxxxx}\|^2+\frac{\gamma}{8}\|v_{Nxxxx}\|^2+C,$$

其中常数 C、C_1 依赖于 $\|u_N\|_{H^3}$、$\|v_N\|_{H^3}$,我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u_{Nxxx}\|^2+\|v_{Nxxx}\|^2)+\alpha\|u_{Nxxxx}\|^2+\gamma\|v_{Nxxxx}\|^2+$$
$$C(\|u_{Nxxx}\|^2+\|v_{Nxxx}\|^2)\leqslant C_1• \tag{50}$$

在 $[0, \omega]$ 上, 对(50)积分, 有

$$\int_0^{\omega}(\|u_{Nxxx}\|^2+\|v_{Nxxx}\|^2)\mathrm{d}t \leqslant \omega C_2 = E_4, \tag{51}$$

其中 $C_2(C, C_1)$ 是常数• 因此, 存在一个常数 $t^* \in [0, \omega]$, 使得

$$\|u_{Nxxx}(\cdot, t^*)\|^2+\|v_{Nxxx}(\cdot, t^*)\|^2 \leqslant C_1/C\cdot$$

对(50)再次积分从 t^* 到 $t+\omega(t \in [0, \omega])$, 有

$$\|u_{Nxxx}(\cdot, t)\|^2+\|v_{Nxxx}(\cdot, t)\|^2 \leqslant$$
$$\|u_{Nxxx}(\cdot, t^*)\|^2+\|v_{Nxxx}(\cdot, t^*)\|^2+E_4 \leqslant \left(1/\omega+1\right)E_4, \tag{52}$$

故(45)成立• 引理证完•

3　ω 周期解的存在性

使用近似时间周期解的存在性和上面的一致性先验估计, 我们能够证明如下的定理

定理 3.1　如果存在一个确定的常数 N, 使得

$$\|u\|+\|v\| \leqslant E,$$

则方程(7)~(10)有一个时间周期解 $(u, v) \in C^1(\omega, H^2)$•

证明　对于任意自然数 N, 我们证明方程(7)~(10)有一个近似解 (u_N, v_N), 即方程(12)~(13)的解, 并且, 我们有一些关于 (u_N, v_N) 的范数估计• 对一个固定的 t, 在空间 H^1 中的一致有界范数 $(\|u_N\|_{H^1}, \|v_N\|_{H^1})$ 使得我们能够找到一个子序列 (u_N, v_N) 弱收敛于 $(u, v) \in H^1$• 下面, 我们将证明 (u, v) 是方程(7)~(10)的解•

事实上, 在 H^1 中, (u_N, v_N) 弱收敛于 (u, v), 对任意的 $t \in [0, \omega]$, 有如下结论:

$$(u_N(t), v_N(t)) \to (u(t), v(t)) \text{ 在 } L^2 \text{ 中弱* 收敛}, \tag{53}$$
$$(u_{Nxxx}(t), v_{Nxxx}(t)) \to (u_{xxx}(t), v_{xxx}(t)) \text{ 在 } L^2 \text{ 中弱* 收敛}, \tag{54}$$
$$(u_{Nt}(t), v_{Nt}(t)) \to (u_t(t), v_t(t)) \text{ 在 } L^2 \text{ 中弱* 收敛}\cdot \tag{55}$$

由于 H^1 是紧嵌入在 $L^2(\Omega)$ 中, 我们能够找到一个子序列 $(\{u_N(t)\}, \{v_N(t)\})$ 使得对任意的 $t \in [0, \omega]$, 有

$$(u_N(t), v_N(t)) \to (u(t), v(t)) \text{ 在 } L^2 \text{ 中强收敛}, \tag{56}$$
$$(u_{Nt}(t), v_{Nt}(t)) \to (u_t(t), v_t(t)) \text{ 在 } L^2 \text{ 中强收敛}\cdot \tag{57}$$

由引理 1.1 和引理 2.2~2.4, 对任意的 $t \in [0, \omega]$, $(\{u_N(t)\}, \{v_N(t)\})$ 在 H^2 中是一致有界的• 因此, 我们找到一个子序列 $(\{u_N(t)\}, \{v_N(t)\})$, 使得 $(\{u_N(t)\}, \{v_N(t)\})$ 在 $H^2(\Omega)$ 中弱收敛• 特别, 对任意的 $t \in [0, \omega]$, 有

$$f(u_N)_x \to f(u)_x \text{ 在 } L^2 \text{ 中弱* 收敛}, \tag{58}$$
$$g(v_N)_x \to g(v)_x \text{ 在 } L^2 \text{ 中弱* 收敛}, \tag{59}$$
$$u_N v_{Nx} \to u v_x \text{ 在 } L^2 \text{ 中弱* 收敛}, \tag{60}$$
$$(u_N v_N)_x \to (uv)_x \text{ 在 } L^2 \text{ 中弱* 收敛}, \tag{61}$$
$$G_i(u_N, v_N) \to G_i(u, v)\ (i = 1, 2) \text{ 在 } L^2 \text{ 中弱* 收敛}, \tag{62}$$

且函数 (u, v) 满足 $(u, v) \in C^1(\omega, L^2)$•

在这里, (53)~(62)是显然的且(57)是一致收敛的• 事实上, 我们能够证明

$$|(u_{Nt}(t+h) - u_{Nt}(t), \varphi_j)| \leqslant C(E_1, E_2, E_3, E_4)|h|^{1/2}\|\varphi_j\|\cdot$$

其中, 如上述所述 $\varphi_j(j = 1, 2, \dots)$ 是 H_N 中完全正交系统且 Δ 是它的特征函数• 因此, 使用对

角化法则，我们最终总能找到一个子序列$(\{u_{Nt}\},\{v_{Nt}\})$，使得$(\{u_{Nt}\},\{v_{Nt}\})$在H_N中对所有的$t\in[0,\omega]$弱收敛于一个元• 因此，由引理 2.1～2.4 的有界性，我们能得到(57)是成立的•

综合引理 1.1 和引理 2.1～2.4，对任意的 $\varphi\in H_N$，根据前面得到的估计，(u,v) 是方程(7)～(10)的解•

定理 3.1 的证明完成•

[参 考 文 献]

[1] GUO Bo_ling, TAN Shao_bin. Global smooth solution for a coupled nonlinear wave equations[J]. Math Method Appl Sci, 1991, **14**(6): 419—425.

[2] Ito M. Symmetries and conservation laws of a coupled nonlinear wave equation[J]. Phys Lett A, 1982, **91**(7): 335—338.

[3] He P F. Global solutions for a coupled KdV system[J]. J Partial Differential Equations, 1989, **2**(1): 16—30.

[4] Hirota R, Satsuma J. Soliton solutions for a coupled KdV equation[J]. Phys Lett A, 1981, **85**(8/9): 407—421.

[5] Schonbek M E. Existence of soluton for the boussinesq system of equation[J]. J Differential Equations, 1981, **42**(3): 325—352.

[6] Banjamin T B. Lectures in Applied Mathematics[M]. Providence, R I: American Mathematical Society, 1974.

[7] GUO Bo_ling. Finite dimensional behavior for weakly damped generalized KdV_Burgers equations[J]. Northeast Math J, 1994, **10**(3): 309—319.

The Existence of Time Periodic Solutions for a Damped Generalized Coupled Nonlinear Wave Equations

FANG Shao_mei[1,2], GUO Bo_ling[3]

(1. Department of Mathematics, Shaoguan University,
Shaoguan, Guangdong 512005, P. R. China;
2. Graduate School, China Academy of Engineering Physics,
P. O. Box 2101, Beijing 100088, P. R. China;
3. Institute of Applied Physics and Computational Mathematics,
P. O. Box 8009_28, Beijing 100088, P. R. China)

Abstract: The time periodic solution problem of damped generalized coupled nonlinear wave equations with periodic boundary condition was studied. By using the Galerkin method to construct the approximating sequence of time periodic solutions, a priori estimate and Laray_Schauder fixed point theorem to prove the convergence of the approximate solutions, the existence of time periodic solutions for a damped generalized coupled nonlinear wave equations can be obtained.

Key words: nonlinear wave equations; priori estimate; time periodic solution