应用数学和力学, 第 24 卷 第 5 期(2003 年 5 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 05_0484_09

关于不可压、无粘流体的 Euler 方程初值问题的适定性(Ⅰ) *

沈　臻

(上海大学 理学院 数学系, 上海 200436)

(戴世强推荐)

摘要: 以分层理论为基础, 讨论了 Euler 方程不适定的初值问题以及不适定问题的形式可解性, 并给出了某些不适定初值问题存在形式解的条件与计算方法• 特别讨论了 R^4 中的超平面$\{t = 0\}$上初值问题的适定性并给出了存在不唯一解的例证•

关 键 词: Euler 方程; 不适定问题; 形式解; 末方程

中图分类号: O175.29　　文献标识码: A

1　引言及符号

对 Euler 方程的初、边值问题适定性的研究, 以不同的方法, 在不同的函数类中有许多重要的结果[1, 2, 3]• 关于 Euler 方程初值问题的不适定性, 国内、外研究不多[4, 5]• 在可微函数类中, Baouondi 和 Goulaouic 证明了 Euler 方程在紧致流形上的 Cauchy 问题, 除了一个常数外, 存在着唯一解[4]• 《Solutions Analytiques de Quelques Equations aux Derives Partielles en Mecanique des Fluides》一书, 虽然对 Euler 方程初值问题的解空间构造进行了全面研究• 特别对适定的初值问题, 在解析条件下给出了其准确解的计算方法与公式, 但并未对不适定问题进行深入讨论[6]• 但是, Euler 方程在超平面 $\{t = 0\}$ 上的初值问题的 $C^k(k \geqslant 1)$ 的不适性性, 将影响到很多重要方程的定性研究• 比如, 大气动力学中的中尺度、非静力平衡方程• 本文在[6] 的基础上, 讨论了 Euler 方程在 R^4 中三维超曲面 $\Sigma: t = t^{(0)} + g(x)$ 上的 Cauchy 问题不适定的各种可能以及判别方法, 并给出了 Σ 上不适定 Cauchy 问题形式解的计算方法, 在某些特殊条件下, 给出了这种解的有限形式•

文中涉及的符号:

$P(X, Y)$　　C^∞ 流形 X 到 Y 的(C^ω 或 C^∞ 或 C^k) 嵌入空间具有 C^∞ 或 C^k 拓扑;

$I_k(X, Y)$　　$J^k(X, Y)$ 的 Cartan_Ehresmann 理想子代数;

e　　Ehresmann 对应;

$e_i(f)$　　复合对应 $p_2 \circ (j^1 f) \circ e$ 的第 i 个分量,

$$f: J^k(R^n, R^m) \to \mathbf{R},$$

* 收稿日期: 2001_02_08; 修订日期: 2002_12_28
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19971054)
作者简介: 沈臻(1977—) , 女, 浙江宁波人, 硕士(E_mail: jeansz@citiz.net)•

$$e(f): J^{k+1}(R^n, R^m) \xrightarrow{e} J^1(R^n, J^k(R^n, R^m))$$
$$\xrightarrow{j^1 f} J^1(R^n, \mathbf{R}) = J^0(R^n, \mathbf{R}) \times R^n \xrightarrow{p_2} R^n;$$

D'_*, D_*　　D 的准本方程和本方程;

$G_l(TJ^k(V, Z))$　　由 $TJ^k(V, Z)$ 的 l 维子空间构成的 Grassmann 流形;

$E_{l,k}(V, Z)$, $W_{l,k}(V, Z)$　　V 到 Z 的 (l, k) 阶 Shih_典则系统;

$E_{l,k}(D)$, $W_{l,k}(D)$　　D 的 (l, k) 阶 Shih_典则系统;

$S^t_{l,k}(D)$　　D 的 (l, k) 阶横截层;

$S^i_{l,k}(D)$　　D 的 (l, k) 阶 i 层, 其纤维的维数等于 i;

$T_{l,k}(D)$　　D 的 (l, k) 阶陷阱;

$E(S^i_{l,k}(D))$　　$S^i_{l,k}(D)$ 的末方程;

$V(f)$　　对应 $f: J^k(V, Z) \to \mathbf{R}$ 的零点集, 即 $V(f) = \{\beta \in J^k(V, Z) \mid f(\beta) = 0\}$ 并且 $V(f_1, f_2) = V(f_1) \cap V(f_2)$;

Δ_q　　q 维标准单形;

$I_\infty(\Delta_3, D)$　　D 的 C^∞ 初始条件的集合•

以上符号的详细定义请参看[6]、[7]•

不可压、无粘流体运动即 Euler 方程的原型如下[5]

$$\mathrm{D}\begin{cases}\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla P + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t),\\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0,\end{cases}$$

其中 $(\boldsymbol{x}, t) = (x_1, x_2, x_3, t) \in R^3 \times \mathbf{R} = V$, 记 $Z = R^3 \times \mathbf{R}_+$, 流体速度 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = (u_1(\boldsymbol{x}, t), u_2(\boldsymbol{x}, t), u_3(\boldsymbol{x}, t)) \in R^3$ 和压力 $P \in \mathbf{R}_+$ 是未知函数, 外力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t) = (F_1(\boldsymbol{x}, t), F_2(\boldsymbol{x}, t), F_3(\boldsymbol{x}, t))$ (本文中设 $F_i \in C^\infty$, $i = 1, 2, 3$), 密度 $\rho > 0$ 是常数•

2　关于 Euler 方程的解空间构造

设 $\boldsymbol{x}$ 是 R^4 的任一点, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3, P)$ 是 Euler 方程的任一解析解, $\boldsymbol{u} \in C^\omega$•

定理 1　存在两个 C^∞ 超曲面 $\Sigma_i \subseteq R^4$, $(i = 1, 2)$, $x \in \Sigma_i$, 使得 $\boldsymbol{u}$ 在 Σ_1 上的限制或者 $\boldsymbol{u}$ 在 Σ_2 上限制 $\boldsymbol{u}|_{\Sigma_1}$、$\boldsymbol{u}|_{\Sigma_2}$, 构成了 Euler 方程一组适定的初始条件•

证明过程请参看[6]•

3　初值问题存在形式解的条件

将 Euler 方程用 $J^1(V, Z)$ 的局部坐标改写如下(为方便起见设 $x_4 = t$, $u_4 = P$):

$$\mathrm{D}\begin{cases} f_1: p^1_4 + u_1 p^1_1 + u_2 p^1_2 + u_3 p^1_3 + \dfrac{1}{\rho} p^4_1 - F_1 = 0,\\ f_2: p^2_4 + u_1 p^2_1 + u_2 p^2_2 + u_3 p^2_3 + \dfrac{1}{\rho} p^4_2 - F_2 = 0,\\ f_3: p^3_4 + u_1 p^3_1 + u_2 p^3_2 + u_3 p^3_3 + \dfrac{1}{\rho} p^4_3 - F_3 = 0,\\ f_4: p^1_1 + p^2_2 + p^3_3 = 0,\end{cases} \tag{1}$$

并分别记上述各式的左端为 f_1, f_2, f_3, f_4, 则(1) 式可记为 $\mathrm{D} = V(f_1, f_2, f_3, f_4) \subseteq J^1(V, Z)$•

已知结果是:

第一: D 的本方程

$$D_* = \bigcup_k D_k \qquad (k = -1, 0, 1, 2, \cdots),$$

$$D_{-1} = V = R^4, \quad D_0 = J^0(V, Z), \quad D_1 = D = V(f_1, f_2, f_3, f_4),$$

$$D_k = V(\mathrm{e}_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1}}(f_j), \mathrm{e}_{i_1 i_2 \cdots i_{k-2}}(f_j), \cdots, \mathrm{e}_{i_1}(f_j), f_j)$$

$$(k \geqslant 2; j, i_1, i_2, \cdots i_{k-1} = 1, 2, 3, 4; i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_{k-1}),$$

第二: 对 $\rho_{3,k-1}: E_{3,k-1}(D) \to W_{3,k-1}(V, Z)$ 已分层

$$W_{3,k-1}(V, Z) = S^t_{3,k-1}(D) \cup S^1_{3,k-1}(D) \cup S^2_{3,k-1}(D) \cup T_{3,k-1}(D)\cdot$$

以上结果请参看[6]•

现在为讨论 D 的不适定问题, 分以下几步•

1) Euler 方程的初值问题(C)的提法

设 C^∞ 超曲面 $\Sigma: t = t^{(0)} + g(x), \ \Sigma \subseteq R^4$,

C^∞ 对应 $g: R^3 \to \mathbf{R}$, 并使得 $g(0) = 0$;

及未知函数在 Σ 上的初始值 $u_i|_\Sigma = u_i^{(0)}, P|_\Sigma = p^{(0)}$, 其中 $u_i^{(0)}, p^{(0)} \in C^\infty$,

于是相当于给出了一对 C^∞ 嵌入 (σ, γ) 如下:

$$\sigma: \Sigma \to R^4,$$

$$\sigma(\xi): x_1 = x_1^{(0)} + \xi_1, \ x_2 = x_2^{(0)} + \xi_2, \ x_3 = x_3^{(0)} + \xi_3, \ x_4 = t^{(0)} + g(\xi),$$

而 C^∞ 嵌入 γ:

$$\gamma: \Sigma \to J^0(V, Z),$$

$$\gamma(\xi) = \left(\sigma(\xi), u_1^{(0)}(\xi), u_2^{(0)}(\xi), u_3^{(0)}(\xi), p^{(0)}(\xi)\right),$$

其中 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 是 Σ 上的参数坐标•

对于初值问题(C), C^∞ 嵌入 σ 为内射对应• 另外, 由于讨论的是局部问题, 因而可用三维标准单形 Δ_3 代替 Σ• 于是有

$$\sigma: \Delta_3 \to R^4,$$

$$\sigma(\xi) = (x_1^{(0)} + \xi_1, \ x_2^{(0)} + \xi_2, \ x_3^{(0)} + \xi_3, \ x_4^{(0)} + g(\xi)),$$

$$g: \Delta_3 \to \mathbf{R}, \ g(0) = 0, \ g \in C^\infty,$$

而 C^∞ 嵌入 γ 为:

$$\gamma: \Delta_3 \to J^0(V, Z),$$

$$\gamma(\xi) = \left(\sigma(\xi), u_1^{(0)}(\xi), u_2^{(0)}(\xi), u_3^{(0)}(\xi), p^{(0)}(\xi)\right),$$

这里 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \Delta_3$, ξ 是 Δ_3 上的重心坐标•

并满足:

① $\alpha^0_{-1} \circ \gamma = \sigma$,

② $\gamma^* \omega = 0 \qquad (\forall \omega \in I_0(V, Z))$,

③ $\gamma(\Delta_3) \subseteq D_0 = J^0(V, Z)\cdot$

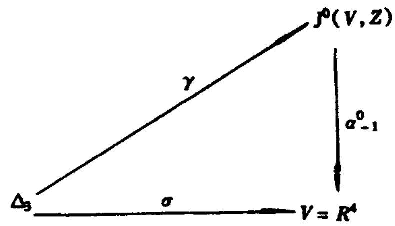

图 1

2) 初值问题形式解的存在条件

设 $x^{(0)} \in V = R^3 \times \mathbf{R}$, D 的一组初始条件 $(\sigma_0, \gamma_0) \in I_\infty(\Delta_3, D)$,

其中

$$\begin{cases} \sigma_0(\xi) = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(x_1^{(0)} + \xi_1,\ x_2^{(0)} + \xi_2,\ x_3^{(0)} + \xi_3,\ x_4^{(0)} + g(\xi)\right), \\ \gamma_0(\xi) = \left(\sigma_0(\xi), u_1(\xi), u_2(\xi), u_3(\xi), u_4(\xi)\right), \end{cases} \tag{2}$$

这里 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \Delta_3$ 是 Δ_3 上的重心坐标, 对应 $g: \Delta_3 \to \mathbf{R}$, $g \in C^\infty$, 并且 $g(0) = 0$.

在给定初始条件 (σ_0, γ_0) 之后, 要决定相对应于 (σ_0, γ_0) 的形式解, 其充分必要条件是存在 C^∞ 嵌入序列 $\{\gamma_k\}$, $k \geqslant 1$, (见[8])

$$\gamma_k: \Delta_3 \to J^k(V, Z),$$

$$\gamma_k(\xi) = \left(x_1(\xi), x_2(\xi), x_3(\xi), x_4(\xi), u_i(\xi), p^i_{j,|\lambda|}(\xi), p^{i_\mu}_{j,|\mu|}(\xi)\right),$$

$$(i = 1, 2, 3, 4,\ |\lambda| \leqslant k - 1,\ |\mu| = k),$$

使得

$$\alpha^k_{k-1} \circ \gamma_{k-1} = \gamma_k,$$

$$\gamma_k^* \omega = 0\ (\forall \omega \in I_k(V, Z)),$$

$$\gamma_k(\Delta_3) \subseteq D_k \subseteq J^k(V, Z),$$

$$\alpha^k_{-1} \circ \gamma_{k-1} = \sigma_0,$$

$$\alpha^k_0 \circ \gamma_k = \gamma_0.$$

如图(2)所示:

根据序列 $\{\gamma_k\}$, 即可写出以幂级数形式表现的形式解其各阶系数.

3)　Euler 方程在 $\{t = 0\}$ 上的初值问题的适定性分析

本文涉及的初值问题(C), 其计算均在 $W_{3,k-1}(V, Z) \subseteq G_3^*(TJ^{k-1}(V, Z))$ 的开覆盖 $\{U_i\}(i = 1, 2, 3, 4)$ 中的第四开集 U_4 中进行[6].

设 $\tau \in U_4$, τ 由 $J^{k-1}(V, Z)$ 在点 $p(\tau)$ 的三个切向量生成:

$$p(\tau) = (x_1, x_2, x_3, x_4, u_i, p^i_{j,|\lambda|}) \in J^{k-1}(V, Z),$$

$$\begin{aligned} \eta_1 &= (1, 0, 0, \delta_1, \hat{u}_i(1), \hat{p}^i_{j,|\lambda|}(1)), \\ \eta_2 &= (0, 1, 0, \delta_2, \hat{u}_i(2), \hat{p}^i_{j,|\lambda|}(2)), \\ \eta_3 &= (0, 0, 1, \delta_3, \hat{u}_i(3), \hat{p}^i_{j,|\lambda|}(3)), \end{aligned} \tag{3}$$

$$(i = 1, 2, 3, 4,\ |\lambda| \leqslant k - 1,\ k \geqslant 1),$$

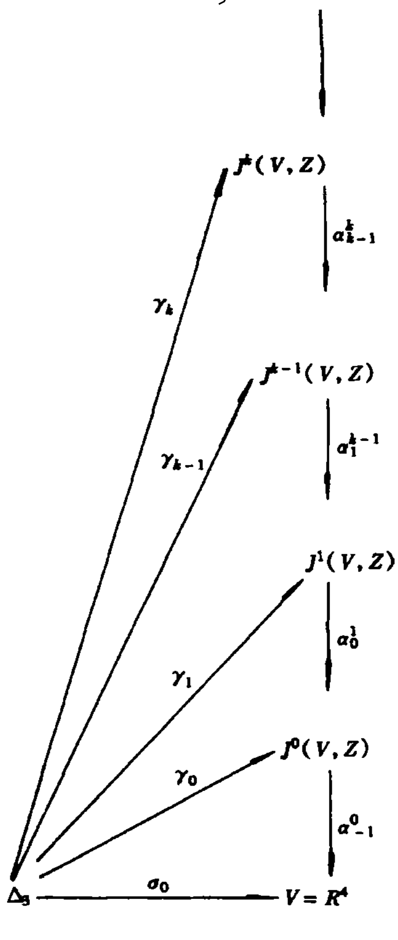

图　2

则根据已知的分层结果, 得到 $\tau \in U_4 \cap S^1_{3,k-1}(D)$ 的充要条件是:

$$\begin{cases} \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 = 0, \\ \varphi^{(4)}_{4,k-1}(\tau) = \hat{p}^{1}_{4^{k-1}}(1) + \hat{p}^{2}_{4^{k-1}}(2) + \hat{p}^{3}_{4^{k-1}}(3) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

此即 $S^1_{3,k-1}(D)$ 的末方程 $E(S^1_{3,k-1}(D))$.

这里带^的符号表示的是一般意义下的情况.

定理 2　设 C^∞ 超平面 $\Sigma: \{t = 0\} \subseteq R^4$, 并在其上给出初始条件 $u_i|_{t=t_0}$, $p|_{t=t_0}(i = 1, 2, 3)$. 则此初值问题存在形式解的充要条件是

对 $\forall k \geqslant 1$, 有

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{M}_k = \operatorname{rank}\boldsymbol{M}_k = 3,$$

即

$$\varphi^{(4)}_{4,k-1} = p^{1}_{4_{k-1}}(1) + p^{2}_{4_{k-1}}(2) + p^{3}_{4_{k-1}}(3) = 0,$$

这里

$$p^{i}_{4_{k-1}}(j) = \frac{\partial}{\partial \xi_j}(p^{i}_{4_{k-1}}(\xi)) \qquad (j = 1, 2, 3;\ i = 1, 2, 3, 4)\cdot$$

证明　为简单起见, 设 $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0) = (0, 0, 0, 0) \in R^4 = V\cdot$

由于 $D_0 = J^0(V, Z)$, 因此初始条件为

$$\sigma_0(\xi) = (0 + \xi_1,\ 0 + \xi_2,\ 0 + \xi_3,\ 0 + g(\xi)),$$

这里 $g(\xi) = 0,$

$$\gamma_0(\xi) = \left(\sigma_0(\xi), u_1(\xi), u_2(\xi), u_3(\xi), u_4(\xi)\right)\cdot$$

现在考虑 $k = 1$, 此时 D 的 1 阶本方程 $D_1 = D$, 根据前面的叙述, 要根据 γ_0 来确定 γ_1, 并且 γ_1 要满足:

$$\gamma_1^* \omega = 0 \qquad (\omega \in I_1(V, Z)), \qquad \gamma_1(\xi) \in D_1,$$

这里

$$\omega_i = \mathrm{d}u_i - (p^i_1 \mathrm{d}x_1 + p^i_2 \mathrm{d}x_2 + p^i_3 \mathrm{d}x_3 + p^i_4 \mathrm{d}x_4) \qquad (i = 1, 2, 3, 4)\cdot$$

因此就得到关于 $p^i_4(i = 1, 2, 3, 4)$ 如下方程组:

$$(*)_1:\begin{cases} \delta p^1_4 + \left(\dfrac{-\delta_1}{\rho}\right) p^4_4 = \varphi_{1,0}, \\ \delta p^2_4 + \left(\dfrac{-\delta_2}{\rho}\right) p^4_4 = \varphi_{2,0}, \\ \delta p^3_4 + \left(\dfrac{-\delta_3}{\rho}\right) p^4_4 = \varphi_{3,0}, \\ \delta_1 p^1_4 + \delta_2 p^2_4 + \delta_3 p^3_4 = \varphi_{4,0}, \end{cases}$$

其中

$$\delta_j = \frac{\partial g}{\partial \xi_j} \qquad (j = 1, 2, 3), \quad \delta = 1 - u_1\delta_1 - u_2\delta_2 - u_3\delta_3,$$

$$\varphi^{(4)}_{i,0} = \Phi^{(4)}_{i,0} - u_1 u_i(1) - u_2 u_i(2) - u_3 u_i(3) - \frac{1}{\rho} u_4(i) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$\varphi^{(4)}_{4,0} = u_1(1) + u_2(2) + u_3(3), \quad \Phi^{(4)}_{i,0} = F^{(4)}_i \qquad (i = 1, 2, 3)\cdot$$

由于此时 $g(\xi) = 0$, 因此$(*)_1$ 有解的充分必要条件是:

$$\varphi^{(4)}_{4,0} = u_1(1) + u_2(2) + u_3(3)\cdot$$

因此, 在满足上述条件下, 求得 γ_1 为

$$\gamma_1(\xi) = (\gamma_0(\xi), p^i_l(\xi)),$$

其中 $p^i_4(\xi)$ 由$(*)_1$ 决定· 而其它 $p^i_l(\xi) = u_i(l)(i = 1, 2, 3, 4;\ l = 1, 2, 3)\cdot$

在一般情况下, 假设已求得 γ_{k-1}, γ_{k-1} 满足以下条件:

$$\begin{cases} \alpha^{k-1}_{-1} \circ \gamma_{k-1} = \sigma_0, \quad \alpha^{k-1}_{-1} \circ \gamma_{k-1} = \gamma_0, \\ \gamma_{k-1}^* \omega = 0, \quad (\omega \in I_{k-1}(V, Z)), \quad \gamma_{k-1}(\Delta_3) \subseteq D_{k-1}\cdot \end{cases} \tag{5}$$

根据 (σ_0, γ_{k-1}) 重复 $k = 1$ 时以上的计算过程, 即可得关于 $p^i_{4_k}$ 的如下方程组:

$$(*)_k:\begin{cases}\delta p_4^{1_k}+\left(-\dfrac{\delta_1}{\rho}\right)p_4^{4_k}=\varphi_{1,k-1},\\ \delta p_4^{2_k}+\left(-\dfrac{\delta_2}{\rho}\right)p_4^{4_k}=\varphi_{2,k-1},\\ \delta p_4^{3_k}+\left(-\dfrac{\delta_3}{\rho}\right)p_4^{4_k}=\varphi_{3,k-1},\\ \delta_1 p_4^{1_k}+\delta_2 p_4^{2_k}+\delta_3 p_4^{3_k}=\varphi_{4,k-1},\end{cases}$$

其中

$$\delta=1-u_1\delta_1-u_2\delta_2-u_3\delta_3,$$

$$\begin{cases}\varphi_{i,k-1}^{(4)}=\Phi_{i,k-1}^{(4)}-u_1p_4^{i_{k-1}}(1)-u_2p_4^{i_{k-1}}(2)-u_3p_4^{i_{k-1}}(3)-\\ \qquad\qquad \dfrac{1}{\rho}p_4^{4_{k-1}}(i)\qquad (i=1,2,3),\\ \varphi_{4,k-1}^{(4)}=p_4^{1_{k-1}}(1)+p_4^{2_{k-1}}(2)+p_4^{3_{k-1}}(3),\end{cases}\tag{6}$$

$$\delta_l=\frac{\partial g}{\partial \xi_l},\ p_{j,|\lambda|}^{i\ \lambda}(l)=\frac{\partial p_{j,\lambda}^{i\ \lambda}(\xi)}{\partial \xi_l}\qquad (l=1,2,3;\ i,j=1,2,3,4;\ |\lambda|\leqslant k-1)\cdot$$

(6) 式中 $\Phi_{i,k-1}^{(4)}$ 的计算公式为:

$$\Phi_{i,k-1}^{(4)}=\frac{\partial\Phi_{i,k-2}^{(4)}}{\partial x_4}-p_4^1p_{14}^{i_{k-2}}-p_4^2p_{24}^{i_{k-2}}-p_4^3p_{34}^{i_{k-2}}\qquad (i=1,2,3)\cdot\tag{7}$$

记

$$\boldsymbol{M}_k=\begin{pmatrix}\delta&0&0&-\dfrac{\delta_1}{\rho}\\ 0&\delta&0&-\dfrac{\delta_2}{\rho}\\ 0&0&\delta&-\dfrac{\delta_3}{\rho}\\ \delta_1&\delta_2&\delta_3&0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{M}_k=\begin{pmatrix}\delta&0&0&-\dfrac{\delta_1}{\rho}&\varphi_{1,k-1}\\ 0&\delta&0&-\dfrac{\delta_2}{\rho}&\varphi_{2,k-1}\\ 0&0&\delta&-\dfrac{\delta_3}{\rho}&\varphi_{3,k-1}\\ \delta_1&\delta_2&\delta_3&0&\varphi_{4,k-1}\end{pmatrix},$$

显然, $(*)_k$ 有解充要条件是

$$\varphi_{4,k-1}^{(4)}=p_4^{1_{k-1}}(1)+p_4^{2_{k-1}}(2)+p_4^{3_{k-1}}(3)=0$$

即

对 $\forall k\geqslant 1$, 有

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{M}_k=\operatorname{rank}\boldsymbol{M}_k=3,$$

于是据此即可完全决定

$$\gamma_k(\xi)=(\gamma_{k-1}(\xi),p_{j,k}^{i\ \lambda}(\xi)),$$

其中 $p_4^{i_k}$ 由 $(*)_k$ 决定, 而其它 $p_{j\ l}^{i\ \mu}=p_j^{i\ \mu}(l)$, $|\mu|=k-1$, $l=1,2,3$, $i=1,2,3,4\cdot$

证明完毕•

4 计算实例

设 $\Sigma:\{t=0\}\subseteq R^4$, 则 $\delta_i=0\ (i=1,2,3)$, 取 $\boldsymbol{x}^{(0)}=\boldsymbol{0}\in V=R^3\times\mathbf{R}$, 初始条件 (σ,γ) 如下:

$$\begin{cases}\sigma(\xi)=(\xi_1+0,\xi_2+0,\xi_3+0,0+0),\\ \gamma(\xi)=(\sigma(\xi),u_i(\xi))\qquad (i=1,2,3,4)\cdot\end{cases}\tag{8}$$

并设

$$F_1=-x_1+x_4,\quad F_2=x_2+x_4,\quad F_3=0,$$

$$u_i\mid_{t=0}=0,\ (i=1,2,3),\ P\mid_{t=0}=p_0\qquad (p_0\text{ 是常数})\cdot$$

即考虑的 Cauchy 问题为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_4}+u_1\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}+u_2\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}+u_3\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u_4}{\partial x_1}-x_4+x_1=0,\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_4}+u_1\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}+u_2\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}+u_3\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u_4}{\partial x_2}-x_2-x_4=0,\\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_4}+u_1\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}+u_2\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}+u_3\dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u_4}{\partial x_3}=0,\\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}+\dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}=0,\\ u_i\mid_{t=0}=0\ (i=1,2,3),\quad u_4\mid_{t=0}=p_0\cdot\end{cases}$$

求这一问题的形式解,其计算过程如下:

$k=1$,根据(σ,γ) 的定义,必须有 $\operatorname{lm}\gamma\subseteq D_0,\ \gamma^*\ \omega=0,\quad\forall\omega\in I_0(V,Z)$,因此初始值 $u_i(\xi)(i=1,2,3)$ 必须满足

$$u_1(1)+u_2(2)+u_3(3)=0,$$

于是可求得

$$p_l^i=u_i(l)=\frac{\partial u_i(\xi)}{\partial\xi_l},\ p_4^j=\varphi_{j,0}^{(4)}\qquad(i=1,2,3,4;\ j,l=1,2,3),$$

$\varphi_{j,0}^{(4)}$ 见(6)式$\cdot$ 而 p_4^4 可设任意值$\cdot$

$k\geqslant 2$,要确定 $p_{j,|\lambda|}^{i\ \lambda}(\xi)(i,j=1,2,3,4;\ |\lambda|\leqslant k-1)$,即要求确定 $\gamma_k(\xi)$,满足末方程(4)式$\cdot$

于是可求得

$$p_{j,|\lambda|}^{i\ \lambda}=p_j^i(\lambda l)=\frac{\partial p_j^i(\lambda\xi)}{\partial\xi_l}\qquad(i,j=1,2,3,4;\ l=1,2,3),$$

由(5)式可得到 $p_{4^k}^i=\varphi_{i,k-1}^{(4)}(i=1,2,3)$,$p_{4^k}^4$ 可设任意值$\cdot$

这样,求出了所有的 $p_{j,|\lambda|}^{i\ \lambda}(\xi)$,$k\geqslant 1$ 之后,可得到形式解为

$$u_i(x)\sim\sum_{|\lambda|}\frac{1}{\lambda!}A_j^i(\lambda 0)x^\lambda,$$

$$x^\lambda=x_1^\lambda+x_2^\lambda+x_3^\lambda+x_4^\lambda,\quad|\lambda|=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4(i=1,2,3,4),$$

其中

$$A_{j\ \lambda}^i(0)=p_{j,|\lambda|}^{i\ \lambda}(0)\cdot$$

通过上述计算过程,可得到两组有限形式的形式解:

$$\boldsymbol{u}^{(1)}=\begin{pmatrix}u_1^{(1)}\\ u_2^{(1)}\\ u_3^{(1)}\\ p^{(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x_1x_4\\ x_2x_4\\ 0\\ p_0+\rho\left(x_1x_4+x_2x_4-\dfrac{1}{2}x_1^2x_4^2-\dfrac{1}{2}x_2^2x_4^2\right)\end{pmatrix},$$

$$
\boldsymbol{u}^{(2)}=\begin{pmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_3^{(2)} \\ p^{(2)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x_1x_4+\dfrac{1}{2}x_4^2+\dfrac{1}{2}x_3x_4^2 \\ x_2x_4+\dfrac{1}{2}x_4^2 \\ \dfrac{1}{2}x_4^2+\dfrac{1}{2}x_1x_4^2 \\ p_0-f(x_1,x_2,x_3,x_4) \end{pmatrix},
$$

式中

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3,x_4)={}& x_3x_4+x_1x_3x_4+\frac{1}{2}x_1^2x_4^2-\\
&\frac{1}{2}x_2^2x_4^2-\frac{1}{2}x_1x_4^3+\frac{1}{2}x_2x_4^3-\frac{1}{2}x_1x_3x_4^3+\\
&\frac{1}{4}x_1x_4^4+\frac{1}{4}x_3x_4^4+\frac{1}{8}x_1^2x_4^4+\frac{1}{8}x_3^2x_4^4\text{•}
\end{aligned}
$$

显然这两组解满足同样的初始条件:

$$
u_i^{(1)}\mid_{t=0}=u_i^{(2)}\mid_{t=0}=0,\quad p^{(1)}\mid_{t=0}=p^{(2)}\mid_{t=0}=p_0\text{•}
$$

5 小　　结

1) Eluer 方程在 $\{t=0\}\subseteq R^4$ 超曲面上的初值问题是不适定的•

2) 当给定 $\Sigma\subseteq R^4$, $u_i\mid_\Sigma$, F_i, 事实上可以构造所需的任意多组形式解, 特别地, 可以构造如下两种形式的形式解:

多项式形式, 如: 例中的两组解均为多项式形式•

解析形式, 如: 初等函数的复合等•

另外, 从构造过程中可以看出由于 $p_{4^k}^4$, $k\geqslant 1$ 的任意设置性, 则使得构造任意多组形式解成为可能•

在以后的文章中, 将构造 Euler 方程各种不适定初值问题所有的形式解•

致谢　在本文的撰写与修改过程中, 得到了钱伟长院士的热心帮助和指导, 作者在此表示衷心的感谢•　导师施惟慧教授在成稿过程中给予作者的热忱关怀, 无私帮助和悉心指导, 在此表示感谢之情•

[参　考　文　献]

[1] JIU Quan_sen, GU Jin_sheng. Some estimates on 2_D Euler equations[J]. Advances in Mathematics, 1999, **28**(1): 55—63.

[2] 酒全森. 二维 Eluer 方程的弱解存在性[J]. 汕头大学学报(自然科学报). 1995, **10**(2): 28—35.

[3] 尹全成, 仇庆久. 关于不可压缩的 Euler 方程的一类解[J]. 数学年刊 A辑, 1996, (4): 495—506.

[4] Baouendi S, Goulaouic C. Probeme de Cauchy[A]. In: Seminaire Schwarz [C], Parie: Parie 11, Swarchs, 1997, 97—117, Expose 22.

[5] Landau J, Lifchitz E. Mecanique des Fluides[M]. Moscou: Editions Mir, 1971.

[6] SHIH Wei_hui. Solutions Analytiques de Quelques Equations aux Derives Partielles en Mecanique des Fluides[M]. Paris: Hermann Paris, 1992.

[7] Ehresmann Ch. Introduction a la theorie de structures infinitesimales et des pseudo_Groupes de lie

[A] In: Geometrie de Differentielle Colloques du C N r S [C]. Strasdourg: Colloques du C N R S, 1953, 97—117.

[8] 施惟慧, 陈达段, 何幼桦. 分层理论与非线性偏微分方程基础[M]. 上海: 上海大学出版社, 2001.

On the Well Posedness of Initial Value Problem for Euler Equations of Incompressible Inviscid Fluid(Ⅰ)

SHEN Zhen

(Department of Mathematics, Shanghai University,

Shanghai 2000436, P. R. Chian)

Abstract: The ill posed initial value problem of the Euler Equations and the formal solvability of ill posed problem based on stratification theory is discussed. For some ill posed initial value problems, the existence conditions of formal solutions and the methods of how to construct a formal solution are given. Finally, an example is given to discuss the ill posedness of the initial value problem on hyper plane $\{t = 0\} \subseteq R^4$ and explain that the problem has more than one solution.

Key words: Euler equation; ill posed problem; formal solution; equation secondaire