应用数学和力学, 第 24 卷 第 5 期(2003 年 5 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 05_0450_05

非线性弹性梁中的混沌带现象*

张年梅, 杨桂通

(太原理工大学 应用力学研究所; 太原 030024)

(我刊编委杨桂通来稿)

摘要: 研究了非线性弹性梁的混沌运动, 梁受到轴向载荷的作用• 非线性弹性梁的本构方程可用三次多项式表示• 计及材料非线性和几何非线性, 建立了系统的非线性控制方程• 利用非线性 Galerkin 法, 得到微分动力系统• 采用 Melnikov 方法对系统进行分析后发现, 当载荷 P_0 和 f 满足一定条件时, 系统将发生混沌运动, 且混沌运动的区域呈现带状• 还详尽分析了从次谐分岔到混沌的路径, 确定了混沌发生的临界条件•

关 键 词: 混沌; 次谐分岔; 异宿轨道; 周期轨道

中图分类号: O34 文献标识码: A

引 言

固体力学中的混沌现象引起越来越多的学者的兴趣• 1998 年 F. C. Moon[1] 率先用实验的方法研究了梁的混沌行为, 实验中使用的梁是线弹性的, 受到横向周期载荷的作用• 近几年来, 国内外的许多学者也研究了线性阻尼梁的混沌运动[2, 3] • 工程实际问题中非线性阻尼的影响往往不可忽略, 故本文中研究了非线性阻尼、非线性本构材料的梁在受到横向载荷 $P = \delta P_0(f + \cos\omega t)\sin(\pi x/l)$ 作用下的动力响应• 利用 Melnikov 方法确定了混沌发生的临界条件• 分析结果可见, 混沌区域是一个有限的带状区域•

1 基 本 方 程

本文研究简支非线性弹性梁的动力学行为• 梁两端施加压缩载荷 N, 梁长度是 l, 梁材料的本构关系满足:

$$\sigma = E\varepsilon(1 + E_1\varepsilon^2), \tag{1}$$

此处, E 和 E_1 是材料常数•

假设屈曲后梁的变形仍是小变形, 则梁的屈曲载荷是:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI_1A_1}{l^2(1+\varepsilon_0)}, \tag{2}$$

上式中, $A_1 = 1 + 3E_1\varepsilon_0^2$• I_1 是惯性矩, $I_1 = \int_A y^2 \mathrm{d}A$• A 是梁的横截面积• ε_0 是中性面上的

* 收稿日期: 2001_07_16; 修订日期: 2002_12_26
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10172063)
作者简介: 张年梅(1965—) , 江西上饶人, 教授, 博士(E_mail: nianmeizhang@yahoo.com) •

应变, 满足:

$$E_1\varepsilon_0^4+E_1\varepsilon_0^3+\left(1-\frac{3\pi^2E_1I_1}{Al^2}\right)\varepsilon_0^2+\varepsilon_0-\frac{\pi^2I_1}{Al^2}=0, \tag{3}$$

压缩载荷作用下屈曲的梁受到横向载荷 $P=\delta P_0(f+\cos\omega t)\sin(\pi x)/l$ 的作用, 此时, 系统的控制方程为

$$\frac{\partial^2M}{\partial x^2}+N\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+m\frac{\partial^2w}{\partial t^2}=\delta P_0(f+\cos\omega t)\sin\frac{\pi x}{l}-\delta\mu\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial t}, \tag{4}$$

此处, $\delta\mu$ 是非线性阻尼系数, m 是梁单位长度质量•

系统的边界条件可表示为:

$$w(0)=w(l)=0, \tag{5}$$

$$w''(0)=w''(l)=0• \tag{6}$$

下面表示距中性面 y 处的点的应变:

$$\varepsilon=\varepsilon_0-y\frac{\partial\theta}{\partial x}, \tag{7}$$

θ 是在 x 处横截面的转角, 可用下式表示:

$$\sin\theta=\frac{1}{1+\varepsilon_0}\frac{\partial w}{\partial x}• \tag{8}$$

将几何关系和物理关系代入方程(4) 后, 略去三次以上的非线性项, 得到用位移表示的控制方程:

$$\begin{aligned}&C_1\frac{\partial^4w}{\partial x^4}+C_2\left[2\left(\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\right)^3+6\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\frac{\partial^3w}{\partial x^3}+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^4w}{\partial x^4}\right]-\\&\quad C_3\left[6\left(\frac{\partial^3w}{\partial x^3}\right)^2\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+3\left(\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\right)^2\frac{\partial^4w}{\partial x^4}\right]+\frac{N}{EI_1}+\frac{m}{EI_1}\frac{\partial^2w}{\partial t^2}=\\&\quad\frac{\delta}{EI}\left[P_0(f+\cos\omega t)\sin\frac{\pi x}{l}-\mu\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right],\end{aligned} \tag{9}$$

使用无量纲量 $x=x/l, w=w/l, \tau=\omega_0t, \omega=\omega/\omega_0, \omega_0=\sqrt{EI/ml^4}$ 将方程(9) 转化为无量纲方程•

根据边界条件(5) 和(6), 可假设位移模态的形式:

$$w=\varphi(\tau)\sin\pi x, \tag{10}$$

对无量纲控制方程应用非线性 Galerkin 法, 得到微分动力系统:

$$\begin{cases}\dot\varphi=\phi,\\ \dot\phi=-\alpha\varphi-\beta\varphi^3+\delta\left[\overline{P_0}(f+\cos\omega t)-\mu\phi^2\right],\end{cases} \tag{11}$$

此处

$$\alpha=\pi^2\left(-N+C_1\pi^2\right),\quad \beta=\pi^6\left(C_2-3C_4\pi^2\right),$$

$$C_1=\frac{A_1}{1+\varepsilon_0},\quad C_2=\frac{A_1}{2(1+\varepsilon_0)^3},\quad C_4=\frac{3E_1I_2}{2I_2(1+\varepsilon_0)^3l^2},$$

$$\mu=\frac{\mu l^5\omega_0^2}{EI_1},\quad \overline{P_0}=\frac{P_0l^3}{EI_1},\quad N=\frac{Nl^2}{EI_1},$$

若动力系统不受扰动, 则 $\delta=0$• 那么系统(11) 成为可积的 Hamilton 系统:

$$\begin{cases}\dot\varphi=\phi,\\ \dot\phi=-\alpha\varphi-\beta\varphi^3•\end{cases} \tag{12}$$

无扰系统的 Hamilton 函数实质是系统的动能与势能之和, 同一条轨道上的能量保持常数:

$$h = \frac{\psi^2}{2} + \frac{\alpha\varphi^2}{2} + \frac{\beta\varphi^4}{4} = \text{const} \cdot \tag{13}$$

无扰系统的相轨迹用下式确定:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \pm\sqrt{2h - \alpha\varphi^2 - \frac{\beta\varphi^4}{4}}, \tag{14}$$

式(14)表明相轨迹与 α, β 的值密切相关· 本文仅限于研究具有稳定后屈曲路径的系统($\alpha >$ 0, $\beta <$ 0)·

2 动力学分析

在实空间内, 无扰系统有三个平衡态, (0, 0) 是中心, $\left(-\sqrt{\alpha/(-\beta)}, 0\right)$ 和 $\left(\sqrt{\alpha/(-\beta)}, 0\right)$ 是双曲鞍点· 通过两个鞍点的异宿轨道是:

$$\begin{cases} \varphi_0(\tau) = \pm\sqrt{\frac{\alpha}{-\beta}}\,\text{th}\left(\frac{\sqrt{2\alpha}\tau}{2}\right), \\ \psi_0(\tau) = \pm\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{2}{-\beta}}\,\text{sech}^2\left(\frac{\sqrt{2\alpha}\tau}{2}\right) \cdot \end{cases} \tag{15}$$

异宿轨道的Melnikov 函数用下式计算:

$$\begin{aligned} M(\tau_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left[-\mu\psi^2 + \overline{P_0}\left(f + \cos\omega(\tau + \tau_0)\right)\right] dt = \\ &\quad -\mu\lambda_0 + \overline{P_0}\left(\lambda_1 + \lambda_2\cos\omega\tau_0\right), \end{aligned} \tag{16}$$

其中

$$\lambda_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^3 d\tau = \pm\frac{\alpha^3}{2\beta}\sqrt{-\frac{2}{\beta}}\int_0^{\infty}\text{sech}^6\left(\frac{\sqrt{2\alpha}}{2}\tau\right) d\tau = \mp\frac{8\alpha^2}{15\beta}\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}, \tag{17}$$

$$\lambda_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\, d\tau = 2\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}, \tag{18}$$

$$\lambda_2 = \pi\omega\sqrt{-\frac{2}{\beta}}\Big\backslash \text{sh}\left(\frac{\pi\omega}{2}\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\right) \tag{19}$$

由方程(16)可见,外载荷 f 和加载频率 ω 对系统中存在的Smale 马蹄的条件有重大影响·

1) 当 $\sqrt{g}f > 1$ 时,Melnikov 函数有简单零点的条件是:

$$\frac{\lambda_0}{2f\lambda_1 + \lambda_2} < \frac{\overline{P_0}}{\mu} < \frac{\lambda_0}{2f\lambda_1 + \lambda_2} \tag{20}$$

或者表示为

$$R_1 < \frac{\overline{P_0}}{\mu} < R_2, \tag{21}$$

此处

$$R_1 = \frac{-\frac{8\alpha^2}{15\beta}\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{g}f + \sqrt{2}\pi\omega\,\text{cosech}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega\right)},$$

$$R_2 = \frac{-\frac{8\alpha^2}{15\beta}\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{g}f - \sqrt{2}\pi\omega\,\text{cosech}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega\right)} \cdot$$

方程(20)表示混沌发生的区域, 可见它在 $P_0/\mu \sim \omega$ 平面上是一个带状区域, 它表明当 R_1

$< \overline{P_0}/\mu < R_2$ 时，系统可能存在Smale 马蹄意义下的混沌•

2) 当 $0 < f < 1/\sqrt{\alpha}$ 时，存在一个 ω^*，它应满足：

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\pi\omega^*\operatorname{cosech}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega^*\right) = f•$$

a) 若 $0 \leqslant \omega \leqslant \omega^*$，则混沌发生的临界条件是：

$$\overline{P_0}/\mu > R_1• \tag{22}$$

上式表明混沌区域是半无限区域•

b) 若 $\omega > \omega^*$，则混沌发生的阈值与表达式(20)相同•

以上分析说明，动力系统中存在Smale 马蹄的临界条件与加载方式和加载频率密切相关•

3　通向混沌的道路

无扰系统中围绕中心(0, 0)有一族周期轨道：

$$\varphi^k(\tau) = \pm\sqrt{\frac{2\alpha k^2}{-(1+k^2)\beta}}\operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{1+k^2}}\tau, k\right),$$

$$\psi^k(\tau) = \pm\frac{k\alpha}{1+k^2}\sqrt{-\frac{2}{\beta}}\operatorname{cn}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{1+k^2}}\tau, k\right)\operatorname{dn}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{1+k^2}}\tau, k\right)• \tag{23}$$

周期是：

$$T = 4\sqrt{\frac{1+k^2}{\alpha}}K,$$

此处 K 是第一类 Jocabi 椭圆积分•

次谐轨道的 Melnikov 函数是

$$M^{m/n}(\tau_0) = \int_0^{nT}\psi^k\left[-\mu(\psi^k)^2 + \overline{P_0}(f + \cos\omega(\tau-\tau_0))\right]d\tau =$$

$$-\rho_0(m, n)\mu + \overline{P_0}\rho_2(m, n)\cos\omega\tau_0, \tag{24}$$

$$\rho_0(m, n) = \frac{16\alpha^2}{15\beta}\sqrt{\frac{2\alpha}{-\beta}}\frac{nk^3(5-k^2)}{(1+k^2)^{2/5}}, \tag{25}$$

$$\rho_2(m, n) = \begin{cases} 0 & (n \neq 1 \text{ 或 } m \text{ 是偶数}), \\ \dfrac{\pi^2 m}{K}\sqrt{-\dfrac{2}{\beta}\dfrac{\alpha}{1+k^2}}\Big\backslash\operatorname{sh}\left(\dfrac{\pi m K'}{K}\right) & (n = 1 \text{ 且 } m \text{ 是奇数}), \end{cases} \tag{26}$$

此处 $K' = k\sqrt{1-k^2}$•

奇阶次谐分叉发生的阈值是：

$$\frac{\overline{P_0}}{\mu} > \frac{8k^3\alpha^{5/2}(5-k^2)}{15\beta\pi\omega(1+k^2)^{5/2}}\operatorname{sh}\left(\frac{m\pi K'}{2K}\right) = R_m, \tag{27}$$

当 $m \to \infty$，即 $k \to 1$ 时，可得以下公式：

$$\lim_{m\to\infty} R_m = R_0 = -\frac{4\sqrt{2}\alpha^{5/2}}{15\beta\pi\omega}\operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega\right)• \tag{28}$$

将 R_1, R_2 与 R_0 比较后可知：

$$R_0 > R_1,\quad R_0 > R_2,$$

所以系统将通过奇阶次谐分叉进入混沌状态•

4　结　　论

1) 只有当无扰动力系统存在异宿轨道时，扰动系统中才可能发生混沌带现象•

2) 混沌区域不仅受到常载荷与周期载荷幅值的影响,而且受到加载频率 ω的影响• 如果常载荷大于周期载荷的幅值,则在任何加载频率下,混沌区域都是带状的• 如果常载荷小于周期载荷的幅值,那么当 $\omega > \omega^*$ 时,Smale马蹄发生的区域仍是带状的;但是当 $0 \leqslant \omega \leqslant \omega^*$ 时,混沌发生的阈值是混沌区域的下限•

3) 如果常载荷等于零,则混沌发生的区域是半无限的•

4) 系统通过有限的奇阶次谐分叉进入混沌态•

[参 考 文 献]

[1] Moon F C. Experiments on chaotic motions of a forced nonlinear oscillator: stranger attractors[J]. J Appl Mech, 1988, **55**: 190—196.

[2] Panida Dinca Baran. Mathematical modes used in study the chaotic vibration of buckled beams[J]. Mechanics Research Communications, 1984, **29**(2): 189—196.

[3] 张年梅,杨桂通. 非线性弹性梁的动力学分岔和混沌[J]. 非线性动力学报, 1996, **3**(2): 265—274.

Chaotic Belt Phenomena in Nonlinear Elastic Beam

ZHANG Nian_mei, YANG Gui_tong

(Institute of Applied Mechanics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, P.R. China)

Abstract: The chaotic motions of axial compressed nonlinear elastic beam subjected to transverse load were studied. The damping force in the system is nonlinear. Considering material and geometric nonlinearity, nonlinear governing equation of the system was derived. By use of nonlinear Galerkin method, differential dynamic system was set up. Melnikov method was used to analyze the characters of the system. The results showed that chaos may occur in the system when the load parameters P_0 and f satisfy some conditions. The zone of chaotic motion was belted. The route from subharmonic bifurcation to chaos was analyzed. The critical conditions that chaos occurs were determined.

Key words: chaos; subharmonic bifurcation; heteroclinic orbit; periodic orbit