应用数学和力学, 第 24 卷 第 5 期(2003 年 5 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 05_0466_05

非线性非局部反应扩散方程奇摄动问题

莫嘉琪[1], 朱 江[2]

(1. 安徽师范大学 数学系, 芜湖 241000; 2. 中国科学院 大气物理研究所, 北京 100029)

(江福汝推荐)

摘要: 研究了一类具有非线性非局部反应扩散方程奇摄动 Robin 初始边值问题 在适当的条件下, 首先求出了原问题的外部解, 然后利用伸长变量、合成展开法和幂级数展开理论构造出解的初始层项, 并由此得到解的形式渐近展开式 最后利用微分不等式理论, 讨论了问题解的渐近性态并导出了几个有关的不等式, 讨论了原问题解的存在唯一性和解的一致有效的渐近估计式

关 键 词: 非线性; 反应扩散; 奇摄动
中图分类号: O175.29 文献标识码: A

引 言

莫嘉琪曾在文[1] ~ [6] 中研究了一类奇摄动问题 今讨论如下非线性非局部奇摄动问题:

$$\frac{u}{t} - Lu = f(x, u, \ ) \qquad ((t, x) \quad (0, T] \qquad), \tag{1}$$

$$Bu \quad \frac{u}{n} + a(x)u = g(x, \ ), \ a(x) \quad a_0 > 0 \qquad (x \qquad), \tag{2}$$

$$u = h(x, Tu, \ ) \qquad (t = 0), \tag{3}$$

其中 为正的小参数, 且

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} {}_{ij}(x) \frac{^2}{x_i \ x_j} + \sum_{i=1}^{n} {}_{i}(x) \frac{}{x_i},$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} {}_{ij}(x) \ {}_{ij} \ {}_{jk} \qquad \sum_{i=1}^{n} {}^2_i \qquad (\quad {}_i \quad \mathbf{R}, \quad > 0),$$

$$Tu = \quad K(x, y) u(t, y, \ ) \mathrm{d}y \qquad (x \qquad),$$

而 $x \quad (x_1, x_2, \quad , x_n)$, 为 R^n 中的有界域, 为具有 C^{1+} 函数类的 的边界, ((0, 1) 为 H lder 指数), L 为一致椭圆型算子, / n 为 上的外法向导数 问题(1) ~ (3) 是一个反应扩散初始边值问题 本文是涉及一类非线性非局部奇摄动问题, 我们构造解的渐近展开式并讨论其渐近性态

收稿日期: 2001_09_04; 修订日期: 2003_02_19
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10071048); 中科院 百人计划 资助项目
作者简介: 莫嘉琪(1937) , 男, 浙江德清人, 教授, 美国 数学评论 、德国 数学文摘 评论员(E_mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn)

假设:

[H_1] $_{jk}$, $_j$, a, K_i 及其一阶偏导数关于其变量在对应的区域内为H lder连续的

[H_2] $f(x, u, \ )$、$g(x, \ )$、$h(x, Tu, \ )$ 在对应的区域上关于 x 为H lder连续, 关于 u、Tu 为Lipschitz连续, 关于 为充分光滑的函数 且

$$f_u(x, u, \ ) \quad - c_1 \quad 0,$$

其中 c_1 为常数

1　构造形式渐近解

现构造问题(1)~(3)解的形式渐近展开式 其退化问题为

$$- Lu = f(x, u, 0) \qquad (x \qquad), \tag{4}$$

$$Bu = g(x, 0) \qquad (x \qquad) \tag{5}$$

我们还需假设:

[H_3] 问题(4)、(5)存在唯一的解 $U_0 \quad C^{1+} \quad (0 < \quad < 1)$

令原问题(1)~(3)的外部解 U 的形式展开式为

$$U \sim \sum_{i=0} U_i \ ^i \tag{6}$$

将(6)代入(1)、(2), 把 f, g 按 展开, 分别使等式两边 同次幂相等, 得

$$- LU_i + \ U_{i-1} = f_u(x, U_0, 0) U_i + F_i, \tag{7}$$

$$BU_i = G_i \qquad (x \qquad), \tag{8}$$

其中

$$F_i = \frac{1}{i!}\left[\frac{^i f}{\ ^i}\right]_{=0} \qquad (i = 1, 2, \ ),$$

$$G_i = \frac{1}{i!}\left[\frac{^i g}{\ ^i}\right]_{=0} \qquad (i = 1, 2, \ )$$

不难看出, F_i、G_i 是 $U_k(k \quad i-1)$ 的已知函数 在上面和以后各式中, 均设带负下标的项为零 由上面的线性问题, 可分别解出 U_i 再由(6), 可得原问题的外部解 U 但是它未必满足初始条件(3), 故尚需构造初始层函数 V

引入伸长变量[7~8]:

$$= \frac{t}{\ }$$

并令原问题(1)~(3)的解 u 为

$$u = U(x, \ ) + V(\ , x, \ ) \tag{9}$$

将(9)代入(1)~(3), 得

$$V - LV = f(x, U + \ V, \ ) - f(x, U, \ ) \qquad F, \tag{10}$$

$$BV = 0 \qquad (x \qquad), \tag{11}$$

$$V(0, x, \ ) = h(x, Tu, \ ) - U(x, \ ) \tag{12}$$

令

$$V \sim \sum_{i=0} v_i(\ , x) \ ^i \tag{13}$$

将(9)、(6)和(13)代入(10)~(12), 展开非线性的项并使等式两边 的同次幂项的系数相等, 可得

$$(v_0) - Lv_0 = f(x, U_0 + v_0, 0) - f(x, U_0, 0), \tag{14}$$

$$Bv_0 = 0 \quad (x \quad), \tag{15}$$

$$v_0(0, x) = h(x, T(U_0 + v_0), 0) - h(x, TU_0, 0) - U_0(x) \tag{16}$$

对于 $i = 1, 2,$ ，有

$$(v_i) - Lv_i = f_u(x, U_0 + v_0, 0) v_i + F_i, \tag{17}$$

$$Bv_i = 0 \quad (x \quad), \tag{18}$$

$$v_i(0, x) = [h_{Tu}(x, T(U_0 + v_0) Tv_i + h_i]_{=0} - U_i(x), \tag{19}$$

其中

$$F_i = \frac{1}{i!}\left[\frac{{}^iF}{{}^i}\right]_{=0} \quad (i = 1, 2, \quad),$$

$$h_i = \frac{1}{i!}\left[\frac{{}^ih}{{}^i}\right]_{=0} \quad (i = 1, 2, \quad)$$

显然，F_i 和 $h_i (i = 1, 2, \quad)$ 为逐次已知函数

由问题(14) ~ (16)和(17) ~ (19)，我们能得到 v_0 和 $v_i (i = 1, 2, \quad)$ 这时我们能构造原问题(1) ~ (3) 的解 u 有如下形式渐近展开式:

$$u \sim \sum_{i=0} [U_i + v_i]^{\,i} \quad (0 < \quad 1) \tag{20}$$

2 主 要 结 果

现在来证明上式为一致有效的渐近展开式

定理 在假设[H_1] ~ [H_3]下，非线性非局部反应扩散方程边值问题(1) ~ (3)存在唯一解 u，并对于$(t, x) \quad [0, T] \quad (\quad + \quad)$，成立一致有效的渐近展开式(20)

证明 首先构造辅助函数 和 :

$$= Y_m - r^{\,m+1}, \tag{21}$$

$$= Y_m + r^{\,m+1}, \tag{22}$$

其中 r 为足够大的正常数，它在下面决定 且

$$Y_m \quad \sum_{i=0}^{m} [U_i + v_i]^{\,i}$$

显然，我们有

$$((t, x) \quad [0, T] \quad (\quad + \quad)) \tag{23}$$

并对 x ，存在正常数 M_1，使得

$$B \quad BY_m - B[r^{\,m+1}] = B\left[\sum_{i=1}^{m} U_i^{\,i}\right] + B\left[\sum_{i=1}^{m} v_i^{\,i}\right] - a(x) r^{\,m+1} =$$

$$g(x, 0) + \sum_{i=1}^{m} G_i^{\,i} \quad g(x, \quad) + M_1^{\,m+1} - a_0 r^{\,m+1} =$$

$$g(x, \quad) + (M_1 - a_0 r)^{\,m+1}$$

于是选择 $r \quad M_1/a_0$，我们有

$$B \quad g(x, \quad) \quad (x \quad), \tag{24}$$

类似可证

$$B \quad g(x, \quad) \quad (x \quad) \tag{25}$$

由假设, 存在一个正常数 M_2, 使得

$$(0, x, \ ) = Y_m |_{t=0} - r^{m+1} = \sum_{i=0}^{m} U_i{}^{i} + \sum_{i=0}^{m} v_i |_{=0}{}^{i} - r^{m+1}$$

$$\sum_{i=0}^{m} U_i{}^{i} + [h(x, T(U_0 + v_0), 0) - h(x, TU_0, 0)]_{=0} - U_0(x)] =$$

$$\sum_{i=1}^{m} [[h_{Tu}(x, T(U_0 + v_0), 0) Tv_i + h_i]_{=0} - U_i(x)]^{i} - r^{m+1}$$

$$h(x, T |_{t=0}, \ ) + (M_2 - r)^{m+1}$$

选择 r M_2, 有

$$(t, x, \ ) \quad h(x, T \ , \ ) \quad (x \quad , t = 0) \tag{26}$$

同理, 对于 r M_2, 也有

$$(t, x, \ ) \quad h(x, T \ , \ ) \quad (x \quad , t = 0) \tag{27}$$

现证:

$$_t - L - f(x, \ , \ ) \quad 0 \quad ((t, x) \quad (0, T) \quad), \tag{28}$$

$$_t - L - f(x, \ , \ ) \quad 0 \quad ((t, x) \quad (0, T) \quad) \tag{29}$$

由假设, 存在正常数 M_3, 使得

$$_t - L - f(x, \ , \ ) = (Y_m - r^{m+1})_t - L[Y_m - r^{m+1}] - f(x, \ , \ ) =$$

$$Y_{mt} - LY_m - f(x, Y_m, \ ) + [f_i(x, Y_m, \ ) - f_i(x, \ , \ )]$$

$$-[LU_0 + f(x, U_0, 0)] - \sum_{i=1}^{m} [LU_i - U_{i-1} + f_u(x, U_0, 0) U_i + F_i]^{i} +$$

$$[(v_0) - Lv_0 - f(x, U_0 + V_0, 0) + f(x, U_0, 0)] +$$

$$\sum_{i=1}^{m} [(v_i) - Lv_i - f_u(x, U_0 + V_0, 0) v_i - F_i]^{i} + M_3{}^{m+1} - c_1 r^{m+1}$$

$$(M_3 - c_1 r)^{m+1}$$

选择 r M_3 / c_1, 则不等式(28) 成立

同理可证不等式(29) 成立

所以由(23) ~ (29), 及比较定理[9] 知, 问题(1) ~ (3) 存在唯一的解 u, 并存在足够小的正常数 $_1 > 0$, 有关系式

$$(t, x, \ ) \quad u(t, x, \ ) \quad (t, x, \ )$$

$$((t, x, \ ) \quad [0, T] \quad (\ + \ ) \quad [0, _1])$$

再由(21)、(22), 得到

$$u = \sum_{i=0}^{m} [U_i + v_i]^{i} + O(^{m+1}) \quad (0 < \quad 1)$$

定理证毕

[参　考　文　献]

[1] MO Jia_qi, Shao S. The singularly perturbed boundary value problems for higher_order semilinear elliptic equations[J]. Adv in Math, 2001, **30**(2): 141 148.

[2] MO Jia_qi, OUYANG Cheng. A class of nonlocal boundary value problems of nonlinear elliptic systems in unbounded domains[J]. Acta Math Sci, 2001, **21**B(1): 93 97.

[3] MO Jia_qi. A class of nonlinear singularly perturbed problems for reaction diffusion equation with time delays[J]. J Systems Sci Math Sci, 2000, **20**(4): 412 416.
[4] MO Jia_qi. A class of singularly perturbed reaction diffusion integral differential system[J]. Acta Math Appl Sinica, 1999, **15**(1): 19 23.
[5] MO Jia_qi. A singularly perturbed nonlinear boundary value problem[J]. J Math Anal Appl, 1993, **178**(1): 289 293.
[6] MO Jia_qi. Singular perturbation for a class of nonlinear reaction diffusion systems[J]. Science in China, 1998, **32**(11): 1306 1315.
[7] Holmes M H. Introduction to Perturbation Methods [M]. Texts in Applied Mathematics, **20**, New York: Springer_Verlag, 1991, 105 159.
[8] De Jager E M, JIANG Fu_ru. The Theory of Singular Perturbations [M]. Amsterdam: North_Holland, 1996, 91 135.
[9] Pao C V. Comparison methods and stability analysis of reaction diffusion systems[J]. Lecture Notes Pure Appl Math, 1994, **162**(1): 277 292.

The Nonlinear Nonlocal Singularly Perturbed Problems for Reaction Diffusion Equations

MO Jia_qi[1], ZHU Jiang[2]
(1. Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu, Anhiu 241000, P.R. China;
2. ICEES, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, P.R. China)

Abstract: A class of nonlinear nonlocal for singularly perturbed Robin initial bounday value problems for reaction diffusion equations is considered. Under suitable conditions, firstly, the outer solution of the original problem is obtained, secondly, using the stretched variable, the composing expansion method and the expanding theory of power series the initial layer is constructed, finally, using the theory of differential inequalities the asymptotic behavior of solution for the initial boundary value problems are studied and educing some relational inequalities the existence and uniqueness of solution for the original problem and the uniformly valid asymptotic estimation is discussed.

Key words: nonlinear; reaction diffusion; singular perturbation